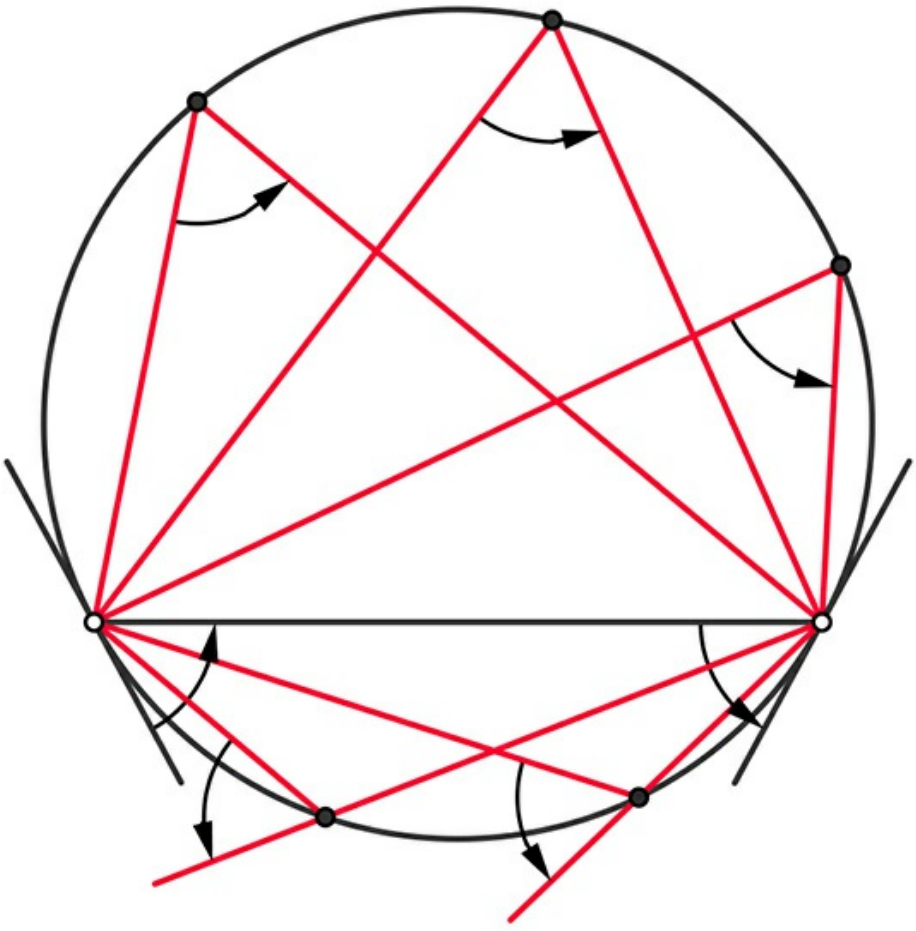
bookboon.com

Ebene und räumliche euklidische Geometrie: Band 1

Ebene euklidische Geometrie

Eberhard M. Schröder



Download free books at
bookboon.com

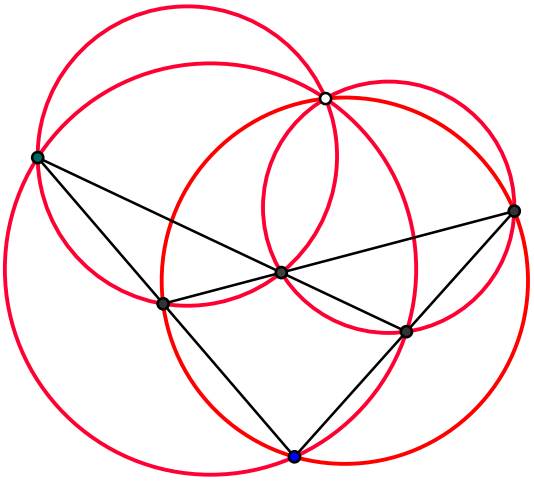
Eberhard M. Schröder

Ebene und räumliche euklidische Geometrie

Band 1: Ebene euklidische Geometrie

Download free eBooks at bookboon.com

Ebene und räumliche euklidische Geometrie: Band 1: Ebene euklidische Geometrie
1st edition
© 2014 Eberhard M. Schröder & bookboon.com
ISBN 978-87-403-0792-4



Download free eBooks at bookboon.com

Contents

	Vorwort	**10**
1	**Historische und methodische Vorbemerkungen**	**13**
A.	Euklid und das Parallelenaxiom	13
B.	Entdeckung der hyperbolischen Geometrie	13
C.	Pasch und Hilbert	14
D.	Neuere Entwicklungen	16
E.	Aufgaben	17
2	**Definition normaler euklidischer Ebenen**	**18**
A.	Vorüberlegungen in der Anschauungsebene	18
B.	Affine Ebenen und Parallelität	20
C.	Kongruenzaxiom und Zirkelaxiom	23
D.	Definition normaler euklidischer Ebenen	24
E.	Einige didaktische und methodische Bemerkungen	27
F.	Aufgaben	28

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

3	**Punktspiegelungen und Translationen**	**28**
A.	Folgerungen aus dem Parallelenaxiom	29
B.	Kollineationen und Bewegungen	30
C.	Existenz und Eigenschaften der Punktspiegelungen	31
D.	Translationen	35
E.	Aufgaben	38
4	**Orthogonalität**	**40**
A.	Definition und Grundeigenschaften	40
B.	Mittelsenkrechten und Höhen im Dreieck	41
C.	Elementare Konstruktionen	43
D.	Der Satz des Thales	44
E.	Geraden und Kreise	47
F.	Klassifizierung von Dreiecken und Vierecken	49
G.	Aufgaben	50
5	**Spiegelungen und Bewegungen**	**51**
A.	Existenz und Transitivität der Spiegelungen	51
B.	Translationen, Drehungen und Spiegelungen	54
C.	Der Dreispiegelungssatz	55

Download free eBooks at bookboon.com

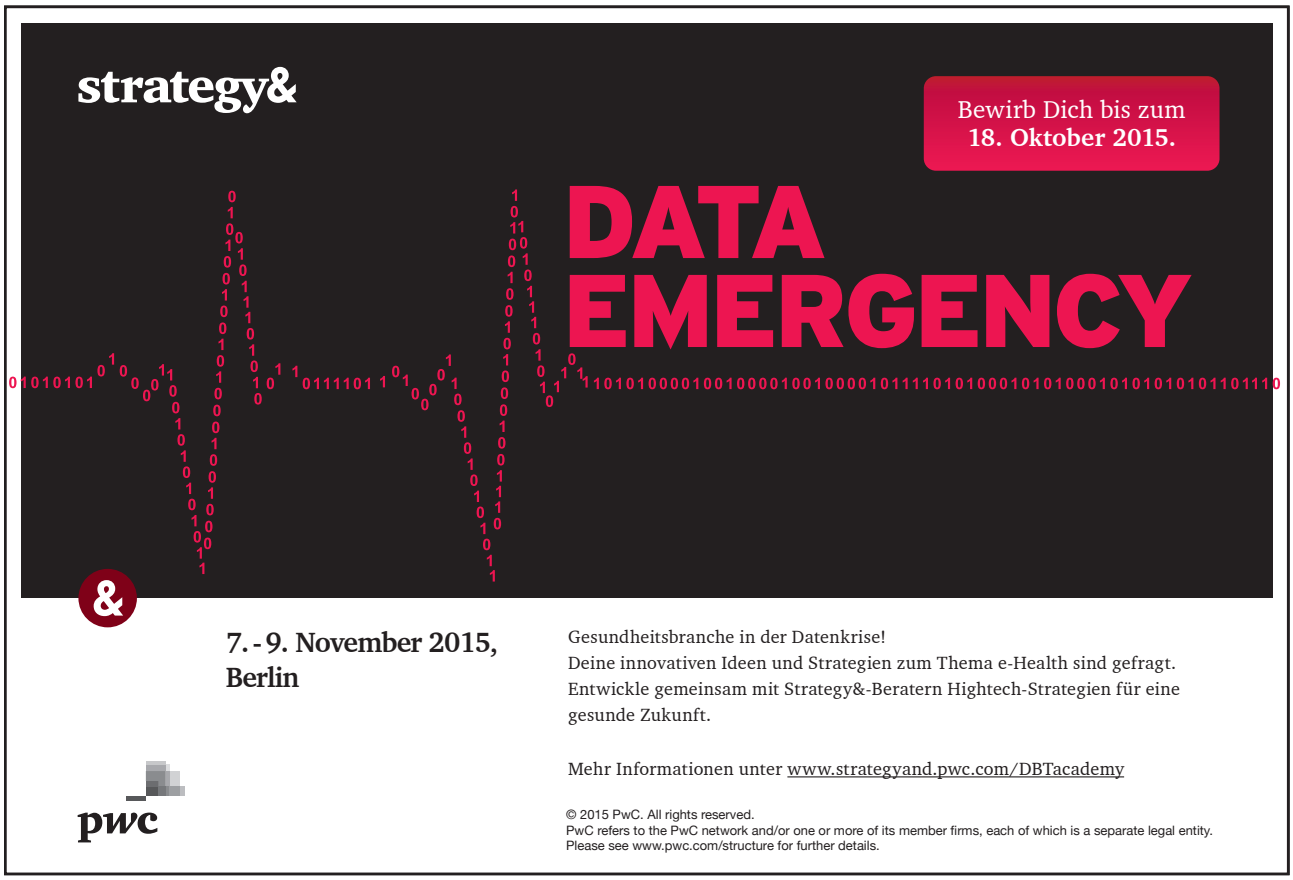
Click on the ad to read more

D.	Darstellung der Bewegungen durch Spiegelungen	56
E.	Involutorische Bewegungen	57
F.	Gleitspiegelungen	59
G.	Transitivität von Bewegungen	61
H.	Kongruenz	62
I.	Symmetrie	62
J.	Winkelhalbierende bei Dreiecken	66
K.	Aufgaben	68
6	**Winkel zwischen Geraden**	**69**
A.	Vorbemerkung über Winkel	70
B.	Gleichsinnige Kongruenz	71
C.	Konformität	72
D.	Grundeigenschaften	75
E.	Winkel und Kreise	77
F.	Geometrische Winkelmessung	79
G.	Ein 8-Kreise-Satz für schlichte Vierecke	81
H.	Aufgaben	87

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

7	**Definition euklidischer Ebenen**	**89**
A.	Motivation	89
B.	Definition	91
C.	Isomorphie	92
8	**Winkel und Kreise in euklidischen Ebenen**	**93**
A.	Grundeigenschaften der Kreise	93
B.	Der Kreiswinkelsatz	94
C.	Der Kreisvierseitsatz	96
D.	Sätze von Pappus und Pascal	99
E.	Weitere Schließungssätze	101
F.	Aufgaben	104
9	**Algebraische Darstellung euklidischer Ebenen**	**104**
A.	Existenz gleichsinniger Ähnlichkeiten	105
B.	Transitivität gleichsinniger Ähnlichkeiten	109
C.	Gewinnung einer quadratischen Körpererweiterung	112
D.	Algebraische Darstellung von Kreisen und Ähnlichkeiten	115
E.	Der Hauptsatz	117
F.	Der Isomorphiesatz	118



Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

G.	Konstruktion von Modellen	121
H.	Aufgaben	125
10	**Teilverhältnisse**	**127**
A.	Charakteristik eines Körpers	127
B.	Definition und Grundeigenschaften von Teilverhältnissen	129
C.	Ähnlichkeitssätze und Strahlensätze	131
D.	Sätze von Menelaos, Ceva und Brianchon	133
E.	Aufgaben	135
11	**Kongruenz und Metrik**	**136**
A.	Kongruenz	137
B.	Gegensinnige Ähnlichkeiten	139
C.	Algebraische Beschreibung der Kongruenz	142
D.	Kennzeichnung normaler euklidischer Ebenen	147
E.	Kennzeichnung und Darstellung der Bewegungen	147
F.	Weitere Sätze über Ähnlichkeiten	151
G.	Arithmetische Winkelmessung	153
H.	Sätze von Pythagoras und Euklid	156
I.	Sekantensatz und Büschelsätze	157

Deloitte.

Calling for Berlin
Technology Advisory kennenlernen

Consulting hautnah erleben
5.–7. November 2015
www.deloitte.com/de/calling-for-berlin

© 2015 Deloitte Consulting GmbH

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

J.	Schwerpunkt und Eulergerade eines Dreiecks	162
K.	Ein Satz von Morley	164
L.	Aufgaben	167
12	**Anordnung und Metrik**	**172**
A.	Die Anschauungsebene	173
B.	Euklidische Körper	175
C.	Darstellung klassischer euklidischer Ebenen	179
D.	Abstandsmessung	182
E.	Strecken, Strahlen und Speere	184
F.	Ebene Anordnungseigenschaften	188
G.	Vollständige euklidische Ebenen	192
H.	Aufgaben	194
13	**Flächenmessung und Orientierung**	**196**
A.	Determinanten	197
B.	Das Determinantenmß	199
C.	Flächenmessung	203
D.	Orientierung	206
E.	Aufgaben	209
14	**Winkel in klassischen euklidischen Ebenen**	**210**
A.	Winkel zwischen Strahlen	211
B.	Orientierte Winkel zwischen Strahlen	212
C.	Trigonometrische Funktionen	219
D.	Gewöhnliche Winkel	220
E.	Metrische Eigenschaften von Dreiecken	226
F.	Goldener Schnitt und reguläre Fünfecke	231
G.	Reelle Trigonometrie	233
H.	Aufgaben	235
	Personen- und Sachregister Band 1	**236**
	Abkürzungen und Symbole Band 1	**241**
	Textnummernregister Band 1	**243**
	Figurenregister Band 1	**245**

Download free eBooks at bookboon.com

Vorwort

Die Geometrie ist eines der ältesten und faszinierendsten Teilgebiete der Mathematik. Sie weist eine Fülle staunenswerter Sätze auf und besticht durch Ideenreichtum in den Beweisführungen wie auch durch die Ästhetik zeichnerischer Realisierungen von Lehrsätzen.

Sie vermag in besonderer Weise ein Gefühl für die Schönheit der Mathematik zu vermitteln. Zugleich bewirkt sie eine unübertreffliche Schulung des Anschauungsvermögens und erweist sich damit als unverzichtbares Instrument für die Ausübung technischer Berufe.

Für weite Bereiche der Mathematik, in denen abstrakte Konzepte im Vordergrund stehen, bilden anschauliche Erwägungen eine Grundlage und zugleich auch eine wichtige Inspirationsquelle.

Deshalb fördert das Befassen mit geometrischen Fragestellungen ein tieferes Eindringen in mathematisches Denken. Unsere Ausführungen zeigen in vielfältiger Weise, wie sich anschauliche Vorstellungen mit exakter Mathematik verbinden lassen.

Studierende werden hier wie auch sonst in der Mathematik erkennen, daß Ideenreichtum gefragt ist und daß eine geometrisch-begriffliche Argumentation weitaus eleganter sein kann als eine rechnerische Beweisführung.

Grundidee unserer Darstellung ist die Entfaltung einer anordnungsfreien euklidischen Geometrie, die aus wenigen einfachen Axiomen der Anschauung unter Verwendung rein geometrischer Schlußweisen zu einem erstaunlich umfassenden Kanon geometrischer Sätze führt.

Die Möglichkeit einer algebraischen Darstellung geometrischer Gegebenheiten ergibt sich auf diesem Wege recht zwanglos aus vorher bewiesenen geometrischen Aussagen. Sie dient jedoch nicht als Endziel, sondern als natürliches Hilfsmittel zur weiteren Entfaltung geometrischer Sätze.

Unsere Ausführungen wenden sich an Studierende mit Haupt- oder Nebenfach Mathematik ab dem zweiten Semester, insbesondere auch an Studierende der Lehrämter, ferner an alle, die euklidische Geometrie im Detail kennenlernen möchten.

Download free eBooks at bookboon.com

Im ersten Teil wird die anordnungsfreie Theorie der normalen euklidischen Ebenen aus vier einfachen Axiomen der Anschauung entwickelt. Einzige Grundbegriffe sind hierbei die Menge der Punkte und die Kongruenz von zweielementigen Punktmengen.

Neben einer Fülle elementargeometrischer Sätze leiten wir im zweiten Teil die algebraische Darstellung euklidischer Ebenen durch quadratische Körpererweiterungen her.

Die Anordnungseigenschaften euklidischer Ebenen werden im dritten Teil unserer Ausführungen behandelt. Dabei wird detailliert auf Beziehungen zwischen verschiedenen Winkelbegriffen eingegangen. Ferner wird bei euklidischem Koordinatenkörper ein Flächenmaß für Vielecke vorgestellt, welches zugleich auch Aussagen über Orientierung ermöglicht.

Das Arbeiten mit diesem Buch wird erleichtert durch mehrere ausführliche Register. Jeder Paragraph endet mit einer Reihe von Aufgaben.

In Band 2 finden sich ausfürliche Lösungshinweise zu den Aufgaben, ferner auch ein Anhang über mathematische Grundbegriffe.

Das Manuskript ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die ich seit 1980 mehrfach an der Universität Hamburg gehalten habe. Es wird hier als Neubearbeitung und wesentliche Erweiterung von [38] in Form eines e-books vorgelegt.

Mein besonderer Dank gilt meinem verehrten Kollegen Walter Benz für viele hilfreiche Gespräche über Geometrie sowie auch meinem Kollegen Rolfdieter Frank für die sorgfältige Durchsicht des Textes und für eine Reihe wertvoller Hinweise.

Hamburg, im Frühjahr 2014 E. M. S.

Download free eBooks at bookboon.com

Aber bitte, wird man mir sagen, was nützt einem hungrigen Magen die Kenntnis der Natur, was die ganze Astronomie? Nun, die verständigen Menschen hören nicht auf die Unbildung, die da schreit, man müsse deswegen jene Studien unterlassen. Man duldet die Maler, weil sie die Augen, die Musiker, weil sie die Ohren ergötzen, obwohl sie sonst keinen Nutzen bringen. Ja, der Genuß, den wir aus ihren Werken schöpfen, gilt nicht nur als angemessen für den Menschen, er gereicht ihm auch zur Ehre.
Welche Unbildung, welche Dummheit daher, dem Geist eine ihm zukommende ehrbare Freude zu neiden, sie aber den Augen und Ohren zu gönnen! Der streitet gegen die Natur, wer gegen diese Freude streitet!
Denn der allgütige Schöpfer, der die Natur aus dem Nichts ins Dasein gerufen, hat er nicht jedem Geschöpf das, was notwendig ist, dazu aber noch Schmuck und Lust in überreicher Fülle bereitet?... Unser Bildner hat zu den Sinnen den Geist gefügt, nicht bloß, damit sich der Mensch seinen Lebensunterhalt erwerbe, ... sondern auch dazu, daß wir vom Sein der Dinge, die wir mit Augen betrachten, zu den Ursachen ihres Seins und Werdens vordringen ...
So wird die Seele des Menschen ... durch jene Nahrung in der Erkenntnis am Leben erhalten, bereichert, gewissermaßen im Wachstum gefördert.

JOHANNES KEPLER,
aus dem Widmungsschreiben zum
Mysterium cosmographicum, 1596

Download free eBooks at bookboon.com

Teil I

NORMALE EUKLIDISCHE EBENEN

1 Historische und methodische Vorbemerkungen

A. Euklid und das Parallelenaxiom

Die euklidische Geometrie erhebt den Anspruch, ein mathematisches Modell unseres Anschauungsraumes und damit des Raumes der klassischen Physik zu sein. Zur Untermauerung dieses Anspruches war es bereits im Altertum ein Anliegen der Mathematiker, diese Geometrie aus einfachen Grundtatsachen der Anschauung zu entwickeln.

Euklid (ca. 365-300 v. Chr.) faßte die diesbezüglichen Bemühungen der damaligen Mathematiker in einem berühmt gewordenen Werk mit dem Titel „Elemente“ zusammen. Die Darstellung Euklids galt bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts hinein als Musterbeispiel für exaktes mathematisches Schließen.

Die „Elemente“ umfassen dreizehn Bücher. Am Anfang stehen Definitionen, Postulate und Axiome, also Aussagen, die ohne Beweis als gültig angenommen werden. Die bekannten Lehrsätze der Geometrie werden hieraus durch logisch strenge Deduktion hergeleitet.

Unter den Postulaten fand sich eines, das anschaulich weniger Evidenz als die übrigen Postulate besaß, nämlich das sogenannte „Parallelenaxiom“ (vgl. §2).

Deshalb gab es seit dem Altertum immer wieder Versuche nachzuweisen, daß das Axiom in Wahrheit ein Satz und damit aus den übrigen Axiomen herleitbar sei. Dieser Nachweis wollte jedoch nicht gelingen.

B. Entdeckung der hyperbolischen Geometrie

Die überlieferte Problemstellung wurde im Laufe der Jahrhunderte z.B. aufgegriffen von Proklos (410-485), Omar Khayyam (1050-1123),

Download free eBooks at bookboon.com

Nasir Eddin Al-Tusi (1201-1274), J. Wallis (1616-1703), G. Saccheri (1667-1733), J. H. Lambert (1728-1777), A. M. Legendre (1752-1833). Dabei ergaben sich Aussagen, die zum Parallelenaxiom äquivalent sind. Zugleich wurde geprüft, welche Lehrsätze ohne das Parallelenaxiom herleitbar sind.

Mit der Zeit verdichteten sich die Zweifel an der Beweisbarkeit des Parallelenaxioms, und man fragte, ob ein Kosmos denkbar sei, in dem die Negation des Parallelenaxioms Gültigkeit besitzt.

Dieses Problem lösten nun in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts gleich drei Mathematiker unabhängig voneinander. Zu nennen ist hier C. F. Gauss, der sich, wie man aus Briefen (1816, 1824) weiß, mehr als dreißig Jahre lang mit dieser Frage beschäftigte, der aber auf eine Veröffentlichung seiner Ergebnisse verzichtete, da er das „Geschrei der Böotier“, der unverständigen Zeitgenossen, fürchtete. Dagegen publizierten N. Lobatschefsky 1826 sowie J. Bolyai 1831 ihre diesbezüglichen Ergebnisse.

Alle drei gelangten zu der Erkenntnis, daß eine in sich widerspruchsfreie „nichteuklidische“ Geometrie aufgebaut werden könne, und entwickelten deren spezifische Eigenschaften. Die Veröffentlichung dieser Ergebnisse zog große Anfeindungen nach sich, auch unter Mathematikern, wie es Gauss vorhergesehen hatte.

Allgemeine Anerkennung fand diese heute „hyperbolisch“ genannte Geometrie erst durch das von F. Klein 1871 vorgestellte Modell einer solchen Struktur, das sich innerhalb der Anschauungsebene realisieren läßt. Die Existenz dieses Modells zeigt, daß das Parallelenaxiom nicht aus den übrigen Axiomen Euklids herleitbar ist, daß es also zu Recht als Axiom verwendet wurde.

C. Pasch und Hilbert

Unabhängig von diesen Entdeckungen wurde in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts bemerkt, daß Euklid bei seinem Aufbau gewisse Aussagen benutzt hatte, die nicht durch Postulate oder Axiome abgedeckt waren.

M. Pasch hielt 1882 eine Vorlesung, in der er zeigte, wie sich diese Lücken schließen lassen. Darüber hinaus ergab sich jedoch auch Kri-

Download free eBooks at bookboon.com

tik an EUKLIDs Definitionen. Dies führte D. HILBERT dazu, in seinem Werk „Grundlagen der Geometrie“ (1899) ein völlig neues Verständnis von Geometrie zu entwickeln. Nach HILBERT geht es dem Mathematiker nicht um die Objekte, mit denen er umgeht, sondern um die Beziehungen zwischen den Objekten, so daß er die Freiheit hat, von einem Modell zu einem „isomorphen“ Modell überzugehen, wobei die Objekte des ersten und des zweiten Modells gänzlich verschieden sein dürfen.

Erst durch HILBERTs Ansatz läßt sich Geometrie als mathematische Struktur im heutigen Sinne verstehen und nach heute üblichen Maßstäben exakt aufbauen.

Danach steht jede nichteuklidische Geometrie als mathematische Struktur gleichwertig neben der euklidischen Geometrie. Es ist Aufgabe der Physiker festzustellen, welche Geometrie den Raum am besten beschreibt.

Nach heutiger Erkenntnis stellt die euklidische Geometrie den uns umgebenden Raum in guter Näherung, aber nicht exakt dar, wenn Geradlinigkeit mit Hilfe von Lichtstrahlen definiert wird. Die euklidische Geometrie besitzt jedoch insofern eine vorrangige Stellung, als sie den Raum einfacher als andere Geometrien beschreibt und als sie unsere anschaulichen Vorstellungen am direktesten widerspiegelt.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

D. Neuere Entwicklungen

Der HILBERTsche Standpunkt ermöglichte ein einheitliches Verständnis für eine Reihe von Verallgemeinerungen im Bereich der Geometrie, die sich in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts ergeben hatten.

So wurden neben den 2- und 3-dimensionalen Geometrien bereits n-dimensionale und bald auch unendlich-dimensionale Geometrien betrachtet. Ferner hatten die Arbeiten von A. CAYLEY gezeigt, daß neben der euklidischen und der hyperbolischen Metrik auch noch andere Metriken geometrisch relevant sind, und B. RIEMANN hatte 1854 dargelegt, wie ein „verbogener" Raum mathematisch zu beschreiben ist, der nur noch „lokal" eine Metrik im üblichen Sinne besitzt.

RIEMANNs Ergebnisse stellten später die mathematische Grundlage für die allgemeine Relativitätstheorie EINSTEINs (1916) dar. Auch die spezielle Relativitätstheorie EINSTEINs (1905) wird durch eine nichteuklidische (4-dimensionale) Geometrie beschrieben, die 1909 von H. MINKOWSKI angegeben wurde und die enge Beziehungen zur 3-dimensionalen hyperbolischen Geometrie aufweist.

Schließlich ging man nun dazu über, neben den reellen und den komplexen Zahlen auch andere Koordinatenkörper zuzulassen, wodurch man z. B. zur Betrachtung endlicher Geometrien gelangte, wie sie heute etwa in der Codierungstheorie eine Rolle spielen.

Auf diese Weise ergab sich eine Fülle neuer Fragen, von denen hier einige genannt seien:

1. Welche Sätze der euklidischen Geometrie gelten in anderen Geometrien, etwa bei Zugrundelegung beliebiger Dimension, beliebiger Metrik, eines beliebigen Koordinatenkörpers?

2. Welche Grundelemente und Sätze sind allen Geometrien gemeinsam?

3. Lassen sich alle Geometrien aus wenigen einfachen Prinzipien aufbauen, die sich gegebenenfalls physikalisch prüfen lassen?

4. In welchem Modell einer Geometrie läßt sich ein bestimmter Lehrsatz am besten beweisen?

5. Welche inner- und außermathematischen Probleme lassen sich besonders gut behandeln, wenn man sie in ein geometrisches Gewand kleidet?

Man wird solche Fragen ohne eine genaue Kenntnis der euklidischen Geometrie nicht beantworten können. Deshalb sollte ein Studium der Mathematik immer auch ein Studium grundlegender Eigenschaften der euklidischen Geometrie umfassen. Zwar werden viele solcher Eigenschaften bereits in der Schule behandelt, jedoch oft nicht sehr tiefgreifend. Für ein gründliches Studium wird es deshalb von Nutzen sein, einen systematischen Aufbau der euklidischen Geometrie kennenzulernen.

Download free eBooks at bookboon.com

Der im weiteren vorgestellte Aufbau geht im Ansatz auf die 1944 erschienene Arbeit „The fundamental theorems of elementary geometry - An axiomatic analysis“ von R. Baer zurück, berücksichtigt jedoch auch neuere Erkenntnisse (vgl. [8], [31], [37], [42]).

E. Aufgaben

A 1.1. Schauen Sie sich in einer Bibliothek die Bücher [10], [14], [20], [25], [43] an.

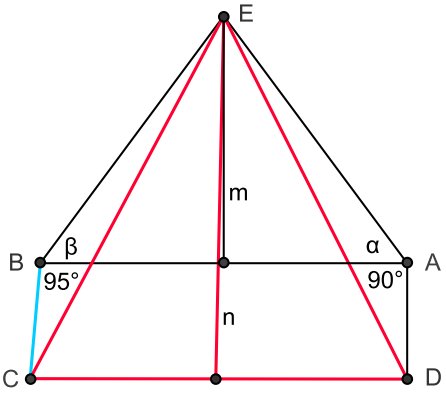
A 1.2. Befassen Sie sich mit den Mathematikern Euklid, Archimedes, G. W. Leibniz, B. Pascal, L. Euler, C. F. Gauss, B. Riemann, D. Hilbert, zumindest an Hand eines guten Lexikons.

A 1.3. Studieren Sie die Geschichte des Parallelenaxioms, etwa unter Verwendung von [3], [25], [27],[43].

A 1.4. Versuchen Sie unter Verwendung Ihrer Schulkenntnisse den folgenden Satz von Ptolemaios (um 150 n. Chr.) zu beweisen:

Gegeben sei ein konvexes Viereck, dessen Ecken auf einem Kreis liegen. Sind e, f die Längen der Diagonalen und a, c bzw. b, d die Längen der sich gegenüberliegenden Seiten, so ist $e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$.

A 1.5. Widerlegen Sie unter Verwendung Ihrer Schulkenntnisse den folgenden Scheinbeweis für $90° = 95°$:



Figur 1.1

Man betrachte ein gewöhnliches (konvexes) Viereck (A, B, C, D), das bei A den Winkel $90°$ und bei B den Winkel $95°$ hat und dessen Seitenlängen die Bedingungen $|A, D| = |B, C|$ und $|A, B| = 3 \cdot (90/95) \cdot |A, D|$ erfüllen (Figur 1.1).
Da die Geraden $<A, B>$ und $<C, D>$ nicht parallel sind, schneidet die Mittelsenkrechte m von $\{A, B\}$ die Mittelsenkrechte n von $\{C, D\}$ in einem Punkt E.
Im gleichschenkligen Dreieck $\{A, B, E\}$ ist der Winkel α bei A gleich dem Winkel β bei B, und es gilt $|A, E| = |B, E|$ Da auch $\{C, D, E\}$ gleichschenklig ist, stimmen die Dreiecke $\{A, D, E\}$ und $\{B, C, E\}$ in allen Seiten überein und sind somit kongruent.

Dies bedeutet $\alpha + 90° = \beta + 95°$ mit $\alpha = \beta$, also $90° = 95°$.

Download free eBooks at bookboon.com

2 Definition normaler euklidischer Ebenen

A. Vorüberlegungen in der Anschauungsebene

(2.1) Unter der **Anschauungsebene** wollen wir ein mathematisches Objekt verstehen, dessen grundlegende Eigenschaften wir unserer an der Erfahrung geschulten und durch gewisse Idealisierungen unseres Denkens ergänzten Anschauung entnehmen.

Wir gehen davon aus, daß die Anschauungsebene eine Menge von Punkten ist, wobei der Begriff des Punktes anschaulich als „Präzisierung für das Phänomen des Ortes“ zu denken ist (vgl. [32]), und daß wir in oder „über“ dieser Ebene - rein gedanklich - gewisse Operationen ausführen können, die die beim Zeichnen gewonnenen Erfahrungen mathematisch wiedergeben.

So gehört es zu den elementaren Erfahrungen, daß man prüfen kann, ob der Punkt A vom Punkt B den gleichen Abstand hat wie der Punkt C vom Punkt D. Die Überprüfung der Abstandsgleichheit erfolgt einfach durch „Ansetzen“ eines Zirkels oder einer Schnur und setzt keine Kenntnis von Zahlen oder Maßstäben voraus (vgl. Figur 2.1).

Liegt Abstandsgleichheit vor, so nennen wir $\{A, B\}$ und $\{C, D\}$ **kongruent**, in Zeichen: $\{A, B\} \equiv \{C, D\}$, andernfalls **inkongruent**, in Zeichen: $\{A, B\} \not\equiv \{C, D\}$.[1]

Anschaulich ist klar, daß $\equiv$ für die zweielementigen Punktmengen eine *Äquivalenzrelation* ist, d.h. für Punktmengen $\{A, B\}, \{C, D\}, \{E, F\}$ gilt stets

Reflexivität. Es ist $\{A,B\}\equiv\{A,B\}$.

Symmetrie. Aus $\{A,B\}\equiv\{C,D\}$ folgt $\{C,D\}\equiv\{A,B\}$.

Transitivität. Aus $\{A,B\}\equiv\{C,D\}$ und $\{C,D\}\equiv\{E,F\}$ folgt $\{A,B\}\equiv\{E,F\}$.

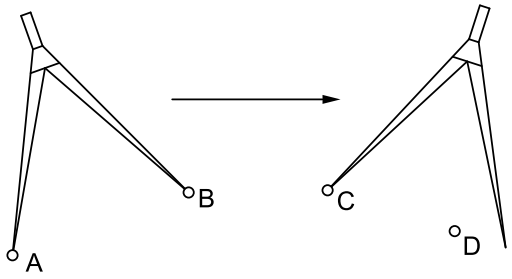
Wir bezeichnen $\equiv$ auch als **Kongruenzrelation**.

Bereits bei G. W. Leibniz (1646-1716) findet man den Gedanken, Geraden unter Verwendung der Relation $\equiv$ zu definieren. Tatsächlich sagt uns unser Gefühl für Symmetrie, daß die Menge aller Punkte X der Anschau-

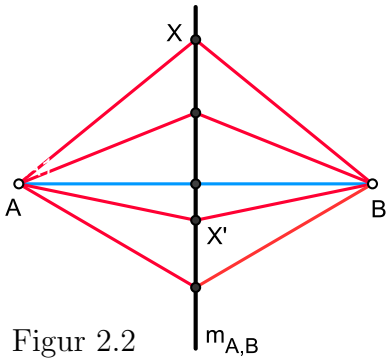
[1] Häufig verwendete Symbole sind im Symbolregister erklärt.

Download free eBooks at bookboon.com

ungsebene, die von zwei festen verschiedenen Punkten A, B gleichweit entfernt liegen, die also die Bedingung $\{A, X\} \equiv \{X, B\}$ erfüllen, eine Gerade ist, die zu A, B symmetrisch liegt und die auch **Mittelsenkrechte** $m_{A,B}$ von $\{A, B\}$ genannt wird (vgl. Figur 2.2). Darüber hinaus erscheint es uns selbstverständlich, daß sich jede Gerade als Mittelsenkrechte darstellen läßt.



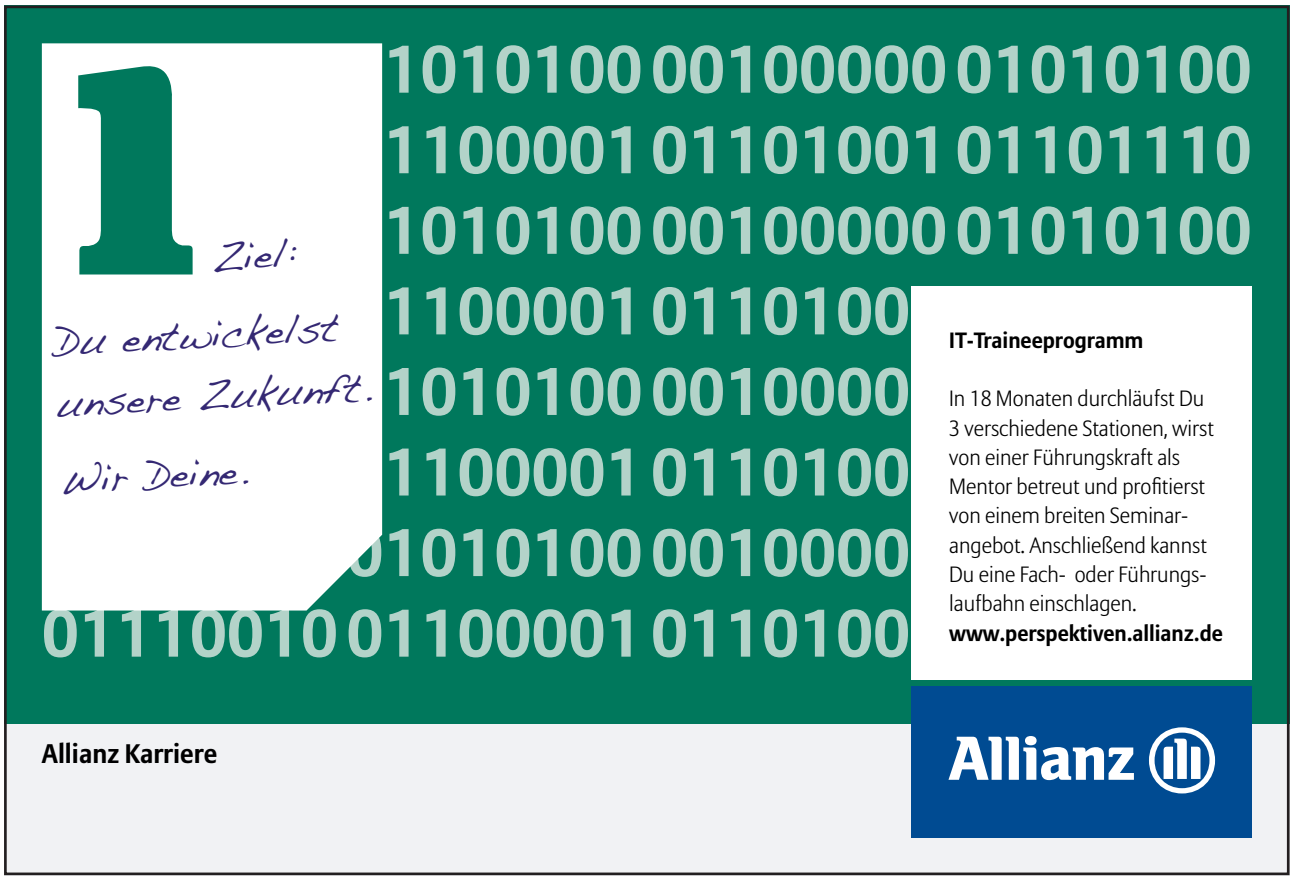
Figur 2.1



Figur 2.2

Wir bezeichnen r Punkte ($r \in \mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, ...\}$) als **kollinear**, wenn es eine Gerade gibt, die diese enthält, sonst als **nichtkollinear**. Wir gehen davon aus, daß für Punkte und Geraden der Anschauungsebene die folgenden beiden Aussagen evident sind:

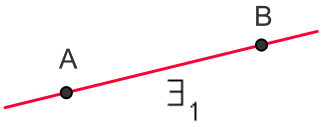
(V) **Verbindungsaxiom**. *Sind A, B zwei verschiedene Punkte, so gibt es genau eine Gerade g mit $g \ni A, B$* (Figur 2.3).



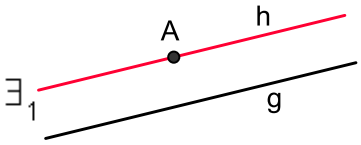
Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

(P) **Parallelenaxiom**. *Ist A ein Punkt und ist g eine Gerade mit $A \notin g$, so gibt es genau eine Gerade h mit $h \ni A$ und $h \cap g = \varnothing$* (Figur 2.4).



Figur 2.3



Figur 2.4

Die Aussage (P) ist das euklidische Parallelenaxiom in der Fassung von Proklos.

B. Affine Ebenen und Parallelität

(2.2) Ist $\mathbb{P}$ eine Menge mit $|\mathbb{P}| \geq 2$, deren Elemente als **Punkte** bezeichnet werden, und ist $\mathbb{G}$ eine Menge von Teilmengen von $\mathbb{P}$, deren Elemente **Geraden** genannt werden, so heißt das Paar $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine **affine Ebene**, wenn $\mathbb{P} \notin \mathbb{G}$ ist und wenn die Bedingungen (V), (P) aus (2.1) erfüllt sind.

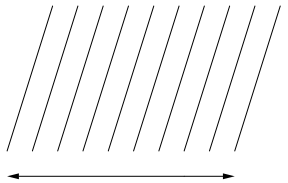
Download free eBooks at bookboon.com

Wir gehen also nach (2.1) davon aus, daß die Anschauungsebene - mit den durch $\equiv$ definierten Geraden - eine affine Ebene ist.

Dies ist nun allerdings keine erschöpfende Beschreibung der Anschauungsebene, denn wir werden später feststellen, daß es viele „nichtisomorphe“ euklidische Ebenen gibt, wobei noch zu klären ist, was „isomorph“ bedeutet.

Immerhin liefert die Aussage, daß die Anschauungsebene eine affine Ebene ist, aber bereits wichtige Aufschlüsse über Beziehungen zwischen Punkten und Geraden, wie wir bald bemerken werden.

Zum Beispiel kann man in jeder affinen Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ von der **Verbindungsgeraden** $<A, B>$ zweier verschiedener Punkte $A, B \in \mathbb{P}$ sprechen; dies ist die nach (V) eindeutig bestimmte Gerade, die A und B enthält.



Parallelbüschel

Figur 2.5

Weiter läßt sich auf der Geradenmenge $\mathbb{G}$ einer affinen Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ durch

$$g \parallel h :\Leftrightarrow \; g = h \;\vee\; g \cap h = \emptyset \quad \text{für } g, h \in \mathbb{G}$$

stets eine **Parallelitätsrelation** $\parallel$ (parallel) erklären.

Diese ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{G}$, denn sie ist reflexiv und symmetrisch, ferner auch transitiv, denn aus $g \parallel h \;\wedge\; h \parallel k$ mit $g, h, k \in \mathbb{G}$ folgt $g \parallel k$, da das Axiom (P) und die Definition der Parallelität im Falle $g \cap k \neq \emptyset$ auf $g = k$ führen. Die zugehörigen Äquivalenzklassen, also die maximalen Mengen zueinander paralleler Geraden, werden **Parallelbüschel** genannt (Figur 2.5).

Mit Hilfe der Parallelitätsrelation kann man das Axiom (P) auch wie folgt fassen:

(P_+) **Erweitertes Parallelenaxiom**. Zu jedem $(P, g) \in \mathbb{P} \times \mathbb{G}$ gibt es genau ein $h \in \mathbb{G}$ mit $h \ni P \;\wedge\; h \parallel g$.

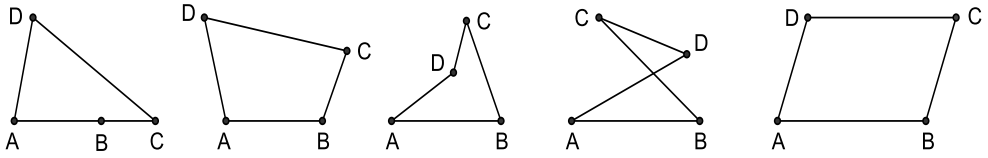
Zwei Geraden g, h der affinen Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ sind genau dann **nichtparallel**, in Zeichen: $g \nparallel h$, wenn sie sich **schneiden**, d. h. wenn $|g \cap h| = 1$ ist, denn wegen (V) haben zwei verschiedene Geraden höchstens einen Schnittpunkt.

Sind $A, B, C, D \in \mathbb{P}$, so heißt das Quadrupel (A, B, C, D) ein **Viereck** mit den **Ecken** A, B, C, D, wenn $|\{A, B, C, D\}| = 4$ ist, und ein **echtes Viereck**, wenn je drei der Punkte A, B, C, D nichtkollinear sind.

Download free eBooks at bookboon.com

Die Mengen $\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}$ werden die **Seiten**, die Geraden $<A, B>, <B, C>, <C, D>, <D, A>$ die **Seitengeraden** und die Geraden $<A, C>, <B, D>$ die **Diagonalen** des Vierecks (A, B, C, D) genannt.

Ein echtes Viereck (A, B, C, D) heißt **Parallelogramm**, in Zeichen: $\#(A, B, C, D)$, wenn $<A, B> \parallel <C, D> \wedge <B, C> \parallel <D, A>$ gilt (Figur 2.6 e)).



Figur 2.6: a) Viereck; b) - e) echte Vierecke; e) Parallelogramm

Wegen
$\#(A, B, C, D) \Leftrightarrow \#(D, A, B, C) \Leftrightarrow \#(C, D, A, B) \Leftrightarrow \#(B, C, D, A) \Leftrightarrow$
$\#(D, C, B, A) \Leftrightarrow \#(A, D, C, B) \Leftrightarrow \#(B, A, D, C) \Leftrightarrow \#(C, B, A, D)$
sagt man, die Ecken eines Parallelogrammes lassen sich *zyklisch* und auch *antizyklisch* vertauschen.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Sind $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ und $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ zwei affine Ebenen und ist φ eine Bijektion von $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{P}'$, die jede Gerade aus $\mathbb{G}$ auf eine Gerade aus $\mathbb{G}'$ abbildet, die also die Bedingung

(*) $\quad \varphi(<X, Y>) = <\varphi(X), \varphi(Y)> \ \forall\ X, Y \in \mathbb{P}$ mit $X \neq Y$

erfüllt, so heißt φ eine **Kollineation von** $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ **auf** $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$, im Falle $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$ und $\mathbb{G} = \mathbb{G}'$ auch kurz eine **Kollineation von** $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$.

Ist φ eine Kollineation von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ auf $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ und sind $U, V \in \mathbb{P}'$ mit $U \neq V$, so gilt $\varphi(<\varphi^{-1}(U), \varphi^{-1}(V)>) = <U, V>$. In Verbindung mit (*) bedeutet dies, daß φ eine Bijektion von $\mathbb{G}$ auf $\mathbb{G}'$ induziert und daß φ^{-1} eine Kollineation von $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ auf $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ ist.

Die affinen Ebenen $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ und $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ heißen **isomorph**, in Zeichen: $(\mathbb{P}, \mathbb{G}) \cong (\mathbb{P}', \mathbb{G}')$, wenn eine Kollineation von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ auf $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ existiert. Der damit für affine Ebenen erklärte Isomorphiebegriff ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, wie man sofort bestätigt.

C. Kongruenzaxiom und Zirkelaxiom

(2.3) Die Figur des Parallelogramms empfinden wir als besonders übersichtlich. In der Anschauungsebene können wir uns ein Parallelogramm dadurch entstanden denken, daß wir die zweielementige Menge $\{A, B\}$ längs einer Geraden g mit $g \not\ni A \ \wedge \ g \ni B$ „parallel verschieben", so daß schließlich B in $C \in g$ und A in D übergeht (vgl. Figur 2.7). Bei diesem Verschieben wird die Entfernung von A und B sich nicht ändern, d.h. es leuchtet ein, daß $\{A, B\} \equiv \{C, D\}$ ist, wenn (A, B, C, D) ein Parallelogramm ist.

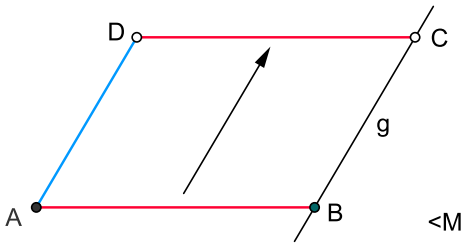
Wir wollen diese Eigenschaft von Parallelogrammen, die offenbar eine Verträglichkeitsbedingung zwischen Parallelitätsrelation und Kongruenzrelation darstellt, bei unserem Aufbau als Axiom verwenden. Dieses notieren wir als

(K) **Kongruenzaxiom**. Ist (A, B, C, D) ein Parallelogramm,
so ist $\{A, B\} \equiv \{C, D\}$ (vgl. Figur 2.7).

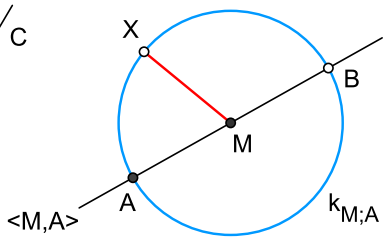
(2.4) Da unsere Kongruenzrelation anschaulich nichts anderes als Abstandsgleichheit beschreibt, kann sie insbesondere auch zur Definition der Kreise herangezogen werden. Wir setzen fest:

Sind M, A zwei verschiedene Punkte, so ist die Menge aller Punkte X, für welche die Bedingung $\{M, X\} \equiv \{M, A\}$ erfüllt ist, der **Kreis** $k_{M;A}$ **durch** A **mit dem Mittelpunkt** M, kurz der **Kreis um** M **durch** A.

Download free eBooks at bookboon.com



Figur 2.7



Figur 2.8

Anschaulich ist klar, daß der Kreis um M durch A die Gerade $<M, A>$ in genau zwei Punkten trifft, nämlich in A und in einem weiteren Punkt B (Figur 2.8). Diese Schnittbedingung formulieren wir als

(Z) **Zirkelaxiom**. Sind M, A zwei verschiedene Punkte einer Geraden g, so trifft der Kreis $k_{M;A}$ die Gerade g in genau zwei Punkten.

D. Definition normaler euklidischer Ebenen

(2.5) Wir wollen nun eine mathematische Struktur definieren, für die die Anschauungsebene mit den bis hierher erörterten grundlegenden Eigenschaften ein Modell ist.

Dazu seien eine Menge $\mathbb{P}$ mit $|\mathbb{P}| \geq 2$ und eine (abstrakte) Äquivalenzrelation $\equiv$ auf der Menge $\mathbb{P}_2$ aller zweielementigen Teilmengen von $\mathbb{P}$, genannt **Kongruenzrelation**, gegeben.

Die Elemente von $\mathbb{P}$ bezeichnen wir als **Punkte**. Ferner nennen wir zwei Elemente $\{A, B\}, \{C, D\} \in \mathbb{P}_2$ **kongruent**, wenn $\{A, B\} \equiv \{C, D\}$ gilt, andernfalls **inkongruent**, in Zeichen: $\{A, B\} \not\equiv \{C, D\}$.

Ist $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$, so heißt $m_{A,B} := \{X \in \mathbb{P} \mid \{A, X\} \equiv \{X, B\}\}$ die **Mittelsenkrechte** von $\{A, B\}$ und $k_{A;B} := \{X \in \mathbb{P} \mid \{A, X\} \equiv \{A, B\}\}$ der **Kreis** um A durch B mit **Mittelpunkt** A.

Da $\equiv$ nur zwischen zweielementigen Mengen erklärt ist, folgt

(1) $A, B \notin m_{A,B} \ \wedge \ A \notin k_{A;B} \ \forall \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$. Ferner gilt

(2) $m_{A,B} = m_{B,A} \ \wedge \ B \in k_{A;B} \ \forall \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$.

Es sei $\mathbb{G}$ die **Menge aller Mittelsenkrechten** und $\mathfrak{K}$ die **Menge aller Kreise**. Die Elemente von $\mathbb{G}$ bezeichnen wir zugleich auch als die **Geraden**. Wegen (1) ist $\mathbb{P} \notin \mathbb{G}$.

Download free eBooks at bookboon.com

Wir nennen das Paar $(\mathbb{P}, \equiv)$ eine **normale euklidische Ebene**, wenn $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine *affine Ebene* im Sinne von (2.2) ist und wenn das *Kongruenzaxiom* aus (2.3) sowie das *Zirkelaxiom* aus (2.4) erfüllt sind.

Demnach ist $(\mathbb{P}, \equiv)$ genau dann eine *normale euklidische Ebene*, wenn die vier Axiome (V), (P), (K), (Z) gelten.

Sind zwei normale euklidische Ebenen $(\mathbb{P}, \equiv)$, $(\mathbb{P}', \equiv')$ vorgegeben und ist φ eine Bijektion von $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{P}'$ mit

(3) $\{A, B\} \equiv \{C, D\} \Leftrightarrow \{\varphi(A), \varphi(B)\} \equiv' \{\varphi(C), \varphi(D)\}$
$\forall\, \{A, B\}, \{C, D\} \in \mathbb{P}_2$,

so wird φ ein **Isomorphismus** von $(\mathbb{P}, \equiv)$ auf $(\mathbb{P}', \equiv')$ und im Falle $\mathbb{P} = \mathbb{P}' \wedge \equiv = \equiv'$ auch ein **Automorphismus** von $(\mathbb{P}, \equiv)$ genannt.

Wenn ein Isomorphismus von $(\mathbb{P}, \equiv)$ auf $(P', \equiv')$ existiert, so heißen $(\mathbb{P}, \equiv)$ und $(\mathbb{P}', \equiv')$ **isomorph**, in Zeichen: $(\mathbb{P}, \equiv) \cong (\mathbb{P}', \equiv')$.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Die Isomorphie „$\cong$“ ist *reflexiv* (man betrachte $\varphi = id_{\mathbb{P}}$), *symmetrisch* (man beachte $X = \varphi^{-1}(\varphi(X)) \ \forall\, X \in \{A, B, C, D\}$) und *transitiv* (wegen der Transitivität von „$\Leftrightarrow$“). Dies hat zur Folge, daß die Automorphismen von $(\mathbb{P}, \equiv)$ mit dem Hintereinanderausführen als Verknüpfung eine Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}, \equiv)(\circ)$ bilden, genannt **Automorphismengruppe** von $(\mathbb{P}, \equiv)$.

Ist φ ein Isomorphismus von $(\mathbb{P}, \equiv)$ auf $(\mathbb{P}', \equiv')$ und setzen wir $X' := \varphi(X) \ \forall\, X \in \mathbb{P}$, so gilt $\varphi(m_{A,B}) = \{X' \mid X \in \mathbb{P} \wedge \{A, X\} \equiv \{X, B\}\}$ $= \{X' \mid X' \in \mathbb{P}' \wedge \{A', X'\} \equiv' \{X', B'\}\} = m_{\varphi(A),\varphi(B)} \ \forall\, \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$, also

(4) $\varphi(m_{A,B}) = m_{\varphi(A),\varphi(B)} \ \forall\, \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$.

Analog ergibt sich

(5) $\varphi(k_{A;B}) = k_{\varphi(A);\varphi(B)} \ \forall\, \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$.

Da mit φ auch φ^{-1} ein Isomorphismus ist, werden kollineare Punkte, nicht kollineare Punkte, Geraden, parallele Geraden, Parallelbüschel, Vierecke, echte Vierecke, Parallelogramme und Kreise durch φ stets auf Objekte des gleichen Typs abgebildet.

Wegen der Gültigkeit von Axiom (V) in $(\mathbb{P}, \equiv)$ und $(\mathbb{P}', \equiv')$ erhalten wir damit insbesondere

(6) $\varphi(<A, B>) = <\varphi(A), \varphi(B)> \ \forall\, \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$.

Demnach ist jeder Isomorphismus von $(\mathbb{P}, \equiv)$ auf $(\mathbb{P}', \equiv')$ eine Kollineation von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ auf $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ (vgl. (2.2)). Umgekehrt ist eine Kollineation von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ auf $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ jedoch nicht unbedingt ein Isomorphismus von $(\mathbb{P}, \equiv)$ auf $(\mathbb{P}', \equiv')$, wie wir sehen werden.

Es wird sich herausstellen, daß es nichtisomorphe normale euklidische Ebenen gibt. Z.B. braucht $\mathbb{P}$ nicht unendlich zu sein.

Dies bedeutet, daß die Anschauungsebene keineswegs *vollständig* durch die Axiome (V), (P), (K) und (Z) beschrieben wird.

Wir werden jedoch bemerken, daß sich aus diesen Axiomen durch logische Deduktion eine überraschende Fülle von Sätzen herleiten läßt, die dann insbesondere in der Anschauungsebene gelten und die bereits einen wesentlichen Teil des bekannten Kanons der Sätze der gewöhnlichen euklidischen Geometrie ausmachen.

Download free eBooks at bookboon.com

E. Einige didaktische und methodische Bemerkungen

Der hier eingeschlagene Weg kann nicht ohne weiteres in den Schulunterricht übernommen werden. Vielmehr wird man dort neben den Axiomen (V), (P), (K), (Z) noch weitere Aussagen als anschaulich evident betrachten, um sich auf diese Weise manchen Beweis zu vereinfachen oder gar zu ersparen. Überhaupt wird man nur in bestimmten begrenzten Teilbereichen streng logisch vorgehen und ansonsten gewisse heuristische Verfahren zur Gewinnung von Erkenntnissen verwenden, wird Geometrie also teilweise als eine Art Naturwissenschaft betreiben.

Von einem Mathematiklehrer wird nun allerdings erwartet, daß er weiß, wo er mathematisch arbeitet und wo nicht. Dazu muß er aber einmal einen strengen Aufbau kennengelernt haben. Wie ein solcher Aufbau didaktisch für den Schulunterricht umzusetzen ist, erkennt man z. B. durch ein Studium der Werke [2], [3], [6], [14], [20], [21], [25], [30], [46].

Der angehende Geometer hat in der Regel einige Schwierigkeiten, sich bei der Argumentation allein auf die vorgegebenen Axiome und die daraus hergeleiteten Sätze zu stützen, also alles zu „vergessen“, was er sonst schon weiß, oder etwa Fälle zu betrachten, die zwar logisch möglich, aber anschaulich unmöglich sind.

Diese Schwierigkeiten lassen sich jedoch durch Übung überwinden. Man muß sich in diesem Zusammenhang immer erneut klarmachen, daß es sich bei einer normalen euklidischen Ebene um eine abstrakte mathematische Struktur handelt, in der anschauliche Redeweisen verwendet werden, und daß die Anschauungsebene wirklich nur eines von vielen Modellen einer solchen Struktur ist, so daß die Eigenschaften der Anschauungsebene nicht a priori auch für die übrigen Modelle gelten.

Im Teil II werden wir neben den normalen euklidischen Ebenen noch sogenannte „nichtnormale“ euklidische Ebenen betrachten und dann zusammenfassend von euklidischen Ebenen sprechen. Daß alle diese Objekte „euklidisch“ genannt werden, rechtfertigt sich aus der Tatsache, daß eine Fülle von Eigenschaften der Anschauungsebene in diesen allgemeinen Gebilden gültig sind, wie wir sehen werden.

Erst die algebraische Darstellung wird zeigen, wie allgemein unser Ansatz ist. Es wird sich nämlich herausstellen, daß der Anschauungsebene das Körperpaar $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ entspricht, während die euklidischen Ebenen all-

Download free eBooks at bookboon.com

gemein durch Körperpaare $(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ beschrieben werden, wobei $\mathbb{L}$ als Vektorraum über $\mathbb{K}$ die Dimension 2 hat und wobei die Ebene genau dann normal ist, wenn in $\mathbb{K}$ die Bedingung $1 + 1 \neq 0$ erfüllt ist.

Erst in Teil III werden wir uns überlegen, durch welche Axiome sich die Anschauungsebene vollständig beschreiben läßt.

F. Aufgaben

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben unter Verwendung Ihrer Schulkenntnisse, möglichst ohne in Büchern nachzuschauen:

A 2.1. Formulieren und beweisen Sie den Kathetensatz und den Höhensatz des Euklid sowie den Satz des Pythagoras.

A 2.2. Die Punkte, von denen aus die Leinwand eines Autokinos unter dem (waagerechten) Sehwinkel 60^0 erscheint, bilden eine Linie. Welche Gestalt hat diese Linie? Was für eine Linie erhält man bei 53^0 statt 60^0? Beweis?

A 2.3. Zeichnen Sie in einem Dreieck die Höhen, die Mittelsenkrechten, die Seitenhalbierenden und die Winkelhalbierenden. Stellen Sie Gesetzmäßigkeiten fest? Können Sie diese beweisen?

A 2.4. Zeichnen Sie in einem Dreieck den Inkreis und den Kreis durch die Seitenmitten. Bemerken Sie eine Beziehung zwischen diesen Kreisen?

A 2.5. Wählen Sie sechs verschiedene Punkte $A_1, ..., A_6$ auf einem Kreis (die Reihenfolge braucht nicht einer Durchlaufung des Kreises zu entsprechen). Bestimmen Sie, soweit möglich, die Schnittpunkte der Gegenseiten des Sechsecks $(A_1, ..., A_6)$, also $<A_1, A_2> \cap <A_4, A_5>$, $<A_2, A_3> \cap$ $\cap <A_5, A_6>$, $<A_3, A_4> \cap <A_6, A_1>$. Stellen Sie eine Vermutung auf, wie diese Schnittpunkte relativ zueinander liegen.

3 Punktspiegelungen und Translationen

Im folgenden sei $(\mathbb{P}, \equiv)$ eine normale euklidische Ebene. Wir wollen zeigen, daß Punktspiegelungen und Translationen in $(\mathbb{P}, \equiv)$ existieren und wollen einige wesentliche Eigenschaften dieser Abbildungen entwickeln. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus §2. Sind $A, B \in \mathbb{P}$, so werden wir statt $\{A\}$ oft auch A oder AA und statt $\{A, B\}$ oft auch AB schreiben, wenn hierdurch keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

Download free eBooks at bookboon.com

A. Folgerungen aus dem Parallelenaxiom

(3.1) Ist $(A, g) \in \mathbb{P} \times \mathbb{G}$, so werde die gemäß Aussage (P_+) eindeutig bestimmte Gerade h mit $h \ni A \ \wedge \ h \parallel g$ auch die **Parallele durch** A **zu** g genannt und mit $(A \parallel g)$ bezeichnet. Für jede Gerade g sei $g\|$ das Büschel aller zu g parallelen Geraden (vgl. (2.2)). Wir zeigen zunächst

(3.2) **Satz**. *Es gilt:*

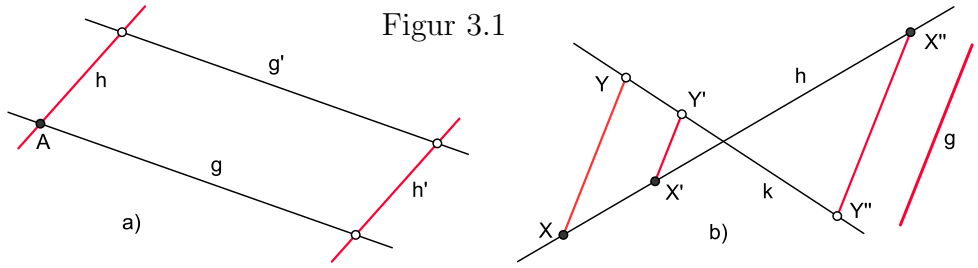
(1) Sind $g, g', h, h' \in \mathbb{G}$ *mit* $g \nparallel h \ \wedge \ g \parallel g' \ \wedge \ h \parallel h'$, *so ist* $g \nparallel h' \ \wedge \ g' \nparallel h \ \wedge \ g' \nparallel h'$ *(Figur 3.1 a)).*

(2) Gegeben seien $h, k \in \mathbb{G}$. *Dann gibt es ein* $g \in \mathbb{G}$ *mit* $g \nparallel h \wedge g \nparallel k$, *und die Abbildung* $\varphi_g : h \to k : X \to Y$ *mit* $\{Y\} := (X \parallel g) \cap k$ *ist eine Bijektion, genannt* **Parallelprojektion** *von* h *auf* k *in Richtung* g *(Figur 3.1 b)).*

(3) Je zwei Geraden aus $\mathbb{G}$ *sind gleichmächtig.*

(4) Es ist $|g| \geq 2 \quad \forall \ g \in \mathbb{G}$.

Figur 3.1



Beweis: (1) Es sei $A = g \cap h$. Wäre $g \parallel h'$, so wären g, h zwei verschiedene Parallelen zu h' durch A entgegen (P_+). Folglich ist $g \nparallel h'$. Analog ergibt sich $g' \nparallel h$ und $g' \nparallel h'$.

(2), (3), (4): Wegen $|\mathbb{P}| \geq 2$ und Axiom (V) sowie wegen $\mathbb{P} \notin \mathbb{G}$ gibt es drei nichtkollineare Punkte A, B, C. Ist $\mathbb{G}_0 := \{<A, B>, <B, C>, <C, A>\}$, so gibt es wegen ($P_+$) höchstens ein $h' \in \mathbb{G}_0$ mit $h' \parallel h$ und höchstens ein $k' \in \mathbb{G}_0$ mit $k' \parallel k$. Folglich gibt es ein $g \in \mathbb{G}_0$ mit $g \nparallel h$ und $g \nparallel k$. Nach (1) und (2.2) sind φ_g und $\psi_g : k \to h : U \to V$ mit $\{V\} := (U \parallel g) \cap h$ zueinander inverse Abbildungen. Damit erhalten wir (2) und (3), und aus (3) folgt (4) wegen $|<A, B>| \geq 2$. $\square$

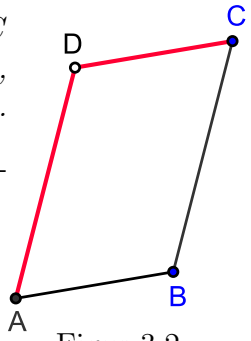
Als Anwendung von (3.2) erhalten wir

Download free eBooks at bookboon.com

(3.3) **Parallelogrammergänzungssatz**. *Sind A, B, C nichtkollineare Punkte, so existiert genau ein Punkt D, so daß (A, B, C, D) ein Parallelogramm ist (Figur 3.2).*

Beweis: Nach (3.2) und nach der Definition der Parallelogramme ist D durch die Bedingung

$D = (C \parallel <A, B>) \cap (A \parallel <B, C>)$ festgelegt. □



Figur 3.2

B. Kollineationen und Bewegungen

(3.4) Eine Bijektion φ von $\mathbb{P}$ auf sich ist nach (2.2) eine Kollineation der affinen Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$, wenn sie Geraden stets auf Geraden abbildet. Sind φ, ψ Kollineationen von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$, so offenbar auch φ^{-1} und $\varphi \circ \psi$. Da insbesondere auch die identische Abbildung $id_{\mathbb{P}}$ eine Kollineation ist, bilden die Kollineationen von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ mit dem Hintereinanderausführen „$\circ$“ als Verknüpfung eine Gruppe $\Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{G})(\circ)$, genannt **Kollineationsgruppe** von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$.

Ist φ eine Kollineation von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$, so bildet φ kollineare Punkte auf kollineare Punkte und nichtkollineare Punkte auf nichtkollineare Punkte ab. Da φ bijektiv ist, gilt außerdem $g \cap h = \varnothing \Leftrightarrow \varphi(g) \cap \varphi(h) = \varnothing$ für beliebige $g, h \in \mathbb{G}$ und damit

$$g \parallel h \Leftrightarrow \varphi(g) \parallel \varphi(h) \quad \forall\, g, h \in \mathbb{G}.$$

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Demnach führt φ Vierecke in Vierecke, echte Vierecke in echte Vierecke, Parallelogramme in Parallelogramme und Parallelbüschel in Parallelbüschel über.

Ein Punkt A heißt **Fixpunkt** von φ, wenn er bei φ festbleibt, wenn also $\varphi(A) = A$ ist.

Eine Gerade g heißt **Fixgerade** von φ, wenn sie als Ganzes (!) bei φ festbleibt, wenn also $\varphi(g) = g$ ist.

Gilt sogar $\varphi(X) = X \ \ \forall\, X \in g$, so sagen wir, g wird von φ **punktweise** festgelassen.

Sind g, h Fixgeraden von φ mit $g \nparallel h$, so ist $g \cap h = \varphi(g) \cap \varphi(h) = \varphi(g \cap h)$, d. h. dann ist der Schnittpunkt von g und h ein Fixpunkt.

(3.5) Eine Bijektion φ von $\mathbb{P}$ auf sich heißt **Bewegung** von $(\mathbb{P}, \equiv)$, wenn sie **distanztreu** ist, d, h. wenn sie die Bedingung

(*) $\ \{A, B\} \equiv \{\varphi(A), \varphi(B)\} \ \ \forall\, \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$

erfüllt.

Die Menge $\mathfrak{B}_{\equiv}$ aller Bewegungen von $(\mathbb{P}, \equiv)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}, \equiv)(\circ)$ und damit auch von $\Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{G})(\circ)$.

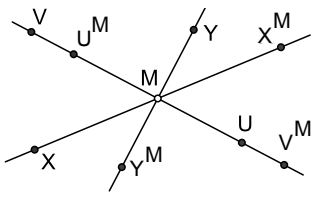
Denn nach (2.5)(3) ist jede Bewegung ein Automorphismus von $(\mathbb{P}, \equiv)$ und damit nach (2.5)(6) eine Kollineation von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$, und wegen
$\{\varphi^{-1}(\varphi(A)), \varphi^{-1}(\varphi(B))\} = \{A, B\} \equiv \{\varphi(A), \varphi(B)\} \ \ \forall\, \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$
gilt $[\varphi \in \mathfrak{B}_{\equiv} \Rightarrow \varphi^{-1} \in \mathfrak{B}_{\equiv}]$, woraus sich mit
$[\, id_P \in \mathfrak{B}_{\equiv} \wedge (\varphi, \psi \in \mathfrak{B}_{\equiv} \Rightarrow \varphi \circ \psi \in \mathfrak{B}_{\equiv})]$
die Behauptung ergibt.

Etwas treffender werden Bewegungen übrigens als „*Kongruenzabbildungen*“ bezeichnet, denn in der Tat ist unter „Bewegung“ hier nicht ein dynamischer Prozeß zu verstehen, sondern lediglich eine abstandstreue Bijektion.

C. Existenz und Eigenschaften der Punktspiegelungen

Im folgenden lernen wir bereits einige einfache Bewegungen kennen:

(3.6) Ist $M \in \mathbb{P}$, so gibt es wegen Axiom (Z) zu jedem $X \in \mathbb{P} \backslash \{M\}$ genau ein Element $X^M \in <X, M> \backslash \{X, M\}$ mit $\{X, M\} \equiv \{M, X^M\}$.



Figur 3.3

Setzen wir noch $M^M := M$, so ist $\widetilde{M} : \mathbb{P} \to \mathbb{P} : X \to X^M$ eine Abbildung von $\mathbb{P}$ in sich, genannt **Punktspiegelung an** M (Figur 3.3). Wir sagen, X^M *entsteht aus* X *durch Punktspiegelung an* M und schreiben auch $\widetilde{M}(X)$ statt X^M. Wir beweisen:

Download free eBooks at bookboon.com

(3.7) **Grundeigenschaften der Punktspiegelungen**.

Für jedes $M \in \mathbb{P}$ gilt:

(1) M ist der einzige Fixpunkt von $\widetilde{M}$.

(2) $\widetilde{M}$ ist bijektiv mit $\widetilde{M} \circ \widetilde{M} = id_{\mathbb{P}}$ und $\widetilde{M} = \widetilde{M}^{-1}$.

(3) Für jedes $g \in \mathbb{G}$ ist $\widetilde{M}(g) \in \mathbb{G}$ mit $\widetilde{M}(g) \parallel g$.

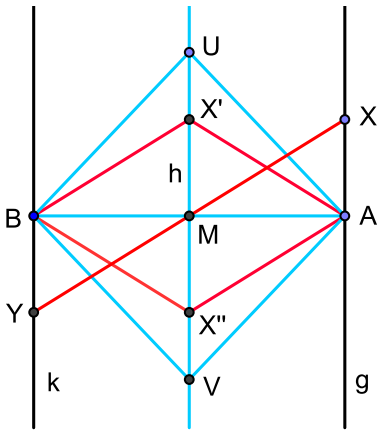
(4) Die Fixgeraden von $\widetilde{M}$ sind genau die Geraden durch M.

(5) Sind M, A, B nichtkollineare Punkte, so ist (A, B, A^M, B^M) ein Parallelogramm.

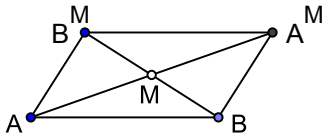
(6) $\widetilde{M}$ ist eine Bewegung von $(\mathbb{P}, \equiv)$.

Beweis: (1) folgt direkt aus der Definition von $\widetilde{M}$.

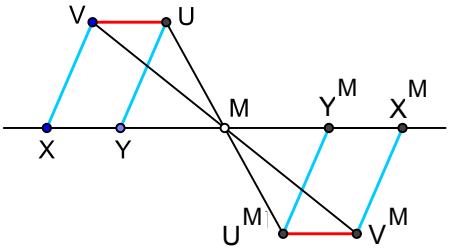
(2) Ist $X \in \mathbb{P}\backslash\{M\}$, so führt die Definition von $\widetilde{M}$ in Verbindung mit Axiom (Z) auf $(X^M)^M = X$. Demnach ist $\widetilde{M} \circ \widetilde{M} = id_{\mathbb{P}}$, und folglich ist $\widetilde{M}$ bijektiv mit $\widetilde{M} = \widetilde{M}^{-1}$.



Figur 3.4



Figur 3.5



Figur 3.6

(3), (4) : Es seien $g \in \mathbb{G}$ mit $g \not\ni M$, $h := (M \parallel g)$, $U \in h\backslash\{M\}$ und $V := U^M$ (Figur 3.4). Wegen $M \in m_{U,V}$ und $U \notin m_{U,V}$ ist $m_{U,V} \nparallel h$, und wegen $h \parallel g$ gibt es dann nach (3.2) ein $A \in \mathbb{P}$ mit $A = m_{U,V} \cap g$. Nach (3.3) gibt es genau ein $B \in \mathbb{P}$ derart, (U, A, V, B) ein Parallelogramm ist. Mit Axiom (K) folgt nun $VB \equiv AU \equiv AV \equiv UB$, also $U, V \in m_{A,B}$ und damit $m_{A,B} = h$. Außerdem ist $B \in m_{U,V}$, und wegen $M \in m_{A,B} \cap m_{U,V}$ gilt dann $B = A^M$.

Wir denken uns nun ein beliebiges $X \in g\backslash\{A\}$ gegeben. Ist $X' := h \cap \cap (B \parallel <X, M>)$, so gibt es nach (3.3) genau ein $X'' \in \mathbb{P}$ derart, daß (B, X', A, X'') ein Parallelogramm ist, und mit (K) erhalten wir dann $AX'' \equiv BX' \equiv X'A \equiv X''B$, also $X'' \in m_{A,B} = h$. Setzen wir noch $k := (B \parallel g)$ und $Y := <X, M> \cap k$, so sind (X, M, X'', A) und (B, X', M, Y) Parallelogramme, und mit (K) folgt $XM \equiv X''A \equiv BX' \equiv MY$, also $Y = X^M$. Da X in $g\backslash A$ beliebig gewählt war, bedeutet dies $\widetilde{M}(g) \subseteq k$.

Download free eBooks at bookboon.com

Ist $Y_0 \in k$, so ist $Y_0 = X_0^M$ für $X_0 := <Y_0, M> \cap g$, und folglich ist $\widetilde{M}(g) = k$ mit $k \cap g = \varnothing$ wegen $k \parallel g \wedge B \notin g$. Damit sind (3) und (4) bewiesen, da die Definition von $\widetilde{M}$ in Verbindung mit (2) auf $\widetilde{M}(m) = = m \ \ \forall\, m \in \mathbb{G}$ mit $m \ni M$ führt.

(5): Nach (2) und (3) ist $<A, B> \parallel <A^M, B^M>$ und $<A^M, B> \parallel <A, B^M>$, wobei je drei der Punkte A, B, A^M, B^M nichtkollinear sind (Figur 3.5).

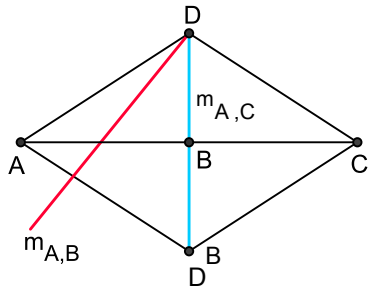
(6): Wegen (2) ist nur noch $XY \equiv X^M Y^M \ \ \forall\, XY \in \mathbb{P}_2$ zu zeigen. a) Im Falle $M \in \{X, Y\}$ ist dies klar, und im Falle $M \notin <X, Y>$ folgt dies aus (5) und (K). b) Es sei $M \in <X, Y> \backslash \{X, Y\}$. Dann ergänzen wir X, Y gemäß (3.3) durch Punkte U, V zu einem Parallelogramm (X, Y, U, V) (Figur 3.6). Da $\widetilde{M}$ wegen (3) eine Kollineation ist, ist auch (X^M, Y^M, U^M, V^M) ein Parallelogramm, und wegen $M \notin <U, V>$ führen a) und (K) dann auf $XY \equiv VU \equiv V^M U^M \equiv X^M Y^M$. $\square$

Download free eBooks at bookboon.com

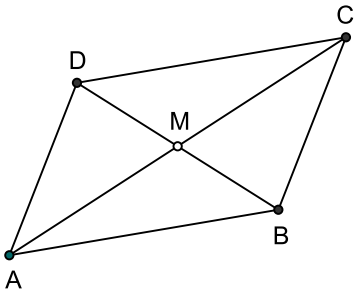
Click on the ad to read more

(3.8) **Satz**. *Es gilt* $m_{A,B} \nparallel <A,B>\ \ \forall\ AB \in \mathbb{P}_2$.

Beweis. Für $C := A^B$ ist $<A,B> = <A,C>$ und $m_{A,C} \cap <A,C> = B$. Gäbe es ein $D \in m_{A,B} \cap m_{A,C}$, so wäre $D \neq B$, also $D \notin <A,C>$, und (A,D,C,D^B) wäre nach (3.7)(5) ein Parallelogramm (Figur 3.7). Dies würde aber mit (K) auf $AD^B \equiv CD \equiv AD \equiv BD \equiv D^BB$, also auf $D^B \in m_{A,B}$ und damit auf $m_{A,B} = <D,D^B> = m_{A,C}$ führen. Folglich ist $m_{A,B} \cap m_{A,C} = \varnothing$, und mit (3.2) erhalten wir dann $m_{A,B} \nparallel <A,B>$ wegen $m_{A,C} \nparallel <A,B>$ $\square$.



Figur 3.7



Figur 3.8

Mit Hilfe von (3.8) ergibt sich nun

(3.9) **Transitivität der Punktspiegelungen**. *Sind* $A,B \in \mathbb{P}$, *so gibt es genau ein* $M \in \mathbb{P}$ *mit* $A^M = B$, *nämlich* $M := <A,B> \cap m_{A,B}$ *im Falle* $A \neq B$ *und* $M = A = B$ *sonst.*

Wir nennen M *die* **Mitte** *oder den* **Symmetriepunkt** *von* $\{A,B\}$.

Der *Beweis* ergibt sich unmittelbar aus (3.8) und aus der Definition der Punktspiegelungen. $\square$

(3.10) **Corollar 1**. *Ist* (A,B,C,D) *ein Parallelogramm von* $(\mathbb{P},\equiv)$, *so ist* $<A,C> \nparallel <B,D>$, *und* $M := <A,C> \cap <B,D>$ *ist die Mitte von* $\{A,C\}$ *und von* $\{B,D\}$ *(Figur 3.8).*

Beweis: Es sei E die Mitte von AC. Nach (3.7) (5) ist (A,B,C,B^E) ein Parallelogramm, und mit (3.3) erhalten wir $B^E = D$. Demnach führt $M := E$ auf die Behauptung. $\square$

(3.11) **Corollar 2**. *Ist* $\{A,C\} \in \mathbb{P}_2$ *mit* M *als Mitte und ist* φ *eine Kollineation von* $(\mathbb{P},\mathbb{G})$, *so ist* $\varphi(M)$ *die Mitte von* $\{\varphi(A),\varphi(C)\}$, *d.h.* φ *ist* **mittentreu**.

Beweis: Wir ergänzen $\{A,C\}$ gemäß (3.3) zu einem Parallelogramm (A,B,C,D). Da M nach (3.10) der Diagonalenschnittpunkt von (A,B,C,D) ist, wird M durch φ auf den Diagonalenschnittpunkt des Parallelogramms $(\varphi(A),\varphi(B),\varphi(C),\varphi(D))$ abgebildet, der nach (3.10) die Mitte von $\{\varphi(A),\varphi(C)\}$ ist. $\square$

Download free eBooks at bookboon.com

D. Translationen

(3.12) In (2.3) hatten wir den Begriff „parallel verschieben“ verwendet, ohne dies genauer zu erläutern. Wenn man analysiert, was - etwa in Figur 2.7 - „parallel verschieben von B nach C“ bedeutet, so bemerkt man, daß jede Gerade bei dieser Operation in eine dazu parallele Gerade übergeht und daß keine Fixpunkte vorhanden sind.

Lassen wir als Grenzfall auch die identische Abbildung zu, nämlich als eine Art „Nullverschiebung“, so gelangen wir zur folgenden Definition:

Eine Kollineation von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ heißt **Verschiebung** oder **Translation**, wenn sie gleich der identischen Abbildung $id_{\mathbb{P}}$ ist oder wenn sie jede Gerade in eine dazu parallele Gerade überführt und keine Fixpunkte besitzt.

In der folgenden Aussage sind bereits einige grundlegende Eigenschaften von Translationen zusammengefaßt:

(3.13) **Satz**. *Ist τ eine Translation $\neq id_{\mathbb{P}}$, so gilt:*
(1) τ^{-1} ist eine Translation.
(2) Ist $X \in \mathbb{P}$, so ist $<X, \tau(X)>$ eine Fixgerade von τ.
(3) Die Fixgeraden von τ bilden ein Parallelbüschel, genannt **Richtung** *von τ.*
(4) Ist (A, B, C, D) ein Parallelogramm mit $B = \tau(A)$, so ist $C = \tau(D)$.
(5) Es gilt $\{X, \tau(X)\} \equiv \{Y, \tau(Y)\} \;\; \forall \; X, Y \in \mathbb{P}$.
(6) Ist σ eine Translation und gibt es ein $A \in \mathbb{P}$ mit $\sigma(A) = \tau(A)$, so ist $\sigma = \tau$.

Beweis: (1) folgt direkt aus der Definition der Translationen.
(2) folgt aus $\tau(X) \in \tau(<X, \tau(X)>) \parallel <X, \tau(X)> \ni \tau(X)$.
(3) Da τ keinen Fixpunkt hat, schneiden sich keine zwei der Fixgeraden von τ. Die Fixgeraden bilden also ein Parallelbüschel, denn nach (2) liegt jeder Punkt auf einer Fixgeraden.
(4) Nach (2) und (3) sind $<A, B>$ und $<C, D>$ Fixgeraden von τ, d.h. es ist $\tau(D) \in <C, D>$. Andererseits ist $\tau(D) \in \tau(<A, D>) = (\tau(A) \parallel <A, D>) = <B, C>$, und folglich ist $\tau(D) = <C, D> \cap <B, C> = = C$.
(5) a) Ist $Y \notin <X, \tau(X)>$, so ist $(X, \tau(X), \tau(Y), Y)$ nach (4) ein Parallelogramm, und dann führt (K) auf die Behauptung.
b) Ist $Y \in <X, \tau(X)>$, so wählen wir ein $Z \in \mathbb{P} \backslash <X, \tau(X)>$, und wegen $<X, \tau(X)> = <Y, \tau(Y)>$ führt a) dann auf $\{X, \tau(X)\} \equiv \{Z, \tau(Z)\} \equiv \equiv \{Y, \tau(Y)\}$.
(6) Es sei $B := \sigma(A) = \tau(A)$ und $g := <A, B>$. Ist $X \in \mathbb{P} \backslash g$, so sind $(X, A, B, \sigma(X))$ und $(X, A, B, \tau(X))$ nach (4) Parallelogramme, und mit (3.3) erhalten wir dann $\sigma(X) = \tau(X)$. Entsprechend sind auch $(Y, X, \sigma(X), \sigma(Y))$ und $(Y, X, \tau(X), \tau(Y))$ für $Y \in g \;\wedge\; X \in \mathbb{P} \backslash g$ Parallelogramme, und mit $\sigma(X) = \tau(X)$ und (3.3) folgt $\sigma(Y) = \tau(Y)$. Damit ist $\sigma = \tau$ bewiesen. $\square$

Download free eBooks at bookboon.com

Der folgende Satz zeigt, daß zwischen Translationen und Punktspiegelungen ein enger Zusammenhang besteht:

(3.14) **Darstellung von Translationen durch Punktspiegelungen**.
Jedes Produkt von zwei Punktspiegelungen ist eine Translation. Jede Translation ist ein Produkt von zwei Punktspiegelungen, also eine Bewegung. Ist $\{A, B\} \in P_2$, *so ist* $<A, B> \parallel$ *die Richtung von* $\widetilde{A} \circ \widetilde{B}$, *und es gilt* $(\widetilde{A} \circ \widetilde{B})(B) = B^A$.

Beweis: a) Es seien $A, B \in \mathbb{P}$. Existiert ein $X \in \mathbb{P}$ mit $\widetilde{A} \circ \widetilde{B}(X) = X$, so ist $\widetilde{B}(X) = \widetilde{A}(X)$, und dann ist A wie auch B nach (3.9) die Mitte von

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

$\{X, \widetilde{A}(X)\} = \{X, \widetilde{B}(X)\}$, also $A = B$. Demnach hat $\widetilde{A} \circ \widetilde{B}$ im Falle $A \neq B$ keinen Fixpunkt. Wegen $\widetilde{A} \circ \widetilde{A} = id_{\mathbb{P}}$ und $g \parallel \widetilde{B}(g) \parallel \widetilde{A}(\widetilde{B}(g)) \ \forall\ g \in \mathbb{G}$ bedeutet dies aber, daß $\widetilde{A} \circ \widetilde{B}$ eine Translation ist. Offenbar ist $(\widetilde{A} \circ \widetilde{B})(B) = \widetilde{A}(B) = B^A$, und im Falle $A \neq B$ ist $<A, B> = <B, B^A>$ nach (3.13)(2) dann eine Fixgerade von $\widetilde{A} \circ \widetilde{B}$.

b) Gegeben sei eine beliebige Translation τ. Ist nun $U \in \mathbb{P}$ und ist M die Mitte von $\{U, \tau(U)\}$, so ist $\widetilde{M} \circ \widetilde{U}$ nach a) eine Translation mit $\widetilde{M} \circ \widetilde{U}(U) = \widetilde{M}(U) = \tau(U)$, und mit (3.13) (6) ergibt sich dann $\widetilde{M} \circ \widetilde{U} = \tau$. □

Als Corollar zu (3.13) und (3.14) erhalten wir die wichtige Aussage

(3.15) **Transitivität der Translationen**. *Sind $A, B \in \mathbb{P}$, so existiert genau eine Translation, die A in B überführt. Diese wird mit $\tau_{A,B}$ bezeichnet. Ist M die Mitte von $\{A, B\}$, so ist $\tau_{A,B} = \widetilde{M} \circ \widetilde{A}$.*

Beweis: Wegen $\widetilde{M} \circ \widetilde{A}(A) = \widetilde{M}(A) = B$ ist $\widetilde{M} \circ \widetilde{A}$ nach (3.14) eine Translation, die A in B überführt, und nach (3.13)(6) gibt es keine weitere solche Translation. □

Weiter erhalten wir

(3.16) **Satz**. *Sind $A, B, C \in \mathbb{P}$, so ist $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C}$ eine Punktspiegelung an einem Punkt D, und es gilt $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} = \widetilde{C} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{A}$. Hierbei ist (A, B, C, D) ein Parallelogramm, wenn A, B, C nichtkollinear sind.*

Beweis: a) Ist D die Mitte von $\{C, \widetilde{A} \circ \widetilde{B}(C)\}$, so ist $\widetilde{D} \circ \widetilde{C}(C) = \widetilde{D}(C) = \widetilde{A} \circ \widetilde{B}(C)$, und nach (3.14) und (3.13)(6) bedeutet dies $\widetilde{D} \circ \widetilde{C} = \widetilde{A} \circ \widetilde{B}$, also $\widetilde{D} = \widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C}$. Wegen $\widetilde{D} = \widetilde{D}^{-1}$ ist $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} = \widetilde{C} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{A}$.

b) Sind A, B, C nichtkollinear, so führt (3.14) wegen $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} = \widetilde{D} \circ \widetilde{C}$ auf $<A, B> \parallel \ = <C, D> \parallel$ und wegen $\widetilde{B} \circ \widetilde{C} = \widetilde{A} \circ \widetilde{D}$ auf $<B, C> \parallel \ = <A, D> \parallel$, d. h. (A, B, C, D) ist ein Parallelogramm. □

Mit Hilfe der vorangegangenen Aussagen ergibt sich nun

(3.17) **Satz**. *Ist $\widetilde{\mathbb{P}}$ die Menge der Punktspiegelungen und ist $\mathfrak{T}$ die Menge der Translationen, so sind $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T} \cup \widetilde{\mathbb{P}}$ Normalteiler von $\mathfrak{B}_{\equiv}(\circ)$ und von $\Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{G})(\circ)$. Ferner ist $\mathfrak{T}$ ein abelscher Normalteiler von $(\mathfrak{T} \cup \widetilde{\mathbb{P}})(\circ)$ mit $\widetilde{\mathbb{P}}$ als einziger echter Nebenklasse, und es gilt*

$$\widetilde{\varphi(A)} = \varphi \circ \widetilde{A} \circ \varphi^{-1} \ \ \forall\ (A, \varphi) \in \mathbb{P} \times \Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{G}).$$

Download free eBooks at bookboon.com

Beweis: 1) Sind σ, τ Translationen, so gibt es nach (3.14) Punkte A, B, C, E mit $\sigma = \widetilde{A} \circ \widetilde{B}$ und $\tau = \widetilde{C} \circ \widetilde{E}$. Nach (3.16) ist $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} \in \widetilde{\mathbb{P}}$, und folglich ist $\sigma \circ \tau = (\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C}) \circ \widetilde{E}$ gemäß (3.14) eine Translation. Ferner führt (3.16) auf $\sigma \circ \tau = (\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C}) \circ \widetilde{E} = (\widetilde{C} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{A}) \circ \widetilde{E} = \widetilde{C} \circ (\widetilde{B} \circ \widetilde{A} \circ \widetilde{E}) = \widetilde{C} \circ (\widetilde{E} \circ \widetilde{A} \circ \widetilde{B}) = \tau \circ \sigma$, und dies bedeutet in Verbindung mit (3.7)(6), (3.13)(1) und (3.14), daß $\mathfrak{T}$ eine abelsche Untergruppe von $\mathfrak{B}_{\equiv}(\circ)$ ist.

2) Wegen (3.7), (3.14) und (3.16) ist $\mathfrak{T} \cup \widetilde{\mathbb{P}}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{B}_{\equiv}(\circ)$. Ist $A \in \mathbb{P}$, so führen (3.14) und (3.16) auf $\widetilde{A} \circ \mathfrak{T} \subseteq \widetilde{\mathbb{P}}$, und wegen $\widetilde{A} \circ (\widetilde{A} \circ \widetilde{X}) = \widetilde{X} \ \ \forall\, X \in \mathbb{P}$ und (3.14) gilt sogar $\widetilde{A} \circ \mathfrak{T} = \widetilde{\mathbb{P}}$.
Da keine Translation, aber jede Punktspiegelung genau einen Fixpunkt hat, ist $\mathfrak{T} \cap \widetilde{\mathbb{P}} = \varnothing$, und folglich ist $\widetilde{\mathbb{P}} = \widetilde{A} \circ \mathfrak{T}$ die einzige echte Nebenklasse der Untergruppe $\mathfrak{T}$ in $(\mathfrak{T} \cup \widetilde{\mathbb{P}})(\circ)$.

3) Es seien $A, X \in \mathbb{P}$ und $\varphi \in \Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{G})$. Da A die Mitte von X und $\widetilde{A}(X)$ ist, ist $\varphi(A)$ nach (3.11) die Mitte von $\varphi(X)$ und $\varphi(\widetilde{A}(X))$, d. h. es ist $\widetilde{\varphi(A)}(\varphi(X)) = \varphi(\widetilde{A}(X))$ und deshalb $\widetilde{\varphi(A)} \circ \varphi(X) = \varphi \circ \widetilde{A}(X)$. Da X beliebig gewählt war, bedeutet dies $\widetilde{\varphi(A)} \circ \varphi = \varphi \circ \widetilde{A}$, und mithin ist $\widetilde{\varphi(A)} = \varphi \circ \widetilde{A} \circ \varphi^{-1}$.

4) Es sei $\varphi \in \Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{G})$. Sind $A, B \in \mathbb{P}$, so führen 3) und (3.14) auf $\varphi \circ (\widetilde{A} \circ \widetilde{B}) \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ \widetilde{A} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \widetilde{B} \circ \varphi^{-1}) = \widetilde{\varphi(A)} \circ \widetilde{\varphi(B)} \in \mathfrak{T}$. Mit 3) und (3.14) erhalten wir demnach $\varphi \circ \widetilde{\mathbb{P}} \circ \varphi^{-1} \subseteq \widetilde{\mathbb{P}}$ und $\varphi \circ \mathfrak{T} \circ \varphi^{-1} \subseteq \mathfrak{T}$, und damit sind die Normalteilereigenschaften nachgewiesen. □

E. Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sollen für $(\mathbb{P}, \equiv)$ allein unter Verwendung der Axiome (V), (P), (K), (Z) und der Resultate aus §3 gelöst werden.

A 3.1. a) Auf jeder Geraden liegen wenigstens drei Punkte.
b) Jedes Parallelbüschel besteht aus wenigstens drei Geraden.
c) Durch jeden Punkt gehen wenigstens vier Geraden.
d) Es ist $|\mathbb{P}| \geq 9$ und $|\mathbb{G}| \geq 12$.

A 3.2. a) In $(\mathbb{P}, \equiv)$ gilt die folgende *Parallelogrammbedingung*:

(G) Ist (A, B, C, D) ein echtes Viereck mit $<A, B> \parallel <C, D>$, so ist
$<A, D> \parallel <B, C> \ \Leftrightarrow \ \{A, B\} \equiv \{C, D\} \wedge <A, C> \nparallel <B, D>$.

Download free eBooks at bookboon.com

b) Unter Voraussetzung von (V), (P) können die Axiome (K), (Z) durch die (allerdings nicht ganz so anschauliche) Bedingung (G) ersetzt werden, d. h. es ist [(V),(P),(K),(Z)] äquivalent zu [(V),(P),(G)].
(Zum Beweis ist wegen a) nur zu zeigen, daß in der affinen Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ aus der Gültigkeit von (G) die Gültigkeit von (Z) folgt, denn die Aussage [(G) $\Rightarrow$ (K)] ist trivial).

A 3.3. a) Sind $A, X \in \mathbb{P}$ und ist $Y = \widetilde{A}(X)$, so ist $\widetilde{Y} = \widetilde{A} \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{A}$.
b) Sind $A, B \in \mathbb{P}$ mit $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} = \widetilde{B} \circ \widetilde{A}$, so ist $A = B$.
c) $(\mathfrak{T} \cup \widetilde{\mathbb{P}})(\circ)$ ist eine nichtabelsche Gruppe.
d) Sind $\{A, B\}, \{C, D\} \in \mathbb{P}_2$ mit $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} = \widetilde{C} \circ \widetilde{D}$,
so gilt $<A, B> \parallel <C, D>$ und $\{A, B\} \equiv \{C, D\}$.

A 3.4. Ist g eine Gerade, so bilden die Translationen, die g festlassen, einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{T}_g$ von $\mathfrak{T}(\circ)$.

A 3.5. Sind g, h zwei nichtparallele Geraden, so ist $\mathfrak{T}(\circ)$ das direkte Produkt der Normalteiler $\mathfrak{T}_g$ und $\mathfrak{T}_h$, d. h. es gilt
(*) Zu jedem $\tau \in \mathfrak{T}$ gibt es genau ein Paar $(\tau', \tau'') \in \mathfrak{T}_g \times \mathfrak{T}_h$ mit $\tau = \tau' \circ \tau''$.
Dagegen ist $\mathfrak{T}_g = \mathfrak{T}_h \neq \mathfrak{T}$, falls g und h parallel sind.

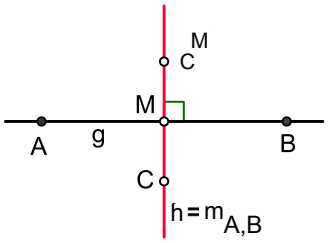
Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

4 Orthogonalität

Im folgenden wollen wir in der normalen euklidischen Ebene $(\mathbb{P}, \equiv)$ eine Orthogonalitätsrelation einführen und die grundlegenden Eigenschaften dieser Relation beweisen. Wir übernehmen alle Bezeichnungen aus §2 und §3.

A. Definition und Grundeigenschaften



Figur 4.1

(4.1) Die Geraden $g, h \in \mathbb{G}$ heißen **orthogonal** oder **senkrecht** zueinander, in Zeichen: $g \perp h$, wenn es $A, B \in g$ mit $A \neq B$ gibt, so daß $h = m_{A,B}$ ist. Die Negation von $g \perp h$ notieren wir als $g \not\perp h$.
Nach (3.8) schneiden sich orthogonale Geraden von $(\mathbb{P}, \equiv)$ stets. Ferner gilt
$(*) \quad g, h \in \mathbb{G} \wedge g \perp h \;\Rightarrow\; h \perp g,$
d. h. die *Orthogonalitätsrelation* $\perp$ ist *symmetrisch.*

Zum *Beweis* von $(*)$ setzen wir $M = g \cap h$ und wählen ein $C \in h \backslash M$ (Figur 4.1). Wegen $h = m_{A,B}$ mit $A, B \in g \backslash M$ und wegen $A = B^M$ führt (3.7) (6) auf $CA \equiv BC \equiv B^M C^M \equiv AC^M$, d. h. es ist $A \in m_{C,C^M}$ und damit $g = m_{C,C^M}$. Wegen $h = <C, C^M>$ bedeutet dies aber $h \perp g$. □

Die folgende Aussage zeigt, daß die Orthogonalität bei Automorphismen erhalten bleibt, daß Automorphismen und Bewegungen also *orthogonalitätstreu* sind:

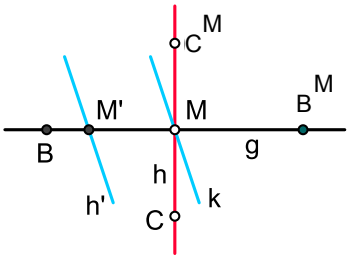
(4.2) **Satz**. *Ist* $\varphi \in Aut(P, \equiv)(\circ)$ *und sind* $g, h \in \mathbb{G}$, *so gilt*
$g \perp h \;\Leftrightarrow\; \varphi(g) \perp \varphi(h)$.

Der *Beweis* ergibt mich direkt aus (2.5)(2), (4). □

Durch die folgende Aussage wird deutlich, daß die Orthogonalitätsrelation mit der Parallelitätsrelation verträglich ist:

(4.3) **Satz**. *Sind* $g, g', h, h' \in \mathbb{G}$ *mit* $g \perp h$, *so gilt:*
(1) Aus $h \parallel h'$ *folgt* $g \perp h'$.
(2) Aus $g \perp h'$ *folgt* $h \parallel h'$.
(3) Es ist $\{k \in \mathbb{G} \mid g \perp k\} = h \parallel$, *d. h. die zu* g *senkrechten Geraden bilden ein Parallelbüschel.*
(4) Aus $g \parallel g'$ *und* $h \parallel h'$ *folgt* $g' \perp h'$.
(5) Aus $g \parallel g'$ *und* $g' \perp h'$ *folgt* $h \parallel h'$.

Download free eBooks at bookboon.com



Figur 4.2

Beweis: Es sei $M := g \cap h$. (1) Wegen $h' \parallel h$ existiert $M' := g \cap h'$ (vgl. (3.2)), und nach (4.2) ist dann $g = \tau_{M,M'}(g) \perp \tau_{M,M'}(h) = h'$, da $\tau_{M,M'}$ nach (3.14) eine Bewegung ist.
(2) Es sei $k := (M \parallel h')$. Nach (1) ist $g \perp k$, d. h. es gibt ein $B \in g \backslash M$ mit $k = m_{B,B^M}$ (Figur 4.2). Wegen $h \perp g$ (vgl. (4.1)) gibt es ein $C \in h \backslash M$ mit $g = m_{C,C^M}$. Dann gilt $B \in m_{C,C^M}$, also auch $BC \equiv C^M B \equiv CB^M$, da $\widetilde{M}$ nach (3.7)(6) eine Bewegung ist. Demnach ist $C \in m_{B,B^M} = k$, d. h. es ist $h = <M, C> = k$ und damit $h \parallel h'$.
(3), (4), (5) folgen direkt aus (4.1), (1) und (2). □

(4.4) **Corollar**. *Zu jedem Punkt A und jeder Geraden g gibt es genau eine Gerade h mit $h \ni A \wedge h \perp g$. Man nennt h das* **Lot** *von A auf g oder die* **Senkrechte** *zu g durch A und notiert h auch in der Form $(A \perp g)$. (Lote werden „gefällt“, Senkrechte werden „errichtet“.)*

Der nach (4.1) eindeutig existierende Schnittpunkt von g mit $(A \perp g)$ wird der **Fußpunkt** des Lotes von A auf g genannt. Im Falle $A \in g$ ist dieser mit A identisch.

Der *Beweis* von (4.4) ergibt sich unmittelbar aus (4.3)(3) und aus (P_+). □

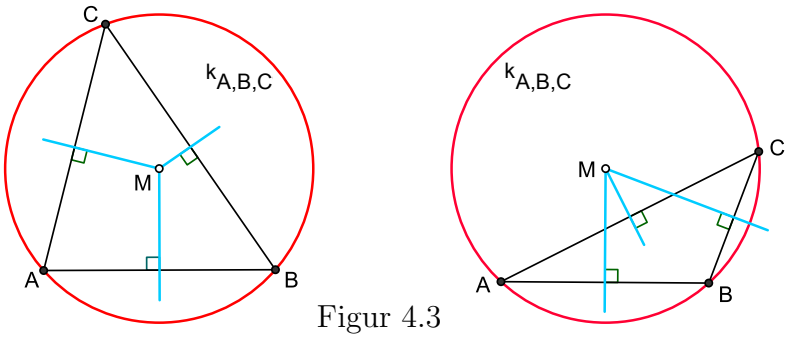
B. Mittelsenkrechten und Höhen im Dreieck

(4.5) Wir sind nun bereits in der Lage, die ersten beiden Schnittpunktsätze für Dreiecke zu beweisen. Dabei verstehen wir unter einem **Dreieck** eine Teilmenge von $\mathbb{P}$, die aus drei nichtkollinearen Punkten besteht. Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so werden A, B, C die **Ecken**, $\{A, B\}$, $\{B, C\}, \{C, A\}$ die **Seiten** und $<A, B>, <B, C>, <C, A>$ die **Seitengeraden** dieses Dreiecks genannt. Die Seiten und die Seitengeraden sind jeweils paarweise verschieden.

Gelegentlich wird es uns bei Dreiecken auf die Reihenfolge der Ecken ankommen. Statt des Dreiecks $\{A, B, C\}$ betrachten wir dann das geordnete Tripel (A, B, C) und nennen dies ein **geordnetes Dreieck**. Wir zeigen nun

Download free eBooks at bookboon.com

(4.6) **Satz vom Mittelsenkrechtenschnittpunkt.**
Ist $\{A, B, C\}$ *ein Dreieck, so schneiden sich die* **Mittelsenkrechten** $m_{A,B}, m_{B,C}, m_{C,A}$ *dieses Dreiecks in einem Punkt* M*, dem* **Mittelsenkrechtenschnittpunkt** *von* $\{A, B, C\}$*.*
M *ist der eindeutig bestimmte Mittelpunkt des eindeutig bestimmten Kreises, der* A, B, C *enthält und der als der* **Umkreis** $k(A, B, C)$ *von* $\{A, B, C\}$ *bezeichnet wird (Figur 4.3).*



Figur 4.3

Beweis: 1. Wäre $m_{A,B} \parallel m_{B,C}$, so würde $m_{A,B} \perp <A, B> \wedge m_{B,C} \perp <B, C>$ mit (4.3)(5) auf $<A, B> \parallel <B, C>$ führen, und dann wäre $\{A, B, C\}$ kein

Download free eBooks at bookboon.com

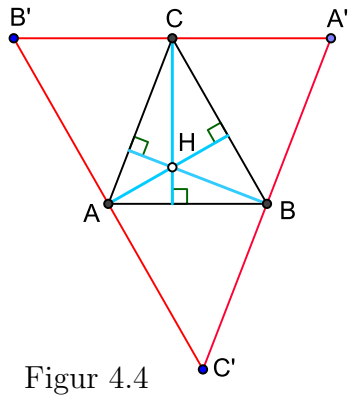
Click on the ad to read more

Dreieck. Folglich schneiden sich $m_{A,B}$ und $m_{B,C}$ in einem Punkt M, und dann ist $AM \equiv MB$ und $MB \equiv MC$. Daraus ergibt sich aber $AM \equiv \equiv MC$, also $M \in m_{C,A}$ und $A, B, C \in k_{M;A}$.

2. Ist k ein Kreis durch A, B, C mit dem Mittelpunkt M', so ist $AM' \equiv \equiv BM' \equiv CM'$, also $M' \in m_{A,B} \cap m_{B,C} = \{M\}$ und damit $k = k_{M';A} = = k_{M;A}$. □

Unter Verwendung von (4.6) erhalten wir

(4.7) **Satz vom Höhenschnittpunkt**.
Ist $\{A, B, C\}$ *ein Dreieck, so schneiden sich die* **Höhen** $h_A := (A \perp <B, C>), h_B := (B \perp <C, A>), h_C := (C \perp <A, B>)$ *dieses Dreiecks in einem Punkt* H*, dem* **Höhenschnittpunkt** *von* $\{A, B, C\}$.



Figur 4.4

Beweis: Nach (3.3) gibt es eindeutig bestimmte Punkte A', B', C' derart, daß $(A, B, C, B'), (C, A, B, A')$ und (B, C, A, C') Parallelogramme sind (Figur 4.4). Nach (3.10) ist $<B, B'> \nparallel <A, C> \parallel <B, C'>$, also $B' \neq C'$, und ebenso folgt $B' \neq A' \neq C'$. Mit (K) erhalten wir $AB' \equiv BC \equiv AC' \wedge BC' \equiv AC \equiv BA' \wedge CA' \equiv AB \equiv CB'$, und mit $<B', C'> \parallel <B, C> \wedge <C', A'> \parallel <C, A> \wedge <A', B'> \parallel <A, B>$ führt (4.3)(1) dann auf $m_{B',C'} = h_A \wedge m_{C',A'} = h_B \wedge m_{A',B'} = h_C$. Hieraus folgt mit (4.6), bezogen auf A', B', C', die Behauptung. □

C. Elementare Konstruktionen

(4.8) Ein besonderer Reiz der zwei zuletzt bewiesenen Sätze liegt darin, daß man sie zeichnerisch bestätigen kann. Durch das Zeichnen gewinnt man eine besondere Vertrautheit mit einem solchen Satz, und so ist es klar, daß man von dieser Möglichkeit auch im Schulunterricht Gebrauch machen wird.

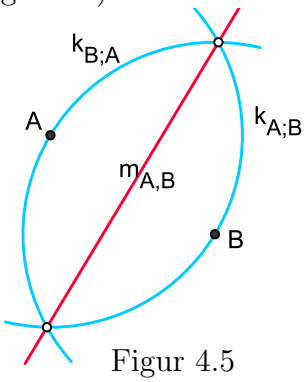
In der Anschauungsebene setzt man die „klassischen“ Hilfsmittel Lineal und Zirkel wie folgt ein:

a) Konstruktion der Mittelsenkrechten von $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$:
Man verbindet die Schnittpunkte von $k_{B;A}$ und $k_{A;B}$ (Figur 4.5).

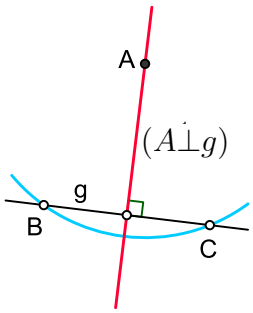
Download free eBooks at bookboon.com

b) Fällen des Lotes von $A \in \mathbb{P}$ auf $g \in \mathbb{G}$:
Man zeichnet einen Kreis mit A als Mittelpunkt, der g in zwei verschiedenen Punkten B, C trifft. Dann ist $(A \perp g) = m_{B,C}$ nach a) konstruierbar (Figur 4.6).

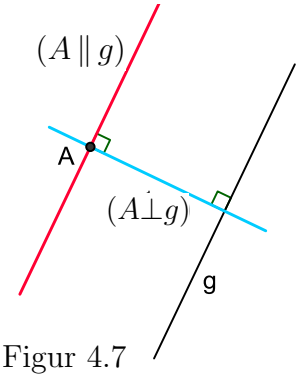
c) Konstruktion der Parallelen zu $g \in \mathbb{G}$ durch $A \in \mathbb{P} \backslash g$:
Nach b) bestimmt man zunächst $(A \perp g)$ und dann $(A \parallel g) = (A \perp (A \perp g))$ (Figur 4.7).



Figur 4.5

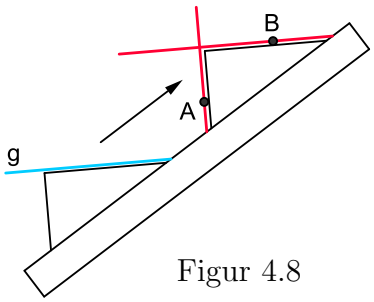


Figur 4.6



Figur 4.7

Das Zeichnen von Parallelen und Senkrechten vereinfacht sich wesentlich, wenn man entweder ein Geodreieck oder ein Lineal und ein rechtwinkliges Dreieck verwendet. Im zweiten Fall nutzt man aus, daß man durch Verschieben des Dreiecks längs der Kante des (festzuhaltenden) Lineals zu einer vorgegebenen Geraden g durch jeden Punkt A bzw. B eine Senkrechte bzw. Parallele legen kann (Figur 4.8).



Figur 4.8

D. Der Satz des Thales

Die im Beweis von (4.7) aufgetretenen Parallelitäten stehen im Einklang mit dem folgenden *Spezialfall des ersten Strahlensatzes* (Figur 4.9 a)):

(4.9) **Satz**. *Ist* $\{A, B, X\}$ *ein Dreieck und ist* M *bzw.* U *die Mitte von* $\{A, B\}$ *bzw.* $\{A, X\}$, *so ist* $M \neq U$ *und* $<M, U> \parallel <B, X>$.

Beweis: Wegen $A^M = B \neq X = A^U$ ist $M \neq U$, und nach (3.14) ist $\widetilde{U} \circ \widetilde{M}$ eine Translation $\neq id_{\mathbb{P}}$ mit der Richtung $<M, U> \parallel$. Da $<B, X>$ wegen $\widetilde{U} \circ \widetilde{M}(B) = X$ und (3.13)(2) zu $<M, U> \parallel$ gehört, ist $<M, U> \parallel <B, X>$. $\square$

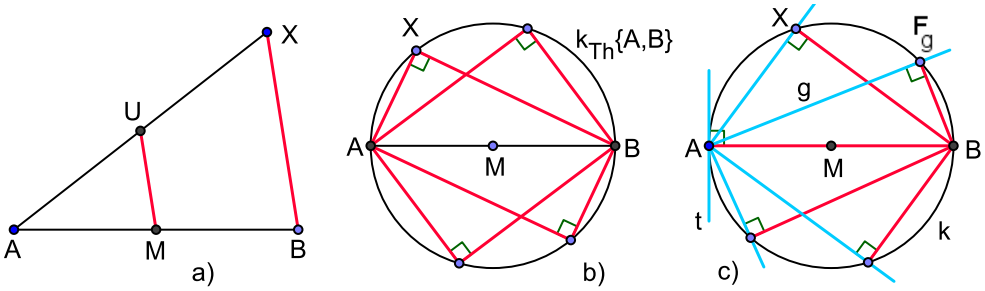
Download free eBooks at bookboon.com

Unter Verwendung von Eigenschaften der Orthogonalitätsrelation können wir nun auch bereits einige Grundeigenschaften von Kreisen herleiten. Dazu setzen wir fest:

Ist $\{A,B\} \in \mathbb{P}_2$ und ist M die Mitte von $\{A,B\}$, so heißt $k_{Th}\{A,B\} := = k_{M;A} = k_{M;B}$ der **Thaleskreis** über $\{A,B\}$. Diese Bezeichnung wird nahegelegt durch

(4.10) **Satz des Thales**. *Ist* $\{A,B\} \in \mathbb{P}_2$ *und ist* $X \in \mathbb{P}\backslash\{A,B\}$, *so ist* $X \in k_{Th}\{A,B\} \Leftrightarrow <A,X> \perp <X,B>$ *(Figur 4.9 b)).*

Beweis: Ist M bzw. U die Mitte von $\{A,B\}$ bzw. $\{A,X\}$ (Figur 4.9 a)), so führen (4.3) und (4.9) mit $<A,X> \perp m_{A,X} \ni U$ auf $X \in k_{Th}\{A,B\} \Leftrightarrow AM \equiv MX \Leftrightarrow m_{A,X} \ni M \Leftrightarrow <A,X> \perp <U,M> \Leftrightarrow <A,X> \perp <X,B>$. □



Figur 4.9

(4.11) **Corollar 1**. *Es sei* $\{A,B\} \in \mathbb{P}_2$. *Der Thaleskreis* $k = k_{Th}\{A,B\}$ *besteht aus den Fußpunkten der Lote von* B *auf die Geraden durch* A. *Für* $t := (A \perp <A,B>)$ *gilt* $t \cap k = \{A\}$, *und für* $g \in \mathbb{G}\backslash\{t\}$ *mit* $g \ni A$ *ist* $|g \cap k| = 2$ *(Figur 4.9 c)).*

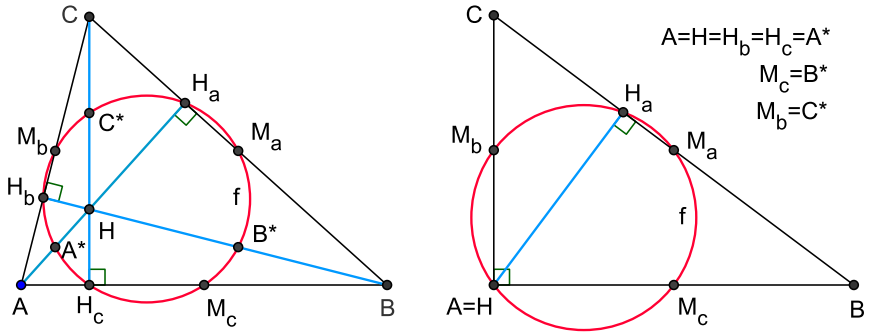
Beweis: Für $g \in \mathbb{G}$ mit $g \ni A$ sei F_g der Fußpunkt des Lotes von B auf g. Dann ist $F_{<A,B>} = B \wedge F_{(A \perp <A,B>)} = A$, und für $X \in \mathbb{P}\backslash\{A,B\}$ führt (4.10) auf $X \in k_{Th}\{A,B\} \Leftrightarrow <A,X> \perp <X,B> \Leftrightarrow X = F_{<A,X>}$. □

(4.12) **Corollar 2**. *Ist* k *ein Kreis von* $(\mathbb{P},\equiv)$ *mit Mittelpunkt* M, *so gilt:*

(1) Für jedes $A \in k$ *ist* k *der Thaleskreis über* $\{A, A^M\}$.
(2) Ist $A \in k$, *so gibt es genau eine Gerade* t *mit* $t \cap k = A$, *nämlich* $t := (A \perp <A,M>)$. *Man nennt* t *die* **Tangente** *von* k *in* A.
(3) Es ist $|k| = |h| + 1 \geq 4 \quad \forall\ h \in \mathbb{G}$.
(4) Für jedes $g \in \mathbb{G}$ *ist* $|g \cap k| \leq 2$.
(5) Sind $A, D \in k$ *mit* $A \neq D$, *so ist* $M \in m_{A,D}$.
(6) Sind $M', A \in \mathbb{P}$ *mit* $k = k_{M';A}$, *so ist* $M' = M$.

Download free eBooks at bookboon.com

Beweis: (1) Es sei $k = k_{M;U}$. Ist $A \in k$ und $X \in \mathbb{P}$, so ist $[X \in k_{M;U} \Leftrightarrow MX \equiv MU \equiv MA \Leftrightarrow X \in k_{M;A}]$, also $k = k_{M;A} = k_{Th}\{A, A^M\}$.
(2), (3), (4) ergeben sich in Verbindung mit (3.2)(3) und (3.9) aus (4.11), denn ist $g \in \mathbb{G}$ mit $g \cap k \neq \varnothing$, so gibt es ein $A \in g \cap k$, und für $h := (A^M \perp <A, A^M>)$ ist $\alpha : h \to k\backslash\{A\} : R \to <A, R> \cap (A^M \perp <A, R>)$ nach (4.11) eine Bijektion, d.h. es ist $|k\backslash\{A\}| = |h| \geq 3$.
(5) folgt unmittelbar aus $AM \equiv DM$.
(6) Nach (3) gibt es in k drei paarweise verschiedene Punkte, und diese sind nach (4) nichtkollinear. Mit (5) und (4.6) folgt dann $M = M'$. □



Figur 4.10

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

(4.13) Gegeben sei ein Dreieck $\{A, B, C\}$.
Die Mitte von $\{B, C\}$ bzw. $\{C, A\}$ bzw. $\{A, B\}$ sei M_a bzw. M_b bzw. M_c (vgl.(3.9)). Wir nennen M_a, M_b, M_c die **Seitenmitten** von $\{A, B, C\}$.
Es ist $<A, B> \| <M_a, M_b>, <B, C> \| <M_b, M_c>, <C, A> \| <M_c, M_a>$ gemäß (4.9), und insbesondere ist $\{M_a, M_b, M_c\}$ dann ein Dreieck, genannt **Seitenmittendreieck** von $\{A, B, C\}$ (vgl. Figur 4.10).
Der Kreis $f := k(M_a, M_b, M_c)$ (vgl. (4.6)) heißt **Seitenmittenkreis** oder **Feuerbachkreis** von $\{A, B, C\}$; sein Mittelpunkt wird mit F bezeichnet.

Die Lote h_A, h_B, h_C von den Ecken auf die gegenüberliegenden Seitengeraden von $\{A, B, C\}$ schneiden sich nach (4.7) im Höhenschnittpunkt H; sie haben die Fußpunkte $H_a := h_A \cap <B, C>, H_b := h_B \cap <C, A>$ und $H_c := h_C \cap <A, B>$ (vgl. Figur 4.10).

Die Mitte von $\{H, A\}$ bzw. $\{H, B\}$ bzw. $\{H, C\}$ sei A^* bzw. B^* bzw. C^*. Wir nennen A^*, B^*, C^* die **oberen Höhenmitten** von $\{A, B, C\}$.

Mit diesen Bezeichnungen und unter Verwendung von (4.9) - (4.12) erhalten wir

(4.14) **Satz über den Feuerbachkreis.** *Auf dem Feuerbachkreis f des Dreiecks $\{A, B, C\}$ liegen die Punkte $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, A^*, B^*, C^*$. Überdies ist $f = k_{Th}\{A^*, M_a\} = k_{Th}\{B^*, M_b\} = k_{Th}\{C^*, M_c\}$.*

Der Kreis f wird auch **Neunpunktekreis** *genannt. Einige der genannten Punkte können zusammenfallen (vgl. Figur 4.10).*

Beweis: Ist $A^* \neq M_b$, so ist $<A^*, M_b> \| <C, H> = h_c$ gemäß (4.9) mit $h_c \perp <A, B> \| <M_a, M_b>$, d.h. es ist $<A^*, M_b> \perp <M_b, M_a> \wedge A^* \neq M_a$. Mithin gilt stets $M_b \in k_{Th}\{A^*, M_a\}$, und analog folgt $M_c \in k_{Th}\{A^*, M_a\}$. Weiter ist dann $H_a \in k_{Th}\{A^*, M_a\} = k(M_a, M_b, M_c) = f$. Analog ergibt sich $B^*, H_b \in k_{Th}\{B^*, M_b\} = f$ und $C^*, H_c \in k_{Th}\{C^*, M_c\} = f$. □

E. Geraden und Kreise

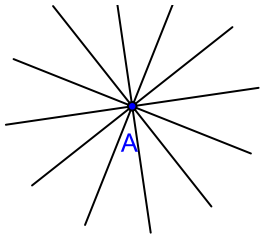
(4.15) Ist g eine Gerade und ist k ein Kreis, so heißt g
im Falle $|g \cap k| = 0$ eine **Passante** bzgl. k,
im Falle $|g \cap k| = 1$ eine **Tangente** von (oder an) k (vgl. (4.11)) und
im Falle $|g \cap k| = 2$ eine **Sekante** von k (vgl. (4.12)(4)).
Im Falle $g \cap k = A$ mit $A \in \mathbb{P}$ wird A auch der **Berührpunkt** von g und k genannt, und man sagt, g und k **berühren** sich in A.

Nach (4.12)(2) besitzt jeder Kreis k in jedem Punkt A von k genau eine Tangente t. Ist hierbei M der Mittelpunkt von k - nach (4.12)(6) besitzt k genau einen Mittelpunkt -, so zeigt (4.12)(2), daß t auf $<A, M>$ senkrecht steht, wenn sich t und k in A berühren.

Nach (4.6) geht durch drei nichtkollineare Punkte stets genau ein Kreis, und nach (4.12)(4) sind drei verschiedene Punkte eines Kreises stets nichtkollinear.

Download free eBooks at bookboon.com

(4.16) Ist $A \in \mathbb{P}$, so wird $A^* := \{g \in \mathbb{G} \mid g \ni A\}$ (Figur 4.11) das **Sternbüschel** mit A als **Träger** oder **Trägerpunkt** genannt. Sowohl Sternbüschel als auch Parallelbüschel (vgl. (2.2)) werden als **Geradenbüschel** bezeichnet, d. h. bei Verwendung des Wortes „Geradenbüschel“ läßt man offen, ob ein Sternbüschel oder ein Parallelbüschel vorliegt.



Figur 4.11

Sind r Geraden $g_1, ..., g_r$ ($r \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$) gegeben, so bezeichnen wir diese im Falle $g_1 \cap ... \cap g_r \neq \varnothing$ als **kopunktal**. Ferner sagen wir, daß $g_1, ..., g_r$

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

im Büschel liegen, wenn sie kopunktal oder paarweise parallel sind, wenn sie also Elemente eines bestimmten Geradenbüschels sind.

(4.17) Alle Sternbüschel haben die gleiche Mächtigkeit (Anzahl der Elemente), da jedes Sternbüschel durch eine geeignete Translation bijektiv auf jedes andere Sternbüschel abgebildet werden kann.

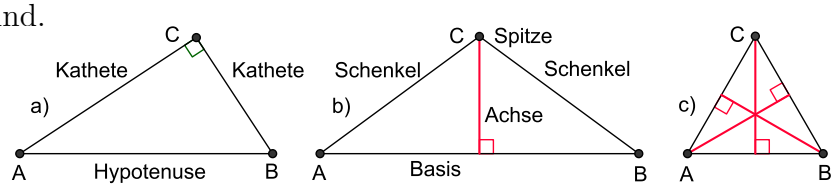
Ist g eine Gerade und ist $A \in \mathbb{P} \setminus g$ sowie $h := (A \,\|\, g)$, so ist die Zuordnung $g \to A^* \setminus \{h\} : X \to <A, X>$ eine Bijektion, d. h. es ist $|g| = |A^*| - 1$. Nach (3.2) und (3.9) gilt $|g| \geq 3 \quad \forall\, g \in \mathbb{G}$ und damit $|A^*| \geq 4 \quad \forall\, A \in \mathbb{P}$.

Die Mächtigkeit der Geraden ist zugleich auch die der Parallelbüschel, denn sind $g, h \in \mathbb{G}$ mit $g \nparallel h$, so ist $h \to g \,\|\, : X \to (X \,\|\, g)$ nach (3.2) eine Bijektion.

Nach (4.12) haben alle Kreise dieselbe Mächtigkeit wie die Sternbüschel.

F. Klassifizierung von Dreiecken und Vierecken

(4.18) Ein Dreieck heißt **rechtwinklig**, wenn zwei seiner Seitengeraden aufeinander senkrecht stehen, **gleichschenklig**, wenn zwei seiner Seiten kongruent sind, und **gleichseitig**, wenn seine sämtlichen Seiten kongruent sind.

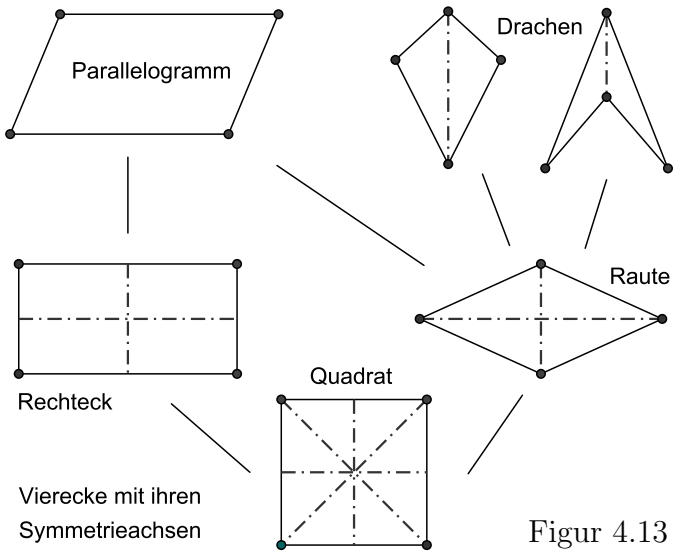


Figur 4.12 Dreiecke: a) rechtwinklig, b) gleichschenklig, c) gleichseitig

Ist $\{A, B, C\}$ rechtwinklig mit $<A, C> \perp <C, B>$, so werden $\{A, C\}$ und $\{C, B\}$ die **Katheten** und $\{A, B\}$ die **Hypotenuse** von $\{A, B, C\}$ genannt. Ist $\{A, B, C\}$ gleichschenklig mit $\{A, C\} \equiv \{C, B\}$, so werden $\{A, C\}$ und $\{C, B\}$ **Schenkel**, $\{A, B\}$ eine **Basis**, $m_{A,B}$ eine Achse und C eine Spitze von $\{A, B, C\}$ genannt (Figur 4.12).

(4.19) Ein echtes Viereck heißt **Drachen**, wenn eine seiner Diagonalen die Mittelsenkrechte von zwei seiner Ecken ist, und **Rhombus** oder **Raute**, wenn seine sämtlichen Seiten kongruent sind. Ein Parallelogramm heißt **Rechteck**, wenn zwei seiner Seitengeraden orthogonal sind. Ein Rechteck heißt **Quadrat**, wenn es eine Raute ist (Figur 4.13).

Download free eBooks at bookboon.com



Figur 4.13

G. Aufgaben

Man zeige:

A 4.1. Ein Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn der Mittelpunkt seines Umkreises auf einer der Seitengeraden liegt.

A 4.2. Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn eine seiner Ecken auf der Mittelsenkrechten der beiden übrigen Ecken liegt.

A 4.3. Das Dreieck $\{A, B, C\}$ ist genau dann gleichschenklig mit $\{A, B\}$ als Basis, wenn $(C \perp <A, B>) = m_{A,B}$ ist.

A 4.4. Die Diagonalen eines Drachens stehen stets aufeinander senkrecht. Jede Raute ist zugleich ein Drachen und ein Parallelogramm. Ein Viereck ist genau dann eine Raute, wenn jede seiner Diagonalen die Mittelsenkrechte von zwei seiner Ecken ist.

A 4.5. Ist (A, B, C, D) ein Rechteck, so gilt $<A, B> \perp <B, C> \wedge <B, C> \perp <C, D> \wedge <C, D> \perp <D, A> \wedge <D, A> \perp <A, B> \wedge AC \equiv BD$.

A 4.6. Ist (A, B, C, D) ein Parallelogramm, so ist (A, B, C, D) im Falle $<A, C> \perp <B, D>$ eine Raute und im Falle $AC \equiv BD$ ein Rechteck.

A 4.7. Sind $A, B \in \mathbb{P}$ und $g \in \mathbb{G}$ mit $A \notin g \wedge B \in g$, so existiert genau ein Kreis durch A, B, der g als Tangente hat.

A 4.8. a) Ist k ein Kreis mit Mittelpunkt M, so liegt M auf keiner Tangente von k. b) Zwei verschiedene Kreise haben höchstens zwei Punkte gemeinsam.

Download free eBooks at bookboon.com

A 4.9. Ist k ein Kreis und liegt $A \in \mathbb{P}\backslash k$ auf einer Tangente von k, so gehen durch A genau zwei Tangenten von k. Die Berührpunkte dieser Tangenten mit k liegen auf dem Thaleskreis über A und dem Mittelpunkt von k.

A 4.10. Ist φ eine Kollineation von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$, so sind äquivalent:
(1) φ ist orthogonalitätstreu, d. h. es gilt $g \perp h \Leftrightarrow \varphi(g) \perp \varphi(h) \ \forall\, g, h \in \mathbb{G}$.
(2) Es gilt $\varphi(k_{A;B}) = k_{\varphi(A);\varphi(B)} \ \forall\, AB \in \mathbb{P}_2$.
(3) φ ist kreistreu, d. h. jeder Kreis wird durch φ auf einen Kreis abgebildet.

5 Spiegelungen und Bewegungen

Wir wollen zeigen, daß in der normalen euklidischen Ebene $(\mathbb{P}, \equiv)$ an jeder Geraden g eine Spiegelung $\widetilde{g}$ existiert und daß für Spiegelungen der besonders wichtige *Dreispiegelungssatz* gilt. Ferner überlegen wir uns, daß eine Bewegung stets als Produkt von zwei oder drei Spiegelungen darstellbar ist, und erörtern, welche Typen von Bewegungen es gibt.

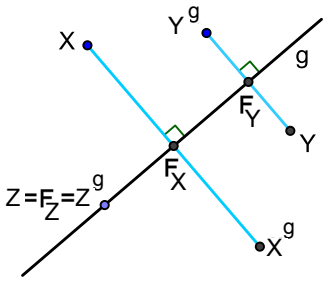
A. Existenz und Transitivität der Spiegelungen

(5.1) Gegeben sei eine Gerade $g \in \mathbb{G}$. Ist $X \in \mathbb{P}$ und ist F_X der Fußpunkt des Lotes von X auf g, so sagt man, $X^g := \widetilde{F_X}(X)$ entsteht aus X durch Spiegelung an g (Figur 5.1). Wir bezeichnen die Abbildung $\widetilde{g} : \mathbb{P} \to \mathbb{P} : X \to X^g$ als die **Geradenspiegelung** an g oder kurz als die **Spiegelung** an g.

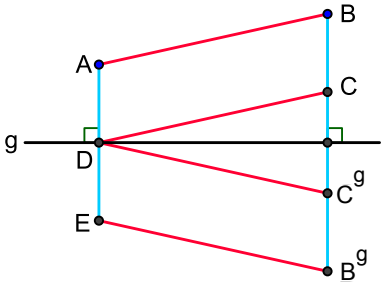
Wir zeigen

(5.2) **Grundeigenschaften der Spiegelungen**.
Für jedes $g \in \mathbb{G}$ gilt:
(1) g ist die Menge der Fixpunkte von $\widetilde{g}$.
(2) Es ist $g = m_{A,A^g} \ \forall\, A \in \mathbb{P}\backslash g$.
(3) Ist $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$ mit $m_{A,B} = g$, so ist $A^g = B$.
(4) $\widetilde{g}$ ist bijektiv mit $\widetilde{g} \circ \widetilde{g} = id_{\mathbb{P}}$ und $\widetilde{g} = \widetilde{g}^{-1}$.
(5) $\widetilde{g}$ ist eine Bewegung von $(\mathbb{P}, \equiv)$.
(6) Die Fixgeraden von $\widetilde{g}$ sind g und die zu g orthogonalen Geraden.
(7) Es gilt $\widetilde{\varphi(g)} = \varphi \circ \widetilde{g} \circ \varphi^{-1} \ \forall\, \varphi \in Aut(\mathbb{P}, \equiv)$.

Download free eBooks at bookboon.com



Figur 5.1



Figur 5.2

Beweis: a) Aus (3.7), (3.8), (4.3) und den Definitionen ergeben sich (1), (2), (3), und (4) ist gültig, da definitionsgemäß $\widetilde{g} \circ \widetilde{g} = id_{\mathbb{P}}$ ist.

b) Zum Beweis von (5) genügt es wegen (4), $AB \equiv A^g B^g \ \forall\ AB \in \mathbb{P}_2$ zu zeigen:
Im Falle $\{A,B\} \cap g \neq \varnothing \vee <A,B> \perp g$ folgt die Behauptung direkt aus (2), (3.7)(6) und der Definition von $\widetilde{g}$. Deshalb sei $\{A,B\} \cap g = \varnothing$ mit $<A,B> \not\perp g$. Wir setzen $D := g \cap (A \perp g), C := (D \parallel <A,B>) \cap (B \perp g)$ und $E := (B^g \parallel <C^g, D>) \cap (A \perp g)$ (Figur 5.2). Dann sind (A,B,C,D) und (D,C^g,B^g,E) nach (4.3) Parallelogramme, und mit a), (3.7) (6) und Axiom (K) folgt $AB \equiv DC \equiv DC^g \equiv EB^g \wedge AD \equiv BC \equiv B^g C^g \equiv DE$. Wäre $E = A$, so wäre $A \in m_{B,B^g} \overset{(2)}{=} g$. Gemäß Axiom (Z) gilt deshalb $E = A^g$ und damit $AB \equiv A^g B^g$.

c) Definitionsgemäß sind die in (6) aufgeführten Geraden Fixgeraden von $\widetilde{g}$. Weitere Fixgeraden kann es nicht geben, denn sonst gäbe es mehr Fixpunkte als in (1) angegeben (vgl. (3.4)).

d) Es sei $\varphi \in Aut(\mathbb{P}, \equiv)$. Ist $X \in \mathbb{P} \setminus g$, so ist $g = m_{X,X^g}$ gemäß (2), und nach (2.5)(4) ist $\varphi(g) = m_{\varphi(X),\varphi(X^g)}$, also $\widetilde{\varphi(g)}(\varphi(X)) = \varphi(X^g)$ gemäß (3). Wegen $[U \in g \Rightarrow \varphi(U) \in \varphi(g) \wedge \widetilde{\varphi(g)}(\varphi(U)) = \varphi(U) = \varphi(U^g)]$ haben wir dann $\widetilde{\varphi(g)} \circ \varphi(X) = \varphi \circ \widetilde{g}(X) \ \forall\ X \in \mathbb{P}$, d. h. es ist $\widetilde{\varphi(g)} \circ \varphi = \varphi \circ \widetilde{g}$ und damit $\widetilde{\varphi(g)} = \varphi \circ \widetilde{g} \circ \varphi^{-1}$. □

Als Corollar erhalten wir

(5.3) **Transitivität der Spiegelungen**. *Ist* $\{A,B\} \in \mathbb{P}_2$, *so existiert genau eine Spiegelung* σ *mit* $\sigma(A) = B$, *nämlich* $\sigma = \widetilde{m_{A,B}}$.

Beweis: Nach (5.2) (3) ist $\widetilde{m_{A,B}}(A) = B$. Ist aber $g \in \mathbb{G}$ mit $\widetilde{g}(A) = B$, so führt (5.2) (2) auf $g = m_{A,B}$. □

Download free eBooks at bookboon.com

Weiter führt (5.2) auf

(5.4) **Satz**. *Für je zwei verschiedene Geraden g, h gilt:*

(1) Ist $g \cap h = \{D\}$ mit $D \in \mathbb{P}$, so ist D der einzige Fixpunkt von $\widetilde{g} \circ \widetilde{h}$.

(2) Ist $g \parallel h$, so ist $\widetilde{g} \circ \widetilde{h}$ eine Translation $\neq id_{\mathbb{P}}$ mit den zu g orthogonalen Geraden als Richtung.

Beweis: a) Ist $U \in \mathbb{P}$ mit $\widetilde{g} \circ \widetilde{h}(U) = U$, so ist $\widetilde{h}(U) = \widetilde{g}(U)$. Im Falle $U \notin g \vee U \notin h$ würde (5.2)(2) auf $g = m_{U,U^g} = m_{U,U^h} = h$ führen. Deshalb liegen die Fixpunkte von $\widetilde{g} \circ \widetilde{h}$ in $g \cap h$, d. h. es gilt (1), und im Falle $g \cap h = \varnothing$ hat $\widetilde{g} \circ \widetilde{h}$ keinen Fixpunkt.
b) Es sei $g \cap h = \varnothing$. α) Ist $k \in \mathbb{G}$ mit $k \perp g$, so gilt nach (4.3)(1) auch $k \perp h$, und mit (5.2) (6) folgt $\widetilde{g} \circ \widetilde{h}(k) = k$. β) Gäbe es ein $l \in \mathbb{G}$ und ein $A \in \mathbb{P}$ mit $l \cap (\widetilde{g} \circ \widetilde{h}(l)) = \{A\}$, so wäre $l \not\perp g$ gemäß α), und für $m := (A \perp g)$ wäre $\{A\} = l \cap m \wedge \{\widetilde{g} \circ \widetilde{h}(A)\} = \widetilde{g} \circ \widetilde{h}(l) \cap \widetilde{g} \circ \widetilde{h}(m) = \widetilde{g} \circ \widetilde{h}(l) \cap m = \{A\}$ entgegen a). Demnach ist $\widetilde{g} \circ \widetilde{h}(l) \parallel l \quad \forall\, l \in \mathbb{G}$, und mit a) folgt (2). □

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

B. Translationen, Drehungen und Spiegelungen

Als wichtig für den weiteren Aufbau erweist sich

(5.5) **Fixpunktsatz**. *Gegeben sei eine distanztreue* ABBILDUNG φ *von* $\mathbb{P}$ *in sich, also eine Abbildung* $\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ *mit*

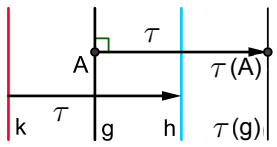
$(*)\quad \{X,Y\} \equiv \{\varphi(X),\varphi(Y)\} \;\; \forall\, \{X,Y\} \in \mathbb{P}_2$ *(vgl. (3.5)).*

Dann gilt: Besitzt φ *(wenigstens) zwei verschiedene Fixpunkte* A, B*, so ist* φ *entweder die Spiegelung an* $<A,B>$*, oder es ist* $\varphi = id_{\mathbb{P}}$*.*

Beweis: Es gebe ein $V \in \mathbb{P}$ mit $\varphi(V) \neq V$, und es sei $g := <A,B>$.
1) Ist $X \in \mathbb{P}$ mit $\varphi(X) \neq X$, so führt $XA \equiv \varphi(X)A \wedge XB \equiv \varphi(X)B$ auf $A, B \in m_{X,\varphi(X)}$, d.h. es ist $g = m_{X,\varphi(X)}$, und mit (5.2)(3) folgt $\varphi(X) = X^g$.
2) Ist $X \in \mathbb{P}$ mit $\varphi(X) = X$, so ist $\{X,V\} \equiv \{\varphi(X),\varphi(V)\} \overset{1)}{=} \{X,V^g\}$, also $X \in m_{V,V^g} = g$ und damit $\varphi(X) = X = X^g$. Wegen 1) ist dann $\varphi = \widetilde{g}$. □

Weiter zeigen wir

(5.6) **Darstellung von Translationen durch Spiegelungen**.
Ist τ *eine Translation und ist* g *eine Gerade, die auf einer Fixgeraden von* τ *senkrecht steht, so existiert genau eine Gerade* h *mit* $\tau = \widetilde{h} \circ \widetilde{g}$ *und genau eine Gerade* k *mit* $\tau = \widetilde{g} \circ \widetilde{k}$*. Hierbei ist* $g \parallel h \parallel k$*, und es gilt* $\tau(g) = \widetilde{h}(g)$ *sowie* $\tau(k) = \widetilde{g}(k) = h$ *(Figur 5.3).*



Figur 5.3

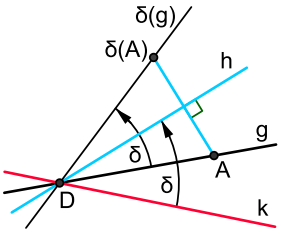
Beweis: a) Zunächst sei $\tau \neq id_{\mathbb{P}}$. Ist $A \in g$ und ist $h := m_{A,\tau(A)}$, so führen (3.15) und (5.4)(2) wegen $h \parallel g \wedge \tau(A) = \widetilde{h}(A) = \widetilde{h} \circ \widetilde{g}(A)$ auf $\tau = \widetilde{h} \circ \widetilde{g}$. Für $k := \widetilde{g}(h)$ gilt $k \parallel g$, und mit (5.2)(7) folgt $\widetilde{k} = \widetilde{g} \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{g}$, also $\tau = \widetilde{h} \circ \widetilde{g} = \widetilde{g} \circ \widetilde{g} \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{g} = \widetilde{g} \circ \widetilde{k}$. Dann ist $\tau(g) = \widetilde{h} \circ \widetilde{g}(g) = \widetilde{h}(g) \wedge \tau(k) = \widetilde{g} \circ \widetilde{k}(k) = \widetilde{g}(k)$. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus $[\widetilde{l} \circ \widetilde{g} = \widetilde{l'} \circ \widetilde{g} \Leftrightarrow \widetilde{g} \circ \widetilde{l} = \widetilde{g} \circ \widetilde{l'} \Leftrightarrow \widetilde{l} = \widetilde{l'} \Leftrightarrow l = l']$ $\forall\, l, l' \in \mathbb{G}$. b) Im Falle $\tau = id_{\mathbb{P}}$ gilt die Behauptung für $h := k := g$. □

(5.7) Wir bezeichnen eine Bewegung als **Drehung**, wenn sie genau einen Fixpunkt hat oder wenn sie die identische Abbildung ist. Ist D ein Fixpunkt der Drehung δ, so nennen wir δ eine **Drehung um** D und bezeichnen D als **Drehzentrum** oder als **Drehpunkt** von δ. Nach (3.7) ist jede Punktspiegelung eine Drehung.

Download free eBooks at bookboon.com

Mit (5.5) folgt nun

(5.8) **Darstellung von Drehungen durch Spiegelungen**.
Ist δ eine Drehung mit D als Drehpunkt und ist g eine Gerade durch D, so existiert genau eine Gerade h mit $\delta = \widetilde{h}\circ\widetilde{g}$ und genau eine Gerade k mit $\delta = \widetilde{g}\circ\widetilde{k}$. Die Geraden h und k enthalten D, und es gilt $\delta(g) = \widetilde{h}(g)$ sowie $\delta(k) = \widetilde{g}(k) = h$ (Figur 5.4).



Figur 5.4

Beweis. a) Zunächst sei $\delta \neq id_{\mathbb{P}}$. Ist $A \in g\backslash\{D\}$ und ist $h := m_{A,\delta(A)}$, so führt $\{D, A\} \equiv \{D, \delta(A)\}$ mit (5.2) auf $h \ni D \wedge \delta(A) = \widetilde{h}(A) \wedge \delta(g) = \widetilde{h}(g)$. Dann ist $\widetilde{h}\circ\delta$ eine Bewegung mit den Fixpunkten D, A, und wegen $\widetilde{h} \neq \delta$ und (5.5) folgt $\widetilde{h}\circ\delta = \widetilde{g}$. Demnach ist $\delta = \widetilde{h}\circ\widetilde{g}$. Für $k := \widetilde{g}(h)$ gilt $k \ni D$, und mit (5.2)(7) ergibt sich $\widetilde{k} = \widetilde{g}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{g}$, also $\delta = \widetilde{h}\circ\widetilde{g} = \widetilde{g}\circ\widetilde{g}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{g} = \widetilde{g}\circ\widetilde{k}$ und $\delta(k) = \widetilde{g}\circ\widetilde{k}(k) = \widetilde{g}(k)$. Die Eindeutigkeit folgt aus $[\widetilde{l}\circ\widetilde{g} = \widetilde{l'}\circ\widetilde{g} \Leftrightarrow \widetilde{g}\circ\widetilde{l} = \widetilde{g}\circ\widetilde{l'} \Leftrightarrow \widetilde{l} = \widetilde{l'} \Leftrightarrow l = l'] \forall\, l, l' \in \mathbb{G}$. b) Im Falle $\delta = id_{\mathbb{P}}$ ist die Behauptung offenbar für $h := k := g$ gültig. □

C. **Der Dreispiegelungssatz**

Mit Hilfe von (5.4) ,(5.6) und (5.8) erhalten wir nun

(5.9) **Dreispiegelungssatz**. *Sind $g, h, k \in \mathbb{G}$, so gilt:*
(1) Liegen g, h, k im Büschel, so ist $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{k}$ eine Spiegelung.

Download free eBooks at bookboon.com

(2) Ist $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{k}=\widetilde{l}$ *mit* $l\in\mathbb{G}$*, so ist* $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{k}=\widetilde{k}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{g}$*, und* g,h,k,l *liegen im Büschel.*

Beweis: (1) a) Ist $g=h$, so ist $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{k}=\widetilde{k}$.
b) Ist $g\cap h=\varnothing$, so ist $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}$ nach (5.4) und wegen $g\parallel k$ eine Translation, deren Fixgeraden auf k senkrecht stehen. Nach (5.6) gibt es dann ein $l\in\mathbb{G}$ mit $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}=\widetilde{l}\circ\widetilde{k}$, also mit $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{k}=\widetilde{l}$.
c) Ist $g\cap h=\{D\}$ mit $D\in\mathbb{P}$, so ist $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}$ nach (5.4) eine Drehung um D, und wegen $k\ni D$ existiert nach (5.8) ein $l\in\mathbb{G}$ mit $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}=\widetilde{l}\circ\widetilde{k}$, also mit $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{k}=\widetilde{l}$.
(2) a) Wegen $\widetilde{l}=\widetilde{l}^{-1}$ ist $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{k}=\widetilde{k}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{g}$.
b) Aus $g=h$ folgt $\widetilde{k}=\widetilde{l}$, also $k=l$ und damit die Behauptung.
c) Ist $g\cap h=\varnothing$, so ist $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}=\widetilde{l}\circ\widetilde{k}$ nach (5.4) eine Translation $\tau\neq id_{\mathbb{P}}$. Mit (5.4) folgt dann, daß $l\parallel k$ ist und daß die Fixgeraden von τ auf g,h,k,l senkrecht stehen. Nach (4.3) bedeutet dies $g,h,k,l\in g\parallel$.
d) Ist $g\cap h=\{D\}$ mit $D\in\mathbb{P}$, so ist $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}=\widetilde{l}\circ\widetilde{k}$ eine von $id_{\mathbb{P}}$ verschiedene Drehung um D. Nach (5.4)(1) bedeutet dies $g,h,k,l\in D^*$. □

(5.10) **Corollar**. *Geraden* g,h,k *liegen genau dann im Büschel, wenn* $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{k}$ *eine Spiegelung ist.*

D. Darstellung der Bewegungen durch Spiegelungen

(5.11) Wir wenden uns nun der Darstellung von Bewegungen durch Spiegelungen zu. Dazu bezeichnen wir die Menge $\{\widetilde{g}\,|\,g\in\mathbb{G}\}$ aller Spiegelungen mit $\mathfrak{S}$ und setzen $\mathfrak{S}^r:=\{\widetilde{g}_1\circ...\circ\widetilde{g}_r\,|\,\widetilde{g}_1,...,\widetilde{g}_r\in\mathfrak{S}\}$ für $r\in\mathbb{N}^*$, d. h. $\mathfrak{S}^r$ besteht aus allen r-fachen Produkten, die man aus Spiegelungen bilden kann. Mit dieser Bezeichnung erhalten wir

(5.12) **Darstellung der Bewegungen durch Spiegelungen**.
Es gelten die folgenden Aussagen:

(1) Es ist $\mathfrak{S}^4=\mathfrak{S}^2$ *und* $\mathfrak{S}^5=\mathfrak{S}^3$*. Hierbei ist* $\mathfrak{S}^2$ *eine Untergruppe von* $\mathfrak{B}_{\equiv}(\circ)$*, genannt* **Gruppe der geraden** *oder* **eigentlichen Bewegungen**. $\mathfrak{S}^2$ *ist die Menge der Drehungen und Translationen.*

(2) Es ist $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{S}^3\ \wedge\ \mathfrak{S}^2\cap\mathfrak{S}^3=\varnothing\ \wedge\ \mathfrak{S}^2\cup\mathfrak{S}^3=\mathfrak{B}_{\equiv}(\circ)$.

(3) $\mathfrak{S}^3$ *ist Nebenklasse von* $\mathfrak{S}^2$ *in* $\mathfrak{B}_{\equiv}(\circ)$ *und wird Menge der* **ungeraden** *oder* **uneigentlichen Bewegungen** *genannt.*

(4) $\mathfrak{S}^2$ *und* $\mathfrak{B}_{\equiv}(\circ)$ *sind Normalteiler von* $Aut(\mathbb{P},\equiv)(\circ)$.

Download free eBooks at bookboon.com

Beweis: a) Es seien $g,h,k,l \in \mathbb{G}$. Im Falle $g \parallel h \wedge k \parallel l$ sind $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}$ und $\widetilde{k}\circ\widetilde{l}$ nach (5.4) Translationen, und dann ist nach (3.17) auch $(\widetilde{g}\circ\widetilde{h})\circ(\widetilde{k}\circ\widetilde{l})$ eine Translation. Diese liegt aber nach (5.6) in $\mathfrak{S}^2$.
Gilt dagegen $g \nparallel h \vee k \nparallel l$, so existiert wegen (V) und (P) eine Gerade m, die sowohl mit g,h als auch mit k,l im Büschel liegt, und nach (5.9) ist dann $(\widetilde{g}\circ\widetilde{h})\circ(\widetilde{k}\circ\widetilde{l}) = (\widetilde{g}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{m})\circ(\widetilde{m}\circ\widetilde{k}\circ\widetilde{l}) \in \mathfrak{S}^2$. Wegen $(\widetilde{g}\circ\widetilde{h})^{-1} = \widetilde{h}\circ\widetilde{g} \in \mathfrak{S}^2$ und $id_{\mathbb{P}} = \widetilde{g}\circ\widetilde{g} \in \mathfrak{S}^2$ ist $\mathfrak{S}^2$ dann eine Untergruppe von $\mathfrak{B}_{\equiv}(\circ)$, und zugleich folgt $\mathfrak{S}^4 = \mathfrak{S}^2 \wedge \mathfrak{S}^5 = \mathfrak{S}^3$. Aufgrund von (5.4), (5.6) und (5.8) enthält $\mathfrak{S}^2$ genau die angegebenen Elemente, und mithin ist (1) gültig.
b) Gäbe es Elemente $g_l, ..., g_5 \in \mathbb{G}$ mit $\widetilde{g}_l\circ\widetilde{g}_2 = \widetilde{g}_3\circ\widetilde{g}_4\circ\widetilde{g}_5$, so wäre $\widetilde{g}_1 = = (\widetilde{g}_3\circ\widetilde{g}_4)\circ(\widetilde{g}_5\circ\widetilde{g}_2)$ nach a) eine Drehung oder eine Translation, und dann wäre die Fixpunktmenge von $\widetilde{g}_1$ keine Gerade. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{S}^2 \cap \mathfrak{S}^3 = \varnothing$ ist.
c) Gegeben sei eine Bewegung φ. Im Falle $\varphi = id_{\mathbb{P}}$ ist $\varphi = \widetilde{g}o\widetilde{g}$ für $g \in \mathbb{G}$, und im Falle $\varphi \neq id_{\mathbb{P}}$ gibt es ein $A \in \mathbb{P}$ mit $\varphi(A) \neq A$. Für $h := m_{A,\varphi(A)}$ ist $\widetilde{h}\circ\varphi$ dann eine Bewegung mit dem Fixpunkt A, und dies bedeutet $\widetilde{h}\circ\varphi \in \mathfrak{S} \vee \widetilde{h}\circ\varphi \in \mathfrak{S}^2$ gemäß (5.5) und (5.8), also $\varphi \in \mathfrak{S}^2 \cup \mathfrak{S}^3$. Demnach ist $\mathfrak{B}_{\equiv} = \mathfrak{S}^2 \cup \mathfrak{S}^3$, und wegen $\widetilde{g} = \widetilde{g}\circ\widetilde{g}o\widetilde{g} \;\; \forall\, g \in \mathbb{G}$ ist $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}^3$.
Damit ist (2) gezeigt, und aus (1), (2) und (5.2)(7) folgt (4).
d) Es sei $g \in \mathbb{G}$. Ist $\psi \in \mathfrak{S}^3$, so ist $\widetilde{g}\circ\psi$ nach a) ein Element von $\mathfrak{S}^2$, d.,h. es ist $\psi = \widetilde{g}\circ(\widetilde{g}\circ\psi) \in \widetilde{g}\circ\mathfrak{S}^2$ und damit $\mathfrak{S}^3 \subseteq \widetilde{g}\circ\mathfrak{S}^2 \subseteq \mathfrak{S}^3$, also $\mathfrak{S}^3 = \widetilde{g}\circ\mathfrak{S}^2$. Demnach ist auch (3) gültig. □

(5.13) **Corollar**. *Es sei $D \in \mathbb{P}$, und $\mathfrak{D}r(D)$ sei die Menge aller Drehungen um D. Dann ist $\mathfrak{D}r(D)$ eine abelsche Untergruppe von $\mathfrak{S}^2$, genannt* **Gruppe der Drehungen um** *D.*

Beweis: Da $\mathfrak{D}r(D)$ nach (5.4) und (5.12) die Menge aller Elemente von $\mathfrak{S}^2$ ist, die D festlassen, ist $\mathfrak{D}r(D)$ eine Untergruppe von $\mathfrak{S}^2$.
Sind $\delta, \varepsilon \in \mathfrak{D}r(D)$, so gibt es nach (5.8) $g,h,k,l \in D^*$ mit $\delta = \widetilde{g}\circ\widetilde{h} \;\wedge$ $\wedge\; \varepsilon = \widetilde{k}\circ\widetilde{l}$, und mit (5.9) folgt dann $\delta\circ\varepsilon = (\widetilde{g}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{k})\circ\widetilde{l} = (\widetilde{k}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{g})\circ\widetilde{l} = = \widetilde{k}\circ(\widetilde{h}\circ\widetilde{g}\circ\widetilde{l}) = \widetilde{k}\circ(\widetilde{l}\circ\widetilde{g}\circ\widetilde{h}) = \varepsilon\circ\delta$. □

E. Involutorische Bewegungen

(5.14) Eine Kollineation φ von $(\mathbb{P},\mathbb{G})$ wird **involutorisch** genannt, wenn die Bedingung $\varphi\circ\varphi = id_{\mathbb{P}} \wedge \varphi \neq id_{\mathbb{P}}$ erfüllt ist, wenn also $\varphi = \varphi^{-1} \neq id_{\mathbb{P}}$ gilt.

Download free eBooks at bookboon.com

Wie wir bereits wissen, sind die Spiegelungen und die Punktspiegelungen involutorische Bewegungen.
Um festzustellen, ob es noch weitere Bewegungen dieses Typs gibt, bemerken wir zunächst folgendes:
Ist φ eine involutorische Kollineation von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$, so gilt $\varphi(\{X, \varphi(X)\}) = = \{\varphi(X), \varphi(\varphi(X))\} = \{X, \varphi(X)\} \quad \forall\ X \in \mathbb{P}$. Da φ nach (3.11) mittentreu ist, bedeutet dies, daß die Mitte zwischen Bild und Urbild bei einer involutorischen Kollineation stets ein Fixpunkt ist. Außerdem sehen wir, daß $<X, \varphi(X)>$ im Falle $X \neq \varphi(X)$ eine Fixgerade von φ ist.
Ist φ nun eine involutorische Bewegung, so hat φ nach unserer Überlegung wenigstens einen Fixpunkt. Hat φ wenigstens zwei Fixpunkte, so ist φ nach (5.5) eine Spiegelung. Hat φ genau einen Fixpunkt D, so ist D die Mitte zwischen X und $\varphi(X) \quad \forall\ X \in \mathbb{P}$, d. h. es ist $\varphi = \widetilde{D}$.

Damit gilt

(5.15) **Satz**. *Die involutorischen geraden Bewegungen sind die Punktspiegelungen, und die involutorischen ungeraden Bewegungen sind die Geradenspiegelungen.*

(5.16) **Corollar** *Sind $g, h \in \mathbb{G}$ mit $g \neq h$, so sind äquivalent:*
(1) $\widetilde{g} \circ \widetilde{h}$ ist eine Punktspiegelung.
(2) $\widetilde{g} \circ \widetilde{h} = \widetilde{h} \circ \widetilde{g}$.
(3) $g \perp h$.

Beweis: Nach (3.7)(2) , (5.4) und (5.15) ist $[(1) \Leftrightarrow (2)]$, und nach (5.2)(1), (6), (7) ist $[\widetilde{g} \circ \widetilde{h} = \widetilde{h} \circ \widetilde{g} \ \Leftrightarrow\ \widetilde{\widetilde{g}(h)} = \widetilde{g} \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{g} = \widetilde{h} \ \Leftrightarrow\ \widetilde{g}(h) = h \ \Leftrightarrow\ g \perp h]$, d.h. es ist $[(2) \Leftrightarrow (3)]$. $\square$

Download free eBooks at bookboon.com

F. Gleitspiegelungen

Mit Hilfe der vorangegangenen Aussagen erhalten wir

(5.17) **Satz**. *Für jede ungerade Bewegung ψ von $(\mathbb{P}, \equiv)$ gilt (Figur 5.5):*

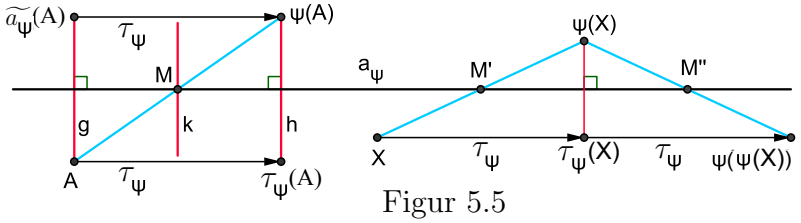
(1) Ist $A \in \mathbb{P}$ und ist M die Mitte von $A, \psi(A)$, so existiert genau eine Gerade g mit $\widetilde{M} \circ \widetilde{g} = \psi$ und genau eine Gerade h mit $\widetilde{h} \circ \widetilde{M} = \psi$.

(2) Es gibt genau ein $a_\psi \in \mathbb{G}$ und genau ein $\tau_\psi \in \mathfrak{T}$ mit $\widetilde{a}_\psi \circ \tau_\psi = \psi = \tau_\psi \circ \widetilde{a}_\psi$. Dabei ist a_ψ eine Fixgerade von ψ und von τ_ψ.
Man nennt a_ψ die **Achse** *von ψ und τ_ψ den* **Schub** *von ψ und sagt, ψ ist eine* **Gleitspiegelung** *längs a_ψ mit dem Schub τ_ψ.*

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

(3) Es ist $\psi\circ\psi = \tau_\psi\circ\tau_\psi \in \mathfrak{T}$.
(4) Hat ψ *(wenigstens) einen Fixpunkt, so ist* $\psi = \widetilde{a}_\psi$.
(5) Hat ψ *keinen Fixpunkt, so ist* a_ψ *die einzige Fixgerade von* ψ.
(6) Die Achse a_ψ *besteht aus den Mitten von* $\{X, \psi(X)\}\ \ \forall\ X \in \mathbb{P}$.



Figur 5.5

Beweis: (1) Da A ein Fixpunkt von $\widetilde{M}\circ\psi$ ist und da $\widetilde{M}\circ\psi$ nach (5.12) keine Drehung ist, ist $\widetilde{M}\circ\psi$ nach (5.5) und (5.7) eine Spiegelung $\widetilde{g}$ an einer Geraden g, d. h. es ist $\psi = \widetilde{M}\circ\widetilde{g}$. Für $h := \widetilde{M}(g)$ führt (5.2) (7) auf $\widetilde{h} = \widetilde{M}\circ\widetilde{g}\circ\widetilde{M}$, und dann ist $\psi = \widetilde{M}\circ\widetilde{g}\circ\widetilde{M}\circ\widetilde{M} = \widetilde{h}\circ\widetilde{M}$. Die Eindeutigkeit folgt aus $[\widetilde{M}\circ\widetilde{l} = \widetilde{M}\circ\widetilde{l'} \Leftrightarrow \widetilde{l}\circ\widetilde{M} = \widetilde{l'}\circ\widetilde{M} \Leftrightarrow \widetilde{l} = \widetilde{l'} \Leftrightarrow l = l']\ \ \forall\ l, l' \in \mathbb{G}$.

(2), (3): Es sei $\psi = \widetilde{M}\circ\widetilde{g}$ gemäß (1). Für $a_\psi := (M \perp g), k := (M \parallel g)$ und $\tau_\psi := \widetilde{k}\circ\widetilde{g}$ führt (5.16) auf $\widetilde{M} = \widetilde{a}_\psi\circ\widetilde{k} = \widetilde{k}\circ\widetilde{a}_\psi\ \wedge\ \psi = \widetilde{M}\circ\widetilde{g} = \widetilde{a}_\psi\circ\widetilde{k}\circ\widetilde{g} = = \widetilde{a}_\psi\circ\tau_\psi\ \wedge\ \psi = \widetilde{M}\circ\widetilde{g} = \widetilde{k}\circ\widetilde{a}_\psi\circ\widetilde{g} = \widetilde{k}\circ\widetilde{g}\circ\widetilde{a}_\psi = \tau_\psi\circ\widetilde{a}_\psi$ (Figur 5.5), und wegen $a_\psi \perp g, k$ ist $\tau_\psi(a_\psi) = a_\psi$, also auch $\psi(a_\psi) = a_\psi$.
Ist $\psi = \tau\circ\widetilde{a} = \widetilde{a}\circ\tau$ mit $a \in \mathbb{G}$ und $\tau \in \mathfrak{T}$, so ist $\tau_\psi\circ\tau_\psi = \tau_\psi\circ\widetilde{a}_\psi\circ\widetilde{a}_\psi\circ\tau_\psi = = \psi\circ\psi = \tau\circ\widetilde{a}\circ\widetilde{a}\circ\tau = \tau\circ\tau \in \mathfrak{T}$. Mit (3.17) folgt $(\tau^{-1}\circ\tau_\psi) = (\tau^{-1}\circ\tau_\psi)^{-1}$, also $\tau^{-1}\circ\tau_\psi = id_\mathbb{P}$ gemäß (5.15) und damit $\tau_\psi = \tau$. Dies führt wiederum auf $\widetilde{a}_\psi\circ\tau = \psi = \widetilde{a}\circ\tau$, also auf $\widetilde{a}_\psi = \widetilde{a}$, und folglich ist $a_\psi = a$.

(4) Hat ψ einen Fixpunkt, so hat ψ wegen $\psi \notin \mathfrak{S}^2$ noch wenigstens einen weiteren Fixpunkt (vgl. (5.7), (5.12)), und nach (5.5) und (5.12) gibt es dann ein $a \in \mathbb{G}$ mit $\psi = \widetilde{a} = id_\mathbb{P}\circ\widetilde{a} = \widetilde{a}\circ id_\mathbb{P}$. Nach (2) bedeutet dies $a_\psi = a$ und $\tau_\psi = id_\mathbb{P}$.

(5) Ist $l \in \mathbb{G}$ mit $l \cap a_\psi = \varnothing$, so ist l wegen $\psi(l) = \widetilde{a}_\psi(\tau_\psi(l)) = \widetilde{a}_\psi(l)$ nach (5.2)(6) keine Fixgerade von ψ. Hat also ψ eine Fixgerade $m \neq a_\psi$, so ist $m \nparallel a_\psi$, und dann ist $m \cap a_\psi$ ein Fixpunkt von ψ.

(6) Ist $A \in \mathbb{P}$ beliebig gewählt und sind M, g gemäß (1) festgelegt, so gilt $a_\psi = (M \perp g)$ nach dem Beweis von (2), also $M \in a_\psi$. Ist andererseits $U \in a_\psi$ und ist $V \in \mathbb{P}$ mit $\widetilde{V} := \widetilde{U}\circ\tau_\psi$, so ist $\tau_\psi = \widetilde{U}\circ\widetilde{V}$, und mit (3.14) folgt $V \in a_\psi$ sowie $\psi(V) = \tau_\psi(V) = \widetilde{U}\circ\widetilde{V}(V) = \widetilde{U}(V)$. $\square$

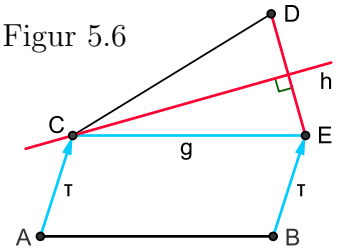
Download free eBooks at bookboon.com

G. Transitivität von Bewegungen

Eine weitere wichtige Aussage erhalten wir mit

(5.18) **Transitivität der geraden Bewegungen**.
Sind $\{A,B\},\{C,D\}\in\mathbb{P}_2$ *mit* $\{A,B\}\equiv\{C,D\}$, *so existiert genau eine gerade Bewegung* φ *mit* $\varphi(A)=C\ \wedge\ \varphi(B)=D$.

Figur 5.6



Beweis: Ist $\tau:=\tau_{A,C}$ und $E:=\tau(B)$, so sei $\varphi:=\tau$ im Falle $D=E$ und sonst $\varphi:=\widetilde{h}\circ\widetilde{g}\circ\tau$ mit $g:=<C,E>$ und $h:=m_{D,E}$ (Figur (5.6)). Wegen $[D\neq E\wedge\{C,D\}\equiv\{A,B\}\equiv\{C,E\}\ \Rightarrow C\in m_{D,E}=h]$ gilt dann $\varphi(A)=C\wedge\varphi(B)=D$ mit $\varphi\in\mathfrak{S}^2$. Ist außerdem $\psi\in\mathfrak{S}^2$ mit $\psi(A)=C\wedge\psi(B)=D$, so hat $\varphi^{-1}\circ\psi$ die beiden Fixpunkte A,B, und nach (5.5) und (5.12) gilt dann $\varphi^{-1}\circ\psi=id_{\mathbb{P}}$, also $\psi=\varphi$. □

(5.19) **Corollar 1**. *Die Bewegungen von* $(\mathbb{P},\equiv)$ *sind die distanztreuen Abbildungen von* $\mathbb{P}$ *in sich. Demnach genügt es, die Distanztreue zu überprüfen, wenn man feststellen möchte, ob eine Abbildung von* $\mathbb{P}$ *in sich eine Bewegung von* $(\mathbb{P},\equiv)$ *ist; die Bijektivität ist einfach eine Folge der Distanztreue.*

Beweis: Definitionsgemäß ist jede Bewegung distanztreu. Ist umgekehrt eine distanztreue Abbildung φ von $\mathbb{P}$ in sich gegeben (vgl. (5.5)) und ist $\{A,B\}\in\mathbb{P}_2$, so ist $\{A,B\}\equiv\{\varphi(A),\varphi(B)\}$, und nach (5.18) gibt es ein $\delta\in\mathfrak{S}^2$ mit $\delta(A)=\varphi(A)\wedge\delta(B)=\varphi(B)$. Dies bedeutet, daß $\delta^{-1}\circ\varphi$ distanztreu mit den Fixpunkten A,B ist, und mit (5.5) ergibt sich dann $\delta^{-1}\circ\varphi\in\mathfrak{B}_{\equiv}$. Dies impliziert aber $\varphi\in\mathfrak{B}_{\equiv}$. □

(5.20) **Corollar 2**. *Ist* φ *eine gerade Bewegung und gibt es ein* $g\in\mathbb{G}$ *mit* $\varphi(g)\parallel g$, *so ist* φ *eine Punktspiegelung oder eine Translation.*

Beweis: Ist $A\in g$ und ist $\tau:=\tau_{\varphi(A),A}$, so ist $\tau\circ\varphi$ eine gerade Bewegung mit $\tau\circ\varphi(A)=A\wedge\tau\circ\varphi(g)=g$. Für $B\in g\backslash\{A\}$ führt Axiom (Z) nun auf $\tau\circ\varphi(B)\in\{B,B^A\}$, und nach (5.18) bedeutet dies $\tau\circ\varphi\in\{id_{\mathbb{P}},\widetilde{A}\}$, also $\varphi\in\mathfrak{T}\cup\widetilde{\mathbb{P}}$. □

Download free eBooks at bookboon.com

H. Kongruenz

(5.21) Gegeben seien zwei (nicht notwendig verschiedene) Teilmengen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ von $\mathbb{P}$. Wir nennen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ **kongruent** bzw. **gleichsinnig kongruent** bzw. **gegensinnig kongruent**, in Zeichen: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{A} \widehat{\equiv} \mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{B}$, wenn es ein $\varphi \in \mathfrak{B}_{\equiv}$ bzw. ein $\varphi \in \mathfrak{S}^2$ bzw. ein $\varphi \in \mathfrak{S}^3$ gibt mit $\varphi(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Wegen (5.18) stellt die jetzige Verwendung von $\equiv$ eine Erweiterung der bisherigen Verwendung dar.

Da $\mathfrak{B}_{\equiv}(\circ)$ und $\mathfrak{S}^2(\circ)$ Gruppen sind, sind $\equiv$ und $\widehat{\equiv}$ Äquivalenzrelationen auf der Potenzmenge von $\mathbb{P}$. Dagegen erfüllt $\bowtie$ die Bedingungen

$(*)\ \ [\mathcal{A} \bowtie \mathcal{B} \ \Leftrightarrow\ \mathcal{B} \bowtie \mathcal{A}] \ \wedge\ [\mathcal{A} \bowtie \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \bowtie \mathcal{C} \ \Rightarrow\ \mathcal{A} \widehat{\equiv} \mathcal{C}] \ \ \forall\, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}.$

Unter Verwendung von (5.18) erhalten wir

(5.22) **Kongruenzsatz** (SSS) *(Seite-Seite-Seite) Gegeben seien Dreiecke* $\{A, B, C\}, \{A', B', C'\}$ *mit* $AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \wedge CA \equiv C'A'$. *Dann existiert genau ein* $\varphi \in \mathfrak{B}_{\equiv}$ *mit*
$(*)\ \ \varphi(A) = A' \ \wedge\ \varphi(B) = B' \ \wedge\ \varphi(C) = C'.$

Beweis: a) Nach (5. 18) gibt es ein $\psi \in \mathfrak{S}^2$ mit $\psi(A) = A' \wedge \psi(B) = B'$. Ist $\psi(C) = C'$, so sei $\varphi := \psi$. Ist $\psi(C) \neq C'$, so führen $\psi(C)A' \equiv CA \equiv$ $\equiv C'A'$ und $\psi(C)B' \equiv CB \equiv B'C'$ auf $A', B' \in m_{\psi(C),C'}$, gemäß (5.2) also auf $\widetilde{g}(\psi(C)) = C'$ für $g := <A', B'>$, und dann ergibt sich $(*)$ für $\varphi := \widetilde{g} \circ \psi$. b) Ist $\eta \in \mathfrak{B}_{\equiv}$ mit $\eta(A) = A' \wedge \eta(B) = B' \wedge \eta(C) = C'$, so bleibt $\{A, B, C\}$ bei $\varphi^{-1} \circ \eta$ elementweise fest, und nach (5.5) und (5.2)(1) ist dann $\varphi^{-1} \circ \eta = id_{\mathbb{P}}$, also $\eta = \varphi$. $\square$

I. Symmetrie

(5.23) 1) Gegeben seien zwei (nicht notwendig verschiedene) Teilmengen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von $\mathbb{P}$. Gibt es ein $D \in \mathbb{P}$ mit $\widetilde{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, so heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (bzw. $\mathcal{A}$ im Falle $\mathcal{A} = \mathcal{B}$) **punktsymmetrisch** zum Punkt D, und D wird ein **Symmetriezentrum** von $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (bzw. von $\mathcal{A}$ im Falle $\mathcal{A} = \mathcal{B}$) genannt. Gibt es ein $g \in \mathbb{G}$ mit $\widetilde{g}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, so heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (bzw. $\mathcal{A}$ im Falle $\mathcal{A} = \mathcal{B}$) **achsensymmetrisch** zur Geraden g oder **symmetrisch** zur Achse g, und g wird eine **Symmetrieachse** von $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (bzw. von $\mathcal{A}$ im Falle $\mathcal{A} = \mathcal{B}$) genannt. Ist g eine Symmetrieachse von $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, so auch von $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ und von $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Dagegen ist eine Symmetrieachse von $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ nicht unbedingt eine von $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Entsprechendes gilt für Punktsymmetrie.

Download free eBooks at bookboon.com

2) Sind A, B zwei verschiedene Punkte, so ist die Mitte von $\{A, B\}$ das (einzige) Symmetriezentrum von $(\{A\}, \{B\})$ und von $\{A, B\}$, und $m_{A,B}$ ist die einzige Symmetrieachse von $(\{A\}, \{B\})$. Jedoch hat $\{A, B\}$ die Symmetrieachsen $<A, B>$ und $m_{A,B}$.

3) Ist $MA \in \mathbb{P}_2$ und ist $k := k_{M;A}$, so ist M das einzige Symmetriezentrum von k, denn keine andere Punktspiegelung läßt M fest. Genau die Geraden durch M sind die Symmetrieachsen von k, denn für $g \in \mathbb{G}$ gilt $[\widetilde{g}(M) = M \Leftrightarrow M \in g] \ \wedge \ [g \ni M \Rightarrow \widetilde{g}(k_{M;A}) = k_{M;\widetilde{g}(A)} = k]$ (vgl. (2.5)(5)).

4) Gegeben seien $g, h \in \mathbb{G}$ mit $g \cap h = \varnothing$. Ist M die Mitte von $\{U, V\}$ für $U \in g$ und $V \in h$ und ist $m := (M \parallel g) \ \wedge \ n := (M \perp m)$, so ergibt sich $\widetilde{m}(g) = \widetilde{m} \circ \widetilde{n}(g) = \widetilde{M}(g) = h$, d. h. m ist eine Symmetrieachse von (g, h), die auch die **Mittellinie** von g und h genannt wird. Für diese gilt

$(*)$ *Ist* $X \in g \wedge Y \in h$ *und ist* Z *die Mitte von* $\{X, Y\}$, *so ist* $Z \in m$.

Dies folgt wegen $\widetilde{M}(X) \in h \parallel m$ aus (4.9) für $\{X, Y, \widetilde{M}(X)\}$, und es zeigt, daß m durch g, h eindeutig bestimmt ist.

5) Seltsamerweise brauchen zwei sich *schneidende* Geraden einer normalen euklidischen Ebene nicht unbedingt kongruent und damit natürlich auch nicht achsensymmetrisch zu sein, wie wir noch sehen werden.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Es läßt sich in diesem Zusammenhang lediglich folgendes beweisen:

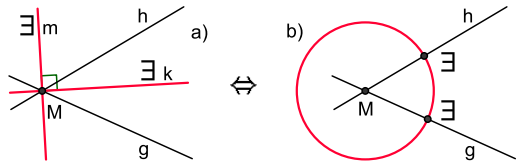
(5.24) **Satz**. *Sind g, h zwei verschiedene Geraden durch den Punkt M, so sind äquivalent:*

(1) g und h sind kongruent.

(2) (g,h) besitzt (wenigstens) eine Symmetrieachse.

(3) (g,h) besitzt genau zwei Symmetrieachsen. Diese stehen aufeinander senkrecht und enthalten M (Figur 5.7 a)).

(4) Es existiert ein Kreis mit dem Mittelpunkt M, der g und h trifft (Figur 5.7 b)).



Figur 5.7

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Es sei $\varphi \in \mathfrak{B}_{\equiv}$ mit $\varphi(g) = h$. Dann ist $\varphi(M) \in h$, und für $\tau := \tau_{\varphi(M),M}$ folgt $\tau\circ\varphi(g) = h \wedge \tau\circ\varphi(M) = M$ sowie $\widetilde{h}\circ\tau\circ\varphi(g) = h \wedge \widetilde{h}\circ\tau\circ\varphi(M) = M$, also $\tau\circ\varphi \in \mathfrak{S} \vee \widetilde{h}\circ\tau\circ\varphi \in \mathfrak{S}$ gemäß (5.12)(2) und (5.17)(4).

(2) $\Rightarrow$ (3) : Es sei $k \in \mathbb{G}$ mit $\widetilde{k}(g) = h$, und es sei $m := (M \perp k)$. Ist $l \in \mathbb{G}$ mit $\widetilde{l}(g) = h$, so ist $\widetilde{l}(M) = \widetilde{l}(g) \cap \widetilde{l}(h) = M$, also $M \in l$. Weiter gilt dann $\widetilde{k}\circ\widetilde{l}(M) = M$ und $\widetilde{k}\circ\widetilde{l}(g) = g$. Für $X \in g\backslash M$ bedeutet dies $\widetilde{k}\circ\widetilde{l}(X) \in \{X, X^M\}$, und nach (5.18) ist nun $\widetilde{k}\circ\widetilde{l} \in \{id_{\mathbb{P}}, \widetilde{M}\} = \{\widetilde{k}\circ\widetilde{k}, \widetilde{k}\circ\widetilde{m}\}$, also $l \in \{k, m\}$ (vgl. (5.16)). Überdies ist $\widetilde{m}(g) = \widetilde{M}\circ\widetilde{k}(g) = \widetilde{M}(h) = h$.

(3) $\Rightarrow$ (4) : Ist $l \in \mathbb{G}$ mit $l \ni M \wedge \widetilde{l}(g) = h$ und ist $X \in g\backslash M$, so ist $X \in k_{M;X} \cap g$ und $\widetilde{l}(X) \in k_{M;X} \cap h$.

(4) $\Rightarrow$ (1) : Da es ein $X \in g\backslash M$ und ein $Y \in h\backslash M$ mit $MX \equiv MY$ gibt, folgt die Behauptung aus (5.18). $\square$

(5.25) *Anmerkung.* Aus den Axiomen, die wir später für die vollständige Beschreibung der Anschauungsebene zugrunde legen, wird unmittelbar folgen, daß die Bedingung (4) aus (5.24) in der Anschauungsebene gültig ist. Nach (5.24) gelten in der Anschauungsebene dann auch die Bedingungen (1), (2), (3).

Wie schon erwähnt, werden wir jedoch auch Modelle normaler euklidischer Ebenen kennenlernen, in denen Geradenpaare existieren, für die keine der Bedingungen (1) bis (4) erfüllt ist. Allerdings sind zwei Tangenten eines Kreises stets kongruent, denn es gilt:

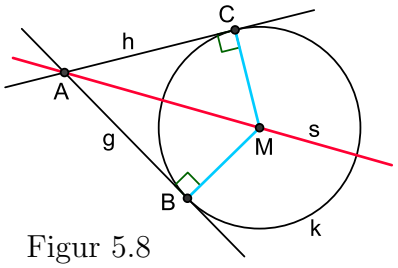
Download free eBooks at bookboon.com

(5.26) **Satz**. *Sind $g, h \in \mathbb{G}$ und $A, M \in \mathbb{P}$ mit $g \cap h = A \neq M$, so gilt:*

(1) Ist k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M, der g und h berührt, so ist $<A, M>$ eine Symmetrieachse von (g, h) und zugleich die Mittelsenkrechte der Berührpunkte (Figur 5.8).

(2) Ist $<A, M>$ eine Symmetrieachse von (g, h), so existiert genau ein Kreis mit dem Mittelpunkt M, der g und h berührt.

Beweis: (1) Es sei $B := k \cap g$ und $C := k \cap h$. Dann ist $M \in s := m_{B,C}$, und mit (4.12)(2) ergibt sich $g = (B \perp <M, B>) \wedge h = (C \perp <M, C>)$. Mit $B^s = C$ folgt nun $\widetilde{s}(g) = (B^s \perp <M, B^s>) = h$ (vgl. (4.2)) und damit $\widetilde{s}(A) = \widetilde{s}(g) \cap \widetilde{s}(h) = A$. Demnach ist $s = <A, M>$.



Figur 5.8

(2) Ist $s := <A, M>$ mit $\widetilde{s}(g) = h$, so ist $s \neq g, h$. Für den Fußpunkt B des Lotes von M auf g ergibt sich $<M, B> \perp g \wedge B^s \in h \wedge \{M, B\} \equiv \{M, B^s\} \wedge <M, B^s> \perp h$, und nach (4.12)(2) werden g und h dann von $k_{M;B}$ berührt. Ist l ein weiterer Kreis mit dem Mittelpunkt M, der g und h berührt, und ist $l \cap g =: B'$, so führen (4.12) (2) und (4.4) auf $B' = B$, also auf $l = k_{M;B}$. □

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

(5.27) **Corollar**. *Ist k ein Kreis mit Mittelpunkt M und sind $A, B, C \in \mathbb{P}$ mit $A \notin k \cup \{M\}$ und $\{B, C\} = k \cap k_{Th}\{A, M\}$, so sind $<A, B>$ und $<A, C>$ die Tangenten von k durch A.*
Hierbei gilt $<A, B> \neq <A, C>$ und $AB \equiv AC$ (Figur 5.8).

Beweis: Ist $s := <A, M>$, so ist $s \cap k_{Th}\{A, M\} = \{A, M\}$, d.h. es sind $B, C \notin s$. Nach (5.23)3) ist $\{B, B^s\} = \{B, C\}$, also $C = B^s$, und dann folgt die Behauptung aus (4.10), (4.15), (5.2)(2) und (5.26). □

J. Winkelhalbierende bei Dreiecken

(5.28) Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so werden die Symmetrieachsen von je zwei der Seitengeraden von $\{A, B, C\}$, soweit sie existieren, die **Winkelhalbierenden** von $\{A, B, C\}$ genannt, und jeder Kreis, der gleichzeitig die drei Seitengeraden von $\{A, B, C\}$ berührt, heißt ein **Berührkreis** von $\{A, B, C\}$. Mit Hilfe von (5.26) erhalten wir

(5.29) **Satz über Winkelhalbierende und Berührkreise** *(Figur 5.9)*
Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck mit kongruenten Seitengeraden, so gilt:

(1) Durch jede Ecke von $\{A, B, C\}$ gehen genau zwei Winkelhalbierende. Diese sind orthogonal zueinander und verschieden von den Seitengeraden von $\{A, B, C\}$.

(2) Je zwei der Winkelhalbierenden von $\{A, B, C\}$ schneiden sich.

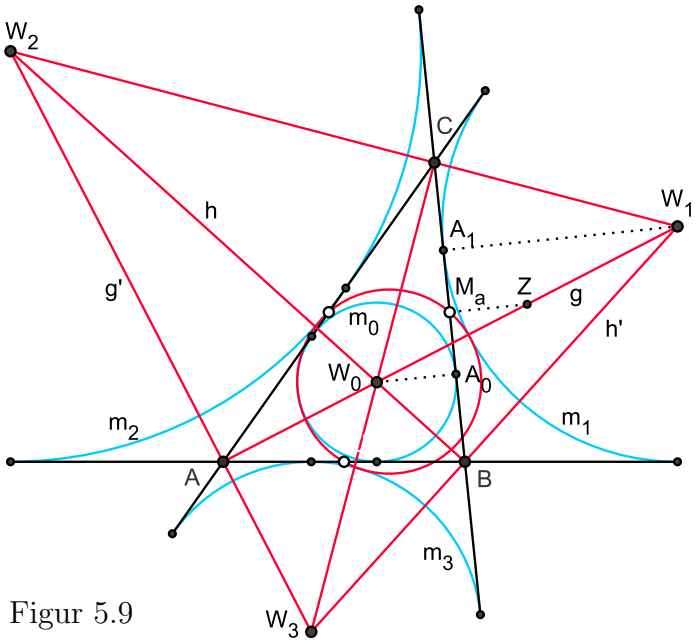
(3) Sind g, h, k, k' Wtinkelhalbierende von $\{A, B, C\}$ mit $g \ni A \wedge h \ni B \wedge k \cap k' = C$, so gilt entweder $g \cap h \cap k \neq \varnothing$ oder $g \cap h \cap k' \neq \varnothing$.

(4) Das Dreieck $\{A, B, C\}$ besitzt genau vier Berührkreise. Die zugehörigen Mittelpunkte $W_0, ..., W_3$ sind zu je dreien nichtkollinear. Die sechs Verbindungsgeraden von $W_0, ..., W_3$ sind die Winkelhalbierenden von $\{A, B, C\}$, und für $\{Q, R, S, T\} = \{W_0, ..., W_3\}$ gilt $<Q, R> \perp <S, T>$.

(5) Sind m_0', m_1' zwei verschiedene Berührkreise von $\{A, B, C\}$ mit den Mittelpunkten W_0', W_1' und ist $\{A', B', C'\} = \{A, B, C\}$ mit $A' \in <W_0', W_1'>$, so ist die Mitte M_a' von $\{B', C'\}$ zugleich die Mitte von $A_0' := m_0' \cap <B', C'>$ und $A_1' := m_1' \cap <B', C'>$.

Beweis: a) Die Aussage (1) folgt aus (5.24). Demnach besitzt $\{A, B, C\}$ sechs verschiedene Winkelhalbierende g, g', h, h', k, k' mit $g \cap g' = A \wedge$ $\wedge\ h \cap h' = B\ \wedge\ k \cap k' = C$.

Download free eBooks at bookboon.com



Figur 5.9

b) Wegen $\widetilde{g}\circ\widetilde{h}(<B,C>)=\widetilde{g}(<A,B>)=<A,C> \nparallel <B,C>$ und (5.4)(2) ist $g \nparallel h$, und analog bzw. mit (1) ergibt sich (2) in den übrigen Fällen.

c) Die Punkte $W_0 := g\cap h, W_1 := g\cap h', W_2 := g'\cap h, W_3 := g'\cap h'$ sind nach (1) zu je dreien nichtkollinear. Es sei A_i bzw. B_i bzw. C_i der Fußpunkt des Lotes von W_i auf $<B,C>$ bzw. $<C,A>$ bzw. $<A,B>$, und es sei $m_i := k_{W_i;C_i}\,(i=0,1,2,3)$. Dann ist $<A,B>$ nach (4.12) eine Tangente von m_i, und die Spiegelung an $<A,W_i>$ (bzw. $<B,W_i>$) bildet m_i auf m_i, $<A,B>$ auf $<A,C>$ und C_i auf B_i (bzw. m_i auf m_i, $<A,B>$ auf $<B,C>$ und C_i auf A_i ab (vgl. (4.2)), d. h. es gilt $A_i, B_i \in m_i \wedge <A_i,W_i>\perp<B,C> \wedge <B_i,W_i>\perp<A,C>\,(i=0,1,2,3)$. Nach (4.12) bedeutet dies, daß $m_0,...,m_3$ vier verschiedene Berührkreise von $\{A,B,C\}$ sind. Ist m ein beliebiger Berührkreis von $\{A,B,C\}$ mit dem Mittelpunkt W, so sind $<W,A>, <W,B>, <W,C>$ nach (5.26)(1) Winkelhalbierende von $\{A,B,C\}$, und nach a), b) und (5.26)(2) gilt $W \in \{W_0,...,W_3\}$ sowie $m \in m_0,...,m_3$. Damit sind (3) und (4) gezeigt.

d) Zum Beweis von (5) sei Z der Mittelpunkt von $k_{Th}\{W_0', W_1'\}$ (vgl. Figur 5.9 für $W_0' = W_0 \wedge W_1' = W_1$). Wegen $B', C' \in k_{Th}\{W_0', W_1'\}$ sind $M_a', Z \in m_{B',C'}$ (vgl. (3.9)), und wegen $m_{B',C'} \parallel <W_0', A_0'> \parallel <W_1', A_1'>$ und $W_0'^{Z} = W_1'$ ist $m_{B',C'}$ nach (5.23)(4) die Mittellinie von $<W_0', A_0'>$ und $<W_1', A_1'>$. Mit (5.23)(4)(∗) führt dies auf (5). □

Download free eBooks at bookboon.com

K. Aufgaben

A 5.1. Man bestimme die Symmetriezentren und die Symmetrieachsen von einem gleichschenkligen Dreieck, einem gleichseitigen Dreieck, einem Kreis, einem Drachen, einem Parallelogramm, einem Rechteck, einer Raute, einem Quadrat.

A 5.2. Man gebe Teilmengen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ der Anschauungsebene derart an, daß $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ genau ein Symmetriezentrum besitzt und daß $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ mehrere Symmetriezentren besitzt.

A 5.3. Als Ergänzung zu (4.14) beweise man $|\mathbb{M}| \in \{4, 5, 6, 8, 9\}$ für $\mathbb{M} := \{M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, A^*, B^*, C^*\}$. [*Anleitung:* Für den Fall $H \notin <A, B> \cup <B, C> \cup <C, A>$ zeige man zunächst $|\{M_a, M_b, M_c, A^*, B^*, C^*\}| = 6$.]

A 5.4. Für $A \in \mathbb{P}$ und $g, h, k \in \mathbb{G}$ beweise man
a) $\widetilde{g} \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{k} = \widetilde{k} \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{g} \;\Leftrightarrow\; \widetilde{g} \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{k} \in \mathfrak{S}$,
b) $A \in g \;\Leftrightarrow\; \widetilde{A} \circ \widetilde{g} = \widetilde{g} \circ \widetilde{A} \;\Leftrightarrow\; \widetilde{A} \circ \widetilde{g} \in \mathfrak{S}$.

A 5.5. Gegeben seien drei verschiedene Punkte A, B, C. Man zeige:
a) Es ist $\mathfrak{D}r(A)(\circ) \cong \mathfrak{D}r(B)(\circ)$ (vgl. (5.13)).
b) Für $\delta \in \mathfrak{S}^2$ ist $\delta \in \mathfrak{D}r(A) \;\Leftrightarrow\; \delta \circ \widetilde{A} = \widetilde{A} \circ \delta$.
c) A, B, C sind genau dann nichtkollinear, wenn es in $\mathfrak{S}^2 \backslash \{id_{\mathbb{P}}\}$ Drehungen $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ um A bzw. B bzw. C gibt mit $\delta_A \circ \delta_B = \delta_C$.

A 5.6. Es seien $g \in \mathbb{G}$ und $h, k, l \in g \,\|\, .$ Man zeige: Ist $\tau \in \mathfrak{T}$ mit $\tau(g) = h$, so ist $\widetilde{g} \circ \widetilde{h} = \widetilde{k} \circ \widetilde{l} \;\Leftrightarrow\; \tau(k) = l$.

A 5.7. Sind α, φ Kollineationen von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$, so setzen wir $\alpha^{\varphi} := \varphi \circ \alpha \circ \varphi^{-1}$ und sagen, α wird durch φ in α^{φ} **transformiert**. Man zeige:
a) A ist genau dann Fixpunkt von α, wenn $\varphi(A)$ Fixpunkt von α^{φ} ist.
b) g ist genau dann Fixgerade von α, wenn $\varphi(g)$ Fixgerade von α^{φ} ist.

A 5.8. Man zeige: Ist $\varphi \in \Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ mit $\varphi \circ \widetilde{A} = \widetilde{A} \circ \varphi \;\forall\, A \in \mathbb{P}$, so ist $\varphi = id_{\mathbb{P}}$.

A 5.9. Man zeige: Ist $\varphi \in \mathfrak{B}_{\equiv}$, so ist $\widehat{\varphi} : \mathfrak{B}_{\equiv} \to \mathfrak{B}_{\equiv} : \alpha \to \alpha^{\varphi}$ (vgl. A 5.7.) ein Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{B}_{\equiv}(\circ)$, genannt **innerer Automorphismus** bzgl. φ. Es gelten die Aussagen
$\alpha^{\varphi \circ \psi} = (\alpha^{\psi})^{\varphi} \wedge (\alpha^{-1})^{\varphi} = (\alpha^{\varphi})^{-1} \wedge \alpha^{\varphi} \circ \beta^{\varphi} = (\alpha \circ \beta)^{\varphi} \;\; \forall\, \alpha, \beta, \varphi, \psi \in \mathfrak{B}_{\equiv}$.

A 5.10. Man zeige für $Aut_i(\mathfrak{B}_{\equiv}) := \{\widehat{\varphi} \mid \varphi \in \mathfrak{B}_{\equiv}\}$ (vgl. A 5.9.): $\kappa : \mathfrak{B}_{\equiv}(\circ) \to \to Aut_i(\mathfrak{B}_{\equiv})(\circ) : \varphi \to \widehat{\varphi}$ ist ein Gruppenisomorphismus. $Aut_i(\mathfrak{B}_{\equiv})(\circ)$ heißt **Gruppe der inneren Automorphismen** von $(\mathfrak{B}_{\equiv})(\circ)$.

Download free eBooks at bookboon.com

6 Winkel zwischen Geraden

Im folgenden sei $(\mathbb{P}, \equiv)$ stets eine normale euklidische Ebene. Zur Abkürzung der Schreibweise werden wir das Produkt $\varphi \circ \psi$ von Bewegungen im weiteren oft einfach in der Form $\varphi\psi$ schreiben.
Nach einleitenden Bemerkungen über Winkel werden wir zunächst eine geeignete Winkelvergleichung einführen und werden dann grundlegende Eigenschaften von Winkeln sowie den für alles weitere fundamentalen Kreiswinkelsatz beweisen.

Gemeinsam nachhaltig zum Erfolg.

Denn bei der REWE Group, einem der führenden Handels- und Touristikkonzerne Europas, ist Bewegung drin. Dafür sorgen unsere ca. 330.000 Mitarbeiter Tag für Tag: Sie liefern Tonnen von Waren, schicken Urlauber zu fernen Zielen oder verhandeln die günstigsten Preise. Sie halten die Welt am Laufen. Werden Sie Teil einer großen Gemeinschaft, die Großes bewirkt. Freuen Sie sich auf die Zusammenarbeit mit sympathischen Kollegen auf internationaler Ebene und erleben Sie, was Sie in unserer vielfältigen Marken- und Arbeitswelt bewegen können. Und durch individuelle Förderung bewegt sich auch Ihre Karriere, wohin immer Sie wollen.
Was bewegen Sie?

www.rewe-group.com/karriere
www.facebook.com/REWEGroupKarriere

Du bewegst.

330.000 Mitarbeiter
523 Berufe
1 Zukunft

REWE GROUP

REWE nahkauf PENNY toom BILLA MERKUR BIPA DER Touristik

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

A. Vorbemerkung über Winkel

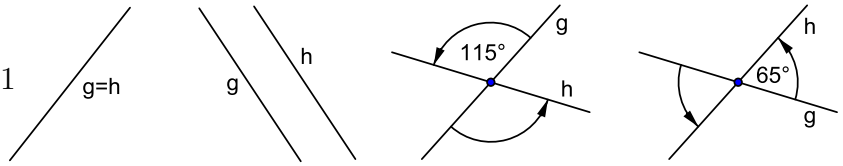
(6.1) Die Behandlung des Winkelbegriffes ist komplizierter, als gemeinhin angenommen wird. Dies ergibt sich vor allem dadurch, daß man zwischen mehreren Winkeltypen unterscheiden muß, wie dies z. B. in dem Aufsatz „Geometrie phänomenologisch“ von A. Baur und H. Freudenthal in [6] dargelegt wird, und daß für jeden Winkeltyp eine geeignete Maßbestimmung einzuführen ist. Wir werden uns hier mit demjenigen Winkeltyp befassen, der sich auf Geradenpaare bezieht, und werden erst in §14 auf weitere Winkeltypen eingehen.

Sind $g, h \in \mathbb{G}$, so wird das (geordnete) Paar (g, h) als **$\mathbb{G}$-Winkel** oder kurz als **Winkel** mit g als **erstem** und h als **zweitem Schenkel** bezeichnet. Die Möglichkeit $g \cap h = \varnothing$ wird hierbei nicht ausgeschlossen. Existiert $A \in g \cap h$, so wird A ein **Scheitel** von (g, h) genannt.
Wir bezeichnen (g, h) als **Nullwinkel** oder als **trivialen Winkel**, wenn $g \parallel h$ ist. Jeder nichttriviale Winkel hat offenbar genau einen Scheitel.

Es wird sich herausstellen, daß es bei vielen geometrischen Untersuchungen nicht auf das Messen von Winkeln, sondern nur auf das Vergleichen von Winkeln ankommt. Deshalb werden wir in diesem Paragraphen zunächst nur eine *Winkelvergleichung* und erst später eine *Winkelmessung* für die hier betrachteten $\mathbb{G}$-Winkel einführen.
Um von vornherein eine gewisse Vertrautheit im Umgang mit $\mathbb{G}$-Winkeln zu ermöglichen, beschreiben wir hier für die Anschauungsebene eine physikalisch-praktische Meßvorschrift, die mathematisch nicht begründet wird und die ohne Auswirkung auf die mathematischen Untersuchungen dieses Paragraphen bleibt (Figur 6.1):

Download free eBooks at bookboon.com

Figur 6.1



a) $\sphericalangle(g,h)=0°$ b) $\sphericalangle(g,h)=0°$ c) $\sphericalangle(g,h)=115°$ d) $\sphericalangle(g,h)=65°$

a), b) : Im Falle $g \parallel h$ ordnet man (g,h) die Größe $0°$ zu.
c), d): Ist $g \nparallel h$, so bestimmt man die Größe von (g,h) mit dem Winkelmesser, indem man die Grundlinie des Winkelmessers geeignet zentriert mit dem ersten Schenkel zur Deckung bringt und die Neigung des zweiten Schenkels auf der mathematisch-positiven Skala, die dem Uhrzeigersinn entgegenläuft, abliest. Es ist bei diesem Ableseverfahren unerheblich, auf welcher Seite des 1. Schenkels der Winkelmesser angesetzt wird.

In Figuren werden die Winkelbögen stets als gebogene Pfeile gezeichnet, die - mathematisch-positiv - vom ersten zum zweiten Schenkel führen.

B. Gleichsinnige Kongruenz

(6.2) Wir setzen uns das Ziel, für die in (6.1) definierten Winkel eine geeignete Winkelvergleichung einzuführen. Hierzu betrachten wir ZUNÄCHST(!) die Vergleichsmöglichkeit mit Hilfe gleichsinniger Kongruenz:
Wir nennen zwei Winkel $(g,h),(k,l) \in \mathbb{G}\times\mathbb{G}$ **gleichsinnig kongruent**, in Zeichen $(g,h) \mathrel{\widehat{\equiv}} (k,l)$, wenn eine gerade Bewegung φ mit $\varphi(g)=k \wedge \wedge \varphi(h)=l$ existiert.
Da $\mathfrak{S}^2$ eine Gruppe ist, ist $\mathrel{\widehat{\equiv}}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{G}\times\mathbb{G}$.
Es wird sich als vorteilhaft erweisen, die gleichsinnige Kongruenz von Winkeln mit gemeinsamem Scheitel auf eine Gleichung zwischen Spiegelungen zurückzuführen. Die Gestalt dieser Gleichung ergibt sich aus

(6.3) **Satz**. *Sind g,h,k,l kopunktale Geraden, so ist*
$$(g,h) \mathrel{\widehat{\equiv}} (k,l) \;\Leftrightarrow\; \widetilde{g}\circ\widetilde{h} = \widetilde{k}\circ\widetilde{l} \wedge (g \equiv k \vee h \equiv l).$$

Beweis: Es sei $M \in g \cap h \cap k \cap l$. Wir gehen von $g \neq h \wedge k \neq l$ aus, denn im Fall $g = h \vee k = l$ ist der Satz offenbar gültig.
1) Es sei $(g,h) \mathrel{\widehat{\equiv}} (k,l)$, d. h. es gebe ein $\varphi \in \mathfrak{S}^2$ mit $\varphi(g) = k \wedge \varphi(h) = l$. Dann ist $\varphi(M) = \varphi(g) \cap \varphi(h) = M$, und nach (5.8) gibt es ein $s \in \mathbb{G}$ mit $\varphi = \widetilde{s}\,\widetilde{g}$. Mit (5.2)(7) und (5.9) folgt nun $\widetilde{k} = \widetilde{s}\,\widetilde{g}\,\widetilde{g}\,\widetilde{g}\,\widetilde{s} = \widetilde{s}\,\widetilde{g}\,\widetilde{s}$ und daraus $\widetilde{l} = \widetilde{s}\,\widetilde{g}\,\widetilde{h}\,\widetilde{g}\,\widetilde{s} = \widetilde{s}\,\widetilde{g}\,\widetilde{s}\,\widetilde{g}\,\widetilde{h} = \widetilde{k}\,\widetilde{g}\,\widetilde{h}$, also $\widetilde{k}\,\widetilde{l} = \widetilde{g}\,\widetilde{h}$.

Download free eBooks at bookboon.com

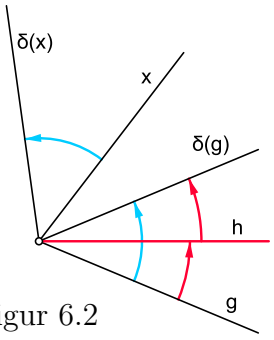
2) Es gelte $\widetilde{g}\widetilde{h} = \widetilde{k}\widetilde{l} \wedge g \equiv k$. Nach (5.24) gibt es dann ein $s \in \mathbb{G}$ mit $s \ni M \wedge \widetilde{s}(g) = k$, also mit $\widetilde{s}\widetilde{g}\widetilde{s} = \widetilde{k}$ gemäß (5.2)(7). Dann ist $\widetilde{s}\widetilde{g}(g) = k$, und aus $\widetilde{l} = \widetilde{k}\widetilde{g}\widetilde{h} = \widetilde{s}\widetilde{g}\widetilde{s}\widetilde{g}\widetilde{h} = \widetilde{s}\widetilde{g}\widetilde{h}\widetilde{g}\widetilde{s}$ folgt $\widetilde{s}\widetilde{g}(h) = l$ gemäß (5.2) (7).
3) Ist $\widetilde{g}\widetilde{h} = \widetilde{k}\widetilde{l} \wedge h \equiv l$, so ist $\widetilde{h}\widetilde{g} = \widetilde{l}\widetilde{k}$, und mit 2) folgt dann $(h, g) \mathrel{\widehat{\equiv}} (l, k)$, also $(g, h) \mathrel{\widehat{\equiv}} (k, l)$. □

(6.4) In der Anschauungsebene ist die Bedingung $g \equiv k \vee h \equiv l$ aus (6.3) nach (5.25) stets von selbst erfüllt, d. h. dort gilt
$(*)$ $[(g, h) \mathrel{\widehat{\equiv}} (k, l) \Leftrightarrow \widetilde{g} \circ \widetilde{h} = \widetilde{k} \circ \widetilde{l}]$ für je vier kopunktale Geraden g, h, k, l.
Dies bedeutet, daß zwei Winkel mit gemeinsamem Scheitel in der Anschauungsebene genau dann gleichsinnig kongruent sind, wenn die zugehörigen Drehungen, die sich durch Spiegelung an den Schenkeln (in der gegebenen Reihenfolge) ergeben, übereinstimmen.
Diese Beobachtung läßt sich ergänzen durch

(6.5) **Satz**. *Sind g, h, x kongruente kopunktale Geraden, so gelten für die Drehung $\delta := \widetilde{h} \circ \widetilde{g}$ die folgenden beiden Aussagen (Figur 6.2):*
(1) Es ist $(g, \delta(g)) \mathrel{\widehat{\equiv}} (x, \delta(x))$.
(2) Es ist $(g, h) \mathrel{\widehat{\equiv}} (h, \delta(g))$.

Demnach ist der Winkel zwischen den die Drehung δ bestimmenden Geraden g, h anschaulich stets halb so groß wie der durch die Drehung δ festgelegte Winkel $(x, \delta(x))$ (Figur 6.2).

Beweis: (1) Nach (5.24) gibt es ein $m \in \mathbb{G}$ mit $\widetilde{m}(g) = x$, also mit $\widetilde{x}\widetilde{m}(g) = x$, und nach (5.13) ist dann $\widetilde{x}\widetilde{m}(\delta(g)) = \delta(\widetilde{x}\widetilde{m}(g)) = \delta(x)$.
(2) Nach (5.24) gibt es ein $n \in \mathbb{G}$ mit $\widetilde{n}(g) = h$, also mit $\widetilde{h}\widetilde{n}(g) = h$, und dann ist $\widetilde{h}\widetilde{n}(h) = \widetilde{h}\widetilde{n}\widetilde{n}(g) = = \widetilde{h}(g) = \widetilde{h}\widetilde{g}(g) = \delta(g)$. □



Figur 6.2

C. Konformität

(6.6) Die bisher verwendete Form der Winkelvergleichung mit Hilfe der Relation $\mathrel{\widehat{\equiv}}$ weist noch gewisse Unvollkommenheiten auf. So wird es sinnvoll sein, alle Nullwinkel als gleich groß zu betrachten. Dies kann die Relation $\mathrel{\widehat{\equiv}}$ aber nicht leisten, denn für $g, h \in \mathbb{G}$ mit $g \cap h = \varnothing$ ist (g, g) nicht kongruent zu (g, h). Darüber hinaus möchte man Winkel (g, h), (k, l) auch dann vergleichen können, wenn weder g, k noch h, l kongruent sind (vgl. (5.24), (5.25), (6.3), (6.4)).

Download free eBooks at bookboon.com

Aufgrund von (6.3) und (6.4) bietet es sich nun an, die durch die Relation $\widehat{\equiv}$ bereits eingeführte Winkelvergleichung wie folgt zu erweitern:

Die Winkel (g,h), (k,l) sollen jedenfalls dann als „konform“, also als „gleichgestaltig“, betrachtet werden, wenn

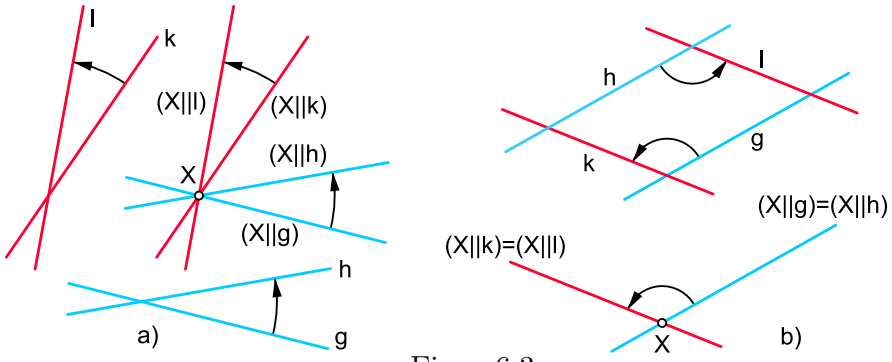
$$(g,h)\,\widehat{\equiv}\,(k,l) \vee \widetilde{g}\circ\widetilde{h} = \widetilde{k}\circ\widetilde{l} \vee (g \parallel h \wedge k \parallel l)$$

gilt. Damit diese Forderung auf eine Äquivalenzrelation führt, gehen wir mit Blick auf (6.3) von der folgenden Definition aus:

(6.7) Sind g,h,k,l Geraden der normalen euklidischen Ebene $(\mathbb{P},\equiv)$, so heißen die Winkel (g,h), (k,l) genau dann **konform**, in Zeichen:

$$\boxed{(g,h) \simeq (k,l)}, \text{ wenn } (*) \boxed{(X \parallel g)^{\sim} \circ (X \parallel h)^{\sim} = (X \parallel k)^{\sim} \circ (X \parallel l)^{\sim}}$$

für ein $X \in \mathbb{P}$ erfüllt ist, wobei $(X \parallel m)^{\sim}$ für $m \in \mathbb{G}$ die Spiegelung an der Geraden $(X \parallel m)$ ist (Figur 6.3).



Figur 6.3

Aus der Definition der Konformität folgt unmittelbar, daß alle Nullwinkel konform sind und daß

$$(\diamond) \quad [\, g \parallel h \wedge k \parallel l \Rightarrow (g,k) \simeq (h,l)\,] \text{ für } g,h,k,l \in \mathbb{G}$$

gilt (Figur 6.3.b)). Weiter bemerken wir:

Ist $(*)$ für ein $X \in \mathbb{P}$ erfüllt und ist $Y \in \mathbb{P}$ sowie $\tau := \tau_{X,Y}$, so ist

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow (\tau\,(X \parallel g)^{\sim}\,\tau^{-1}) \circ (\tau\,(X \parallel h)^{\sim}\,\tau^{-1}) = (\tau\,(X \parallel k)^{\sim}\,\tau^{-1}) \circ (\tau\,(X \parallel l)^{\sim}\,\tau^{-1}) \\ &\Leftrightarrow (Y \parallel g)^{\sim} \circ (Y \parallel h)^{\sim} = (Y \parallel k)^{\sim} \circ (Y \parallel l)^{\sim},\end{aligned}$$

wobei die letzte Äquivalenz aus (3.12), (3.14) und (5.2)(7) folgt. Demnach ist $(*)$ für *alle* $X \in \mathbb{P}$ gültig, sobald $(*)$ für *ein* $X \in \mathbb{P}$ erfüllt ist.

Zunächst zeigen wir nun

Download free eBooks at bookboon.com

(6.8) **Satz**. *Die Relation* $\simeq$ *ist eine Äquivalenzrelation auf* $\mathbb{G}\times\mathbb{G}$.

Beweis: Gegeben seien $(g,h),(k,l),(m,n) \in \mathbb{G}\times\mathbb{G}$. 1) Aus der Definition von $\simeq$ folgt $[(g,h) \simeq (g,h)] \wedge [(g,h) \simeq (k,l) \Rightarrow (k,l) \simeq (g,h)]$.
2) Ist $(g,h) \simeq (k,l)$ und $(k,l) \simeq (m,n)$, so gibt es $X, Y \in \mathbb{P}$ derart, daß $(*)$ aus (6.7) sowie $(**)$ $[\,(Y \parallel k)^{\sim} \circ (Y \parallel l)^{\sim} = (Y \parallel m)^{\sim} \circ (Y \parallel n)^{\sim}\,]$ gültig sind. Nach (6.7) dürfen wir aber o.B.d.A. von $Y = X$ ausgehen, und dann führen $(*)$ und $(**)$ auf $(g,h) \simeq (m,n)$. □

(6.9) **Satz**. *Sind* g,h,k,l *kopunktale Geraden, so ist*
$(g,h) \simeq (k,l) \Leftrightarrow \widetilde{g} \circ \widetilde{h} = \widetilde{k} \circ \widetilde{l}$.
Demnach sind Winkel mit gemeinsamem Scheitel genau dann konform, wenn die zugehörigen Drehungen, die sich durch Spiegelung an den Schenkeln (in der gegebenen Reihenfolge) ergeben, übereinstimmen (vgl. (6.4), (6.5)).

Beweis: Es sei $M \in g \cap h \cap k \cap l$. Nach (6.7) ist $(*)$ aus (6.7) genau dann für ein $X \in \mathbb{P}$ gültig, wenn $(*)$ mit M anstelle von X erfüllt ist. □

(6.10) **Satz**. *Sind* $g,h \in \mathbb{G}$ *und ist* $\varphi \in \mathfrak{S}^2$, *so ist* $(g,h) \simeq (\varphi(g),\varphi(h))$, *d. h. jede gerade Bewegung ist* **winkeltreu**.

Beweis: O.B.d.A. sei $g \nparallel h \wedge \varphi(g) \nparallel \varphi(h)$, denn andernfalls sind (g,h) und $(\varphi(g),\varphi(h))$ Nullwinkel. Für $X \in \mathbb{P}$ ergibt sich dann (vgl. (3.15)) $((X \parallel g),(X \parallel h)) \mathrel{\widehat{\equiv}} (g,h) \mathrel{\widehat{\equiv}} (\varphi(g),\varphi(h)) \mathrel{\widehat{\equiv}} ((X \parallel \varphi(g)),(X \parallel \varphi(h)))$, und daraus folgt mit (6.3) und (6.7) die Behauptung. □

(6.11) **Corollar**. *Für* $g,h,k,l \in \mathbb{G}$ *gilt* $[\,(g,h) \mathrel{\widehat{\equiv}} (k,l) \Rightarrow (g,h) \simeq (k,l)\,]$.

(6.12) **Satz**, *Sind* g,h,k,l *Geraden mit* $g \cap h \neq \varnothing \ \wedge \ k \cap l \neq \varnothing$, *so ist* $(g,h) \mathrel{\widehat{\equiv}} (k,l) \Leftrightarrow [(g,h) \simeq (k,l) \wedge (g \equiv k \vee h \equiv l)]$.

Beweis: 1) Es sei $(g,h) \simeq (k,l) \wedge (g \equiv k \vee h \equiv l)$. Dann existiert ein $X \in \mathbb{P}$ mit $(X \parallel g) \equiv (X \parallel k) \vee (X \parallel h) \equiv (X \parallel l)$, nämlich $X := g \cap k$ im Falle $g \nparallel k \wedge g \equiv k$, $X := h \cap l$ im Falle $h \nparallel l \wedge h \equiv l$, und X beliebig im Falle $g \parallel k \wedge h \parallel l$. Da $(*)$ aus (6.7) für dieses X gültig ist, führt (6.3) auf $((X \parallel g),(X \parallel h)) \mathrel{\widehat{\equiv}} ((X \parallel k),(X \parallel l))$, und wegen $g \cap h \neq \varnothing \wedge k \cap l \neq \varnothing$ erhalten wir dann $(g,h) \mathrel{\widehat{\equiv}} ((X \parallel g),(X \parallel h)) \mathrel{\widehat{\equiv}} ((X \parallel k),(X \parallel l)) \mathrel{\widehat{\equiv}} (k,l)$ (vgl. (3.15)). 2) In umgekehrter Richtung folgt die Behauptung aus (6.11). □

(6.13) Nach (6.11) sind zwei gleichsinnig kongruente Winkel stets konform, d. h. die Relation $\simeq$ ist eine Erweiterung der Relation $\mathrel{\widehat{\equiv}}$.

Umgekehrt geht aus (6.12) und (5.22) hervor, daß Konformität in der

Download free eBooks at bookboon.com

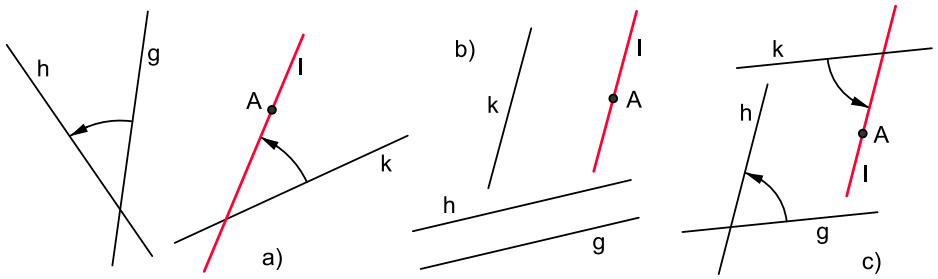
Anschauungsebene dasselbe wie gleichsinnige Kongruenz bedeutet, solange man sich auf Winkel bezieht, die einen Scheitel besitzen. Lediglich bei Nullwinkeln besteht ein Unterschied: Während alle Nullwinkel konform sind (vgl. (6.7)), sind nicht alle Nullwinkel kongruent (vgl. (6.6)).

Deshalb ist Konformität in der Anschauungsebene nichts anderes als gleichsinnige Kongruenz mit einer „Sonderregelung“ für Nullwinkel.

D. Grundeigenschaften

Die folgende Aussage bestätigt in Verbindung mit den vorangegangenen Aussagen, daß das in (6.6) gesteckte Ziel erreicht wurde und daß die Äquivalenzklassen bzgl. $\simeq$ gerade die angemessene „Größe“ haben:

(6.14) **Abtragbarkeit von Winkeln**. *Sind $g,h,k \in \mathbb{G}$ und ist $A \in \mathbb{P}$, so gibt es genau ein $l \in \mathbb{G}$ mit $l \ni A \ \wedge \ (g,h) \simeq (k,l)$. Dabei ist $(g \parallel h \Leftrightarrow k \parallel l)$ und $(g \parallel k \Leftrightarrow h \parallel l)$ (Figur 6.4).*



Figur 6.4

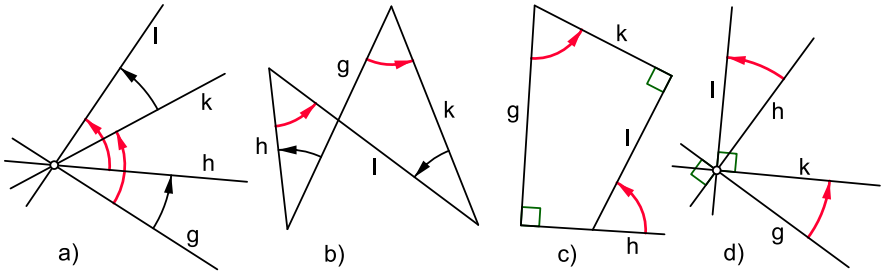
Beweis: Es sei $X \in \mathbb{P}$, $g' := (X \parallel g)$, $h' := (X \parallel h)$ und $k' := (X \parallel k)$.
1) Nach (5.9) gibt es genau ein $l' \in \mathbb{G}$ mit $\widetilde{k'}\widetilde{g'}\widetilde{h'} = \widetilde{l'}$, also mit $\widetilde{g'}\widetilde{h'} = \widetilde{k'}\widetilde{l'}$, und für $l := (A \parallel l')$ gilt dann $(g,h) \simeq (k,l)$.
2) Es sei $m \in \mathbb{G}$ mit $m \ni A \wedge (g,h) \simeq (k,m)$. Ist $m' := (X \parallel m)$, so führt (6.7) auf $\widetilde{m'} = \widetilde{k'}\widetilde{g'}\widetilde{h'} = \widetilde{l'}$, also auf $m' = l'$ und damit auf $m = l$.
3) Die verbleibende Behauptung ergibt sich aus $[\, g \parallel h \Leftrightarrow g' = h' \Leftrightarrow \Leftrightarrow k' = l' \Leftrightarrow k \parallel l)\,] \ \wedge \ [\, g \parallel k \Leftrightarrow g' = k' \Leftrightarrow h' = l' \Leftrightarrow h \parallel l)\,]$. □

Weiter zeigen wir

(6.15) **Schenkelaustauschsatz**. *Für $g,h,k,l \in \mathbb{G}$ ist*
$(g,h) \simeq (k,l) \Leftrightarrow (h,g) \simeq (l,k) \Leftrightarrow (g,k) \simeq (h,l)$ *(Figur 6.5 a),b)).*

Beweis: Für $X \in \mathbb{P}$, $g' := (X \parallel g)$, $h' := (X \parallel h)$, $k' := (X \parallel k)$, $l' := (X \parallel l)$ ist $[\widetilde{g'}\widetilde{h'} = \widetilde{k'}\widetilde{l'} \Leftrightarrow \widetilde{h'}\widetilde{g'} = \widetilde{l'}\widetilde{k'} \Leftrightarrow \widetilde{g'} = \widetilde{h'}\widetilde{l'}\widetilde{k'} \Leftrightarrow \widetilde{g'}\widetilde{k'} = \widetilde{h'}\widetilde{l'}\,]$. □

Download free eBooks at bookboon.com



Figur 6.5

(6.16) Sind $g, h \in \mathbb{G}$, so wird (g, h) genau dann ein **rechter Winkel** genannt, wenn $g \perp h$ ist. Für rechte Winkel gilt

(6.17) **Satz**. *Alle rechten Winkel sind konform. Sind $g, h, k, l \in \mathbb{G}$ mit $(g, h) \simeq (k, l)$, so ist $g \perp h \Leftrightarrow k \perp l$.*

Beweis: Es seien $g, h, k, l \in \mathbb{G}$ sowie $X \in \mathbb{P}$ und $g' := (X \| g)$, $h' := (X \| h)$, $k' := (X \| k)$, $l' := (X \| l)$. Nach (4.3) und (5.16) ist $[g \perp h \Leftrightarrow \widetilde{g'}\widetilde{h'} = \widetilde{X}]$ und $[k \perp l \Leftrightarrow \widetilde{k'}\widetilde{l'} = \widetilde{X}]$, und dies impliziert mit (6.7)$(*)$ die Behauptung. □

(6.18) **Corollar**. *Sind $g, h, k, l \in \mathbb{G}$ mit $g \perp h \wedge k \perp l$, so gilt $(g, k) \simeq (h, l)$ (Figur 6.5 c), d)).*

Beweis: (6.17) und (6.15). □

Die Sonderstellung der rechten Winkel wird unterstrichen durch

(6.19) **Satz**. *Sind $g, h \in \mathbb{G}$ mit $g \nparallel h$, so ist* $[\, g \perp h \;\Leftrightarrow\; (g, h) \simeq (h, g)\,]$.

Beweis: Nach (5.16) ist $g \perp h \Leftrightarrow \widetilde{g}\widetilde{h} = \widetilde{h}\widetilde{g}$. □

(6.20) Wir nennen $\mathbb{G}$-Winkel (g, h), (k, l) **gegensinnig konform**, wenn $(g, h) \simeq (l, k)$ ist. Als Gegenstück zu (6.10) erhalten wir

(6.21) **Satz**, *Sind $g, h \in \mathbb{G}$ und ist $\psi \in \mathfrak{S}^3$, so ist $(g, h) \simeq (\psi(h), \psi(g))$, d. h. jede ungerade Bewegung ist gegensinnig winkeltreu.*

Beweis: Ist $g \| h$, so ist $\psi(h) \| \psi(g)$, also $(g, h) \simeq (\psi(h), \psi(g))$. Ist $g \nparallel h$, so ist $\widetilde{g}\widetilde{h} = (\widetilde{g}\widetilde{h}\widetilde{g})(\widetilde{g}\widetilde{g}\widetilde{g})$, also $(g, h) \simeq (\widetilde{g}(h), \widetilde{g}(g))$ gemäß (5.2)(7) und (6.9), und für $\varphi := \psi\widetilde{g} \in \mathfrak{S}^2$ führt (6.10) dann auf $(g, h) \simeq (\widetilde{g}(h), \widetilde{g}(g)) \simeq$ $\simeq (\varphi\widetilde{g}(h), \varphi\widetilde{g}(g)) \simeq (\psi(h), \psi(g))$. □

(6.22) **Satz**. *Sind $g, h \in \mathbb{G}$ mit $g \cap h \neq \varnothing$, so ist $k \in \mathbb{G}$ genau dann eine Symmetrieachse von (g, h), wenn $(g, k) \simeq (k, h)$ ist. Deshalb heißen die Symmetrieachsen von (g, h) auch Winkelhalbierende von (g, h).*

Beweis: Es ist $\widetilde{k}(g) = h \Leftrightarrow \widetilde{g}\widetilde{k} = \widetilde{k}\widetilde{h}$ (vgl. (5.2)(7), (5.24), (6.9)). □

Download free eBooks at bookboon.com

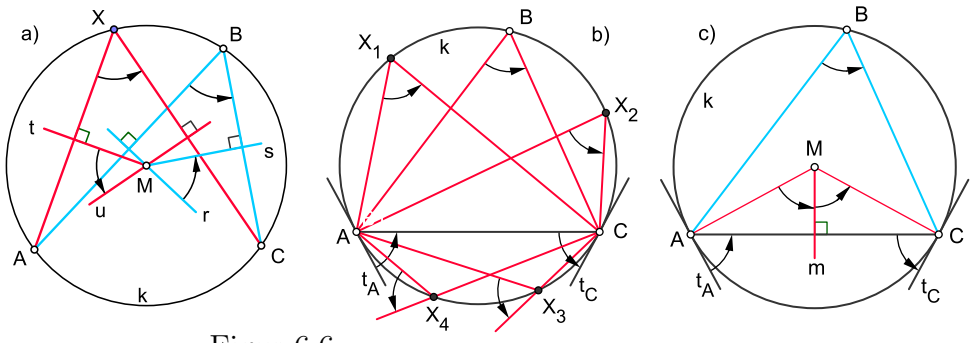
E. Winkel und Kreise

(6.23) Wir wenden uns nun den Beziehungen zwischen Winkeln und Kreisen zu. Dazu vereinbaren wir für $X, Y, Z \in \mathbb{P}$:

Ist $Y \notin \{X, Z\}$, so sei $\langle XYZ\rangle := (<X, Y>, <Y, Z>)$, d.h. $\langle XYZ\rangle$ ist der Winkel mit dem 1. Schenkel $<X, Y>$, mit dem 2. Schenkel $<Y, Z>$ und mit Y als Scheitel.
Ist k ein Kreis und ist $X \in k$ oder $Y \in k$, so sei $<X, Y>_k$ im Falle $X = Y$ die Tangente an k in X und sonst die Gerade $<X, Y>$.
Ist k eine Gerade und ist $X \in k$ oder $Y \in k$, so sei $<X, Y>_k = k$ im Falle $X = Y$ und $<X, Y>_k = <X, Y>$ andernfalls.
Ist $k \in \mathbb{G} \cup \mathfrak{K}$, so setzen wir $\langle XYZ\rangle_k := (<X, Y>_k, <Y, Z>_k)$ im Falle $X, Z \in k \vee Y \in k$.
Mit diesen Notationen erhalten wir

(6.24) **Kreiswinkelsatz**. *Sind $A, B, C \overset{\in}{\neq} \mathbb{P}$ und ist $k \in \mathbb{G} \cup \mathfrak{K}$ mit $k \ni A, B, C$, so gilt für $X \in \mathbb{P}$ (Figur (6.6) a), b)):*

$$\boxed{X \in k \;\Leftrightarrow\; \langle AXC\rangle_k \simeq \langle ABC\rangle}.$$



Figur 6.6

Beweis: Wir gehen davon aus, daß k ein Kreis ist, denn andernfalls ist der Satz eine Aussage über Nullwinkel. Ist $X \in <A, C>\backslash k$, so gilt offenbar $\langle AXC\rangle_k \not\simeq \langle ABC\rangle$; im weiteren sei deshalb $X \in \{A, C\} \cup (\mathbb{P} \setminus <A, C>)$. Nun sei M der Mittelpunkt von k, und es sei $r = (M \perp <A, B>)$ sowie $s = (M \perp <B, C>), t = (M \perp <A, X>_k), u = (M \perp <X, C>_k)$ (Figur 6.6 a)). Ist $X \in k$, so wird (M, C) durch $\widetilde{r}\widetilde{s}$ und $\widetilde{t}\widetilde{u}$ auf (M, A) abgebildet, und mit (5.18) folgt $\widetilde{r}\widetilde{s} = \widetilde{t}\widetilde{u}$. Umgekehrt führt $\widetilde{r}\widetilde{s} = \widetilde{t}\widetilde{u}$ auf $A = \widetilde{t}\widetilde{u}(C)$, also auf $\widetilde{t}(A) = \widetilde{u}(C) \in <A, X>_k \cap <X, C>_k = \{X\}$ und damit auf $X = \widetilde{t}(A) \in k$. Demnach ist $X \in k \Leftrightarrow \widetilde{r}\widetilde{s} = \widetilde{t}\widetilde{u} \overset{(6.9)}{\Leftrightarrow} (r, s) \simeq (t, u) \overset{(6.18)}{\Leftrightarrow} \langle ABC\rangle \simeq \langle AXC\rangle_k$. □

Download free eBooks at bookboon.com

Als Corollarien erhalten wir

(6.25) **Peripheriewinkelsatz**. *Vier verschiedene Punkte A,B,C,X liegen genau dann gemeinsam auf einem Kreis oder einer Geraden, wenn* $\langle AXC\rangle \simeq \langle ABC\rangle$ *ist (Figur (6.6) a), b)).*

(6.26) **Tangentenwinkelsatz**. *Sind* A, B, C *nichtkollineare Punkte und ist* $k = k(A, B, C)$*, so gilt* $\langle AAC\rangle_k \simeq \langle ABC\rangle \simeq \langle ACC\rangle_k$.
(Vgl. Figur (6.6) b), c) mit $t_A = <A, A>_k$ *und* $t_C = <C, C>_k$*).*

(6.27) Anmerkung. Der Peripheriewinkelsatz, der oft auch *Randwinkelsatz* oder *Umfangswinkelsatz* genannt wird, schlägt eine Brücke zwischen Kreisgeometrie und Winkelgeometrie. Als Spezialfall umfaßt er den Satz des THALES. Der Kreiswinkelsatz faßt den Peripheriewinkelsatz und den Tangentenwinkelsatz zu einer Aussage zusammen, durch die sich gelegentlich Fallunterscheidungen vermeiden lassen.
Ergänzend zeigen wir

(6.28) **Mittenwinkelsatz.** *Sind* A, B, C *drei verschiedene Punkte eines Kreises* k *mit dem Mittelpunkt* M *und ist* $m := m_{A,C}$*, so gilt* $\langle ABC\rangle \simeq (<A, M>, m) \simeq (m, <M, C>)$ *(Figur 6.6 c)).*

Beweis: Nach (4.12)(2) und (6.18) ist $\langle AAC\rangle_k \simeq (<A, M>, m)$ und $\langle ACC\rangle_k \simeq (m, <M, B>)$. Daraus folgt mit (6.26) die Behauptung. □

Bundesnachrichtendienst

einzigartige Ideen
einzigartige Vielfalt
Sie sind einzigartig? Wir auch!
einzigartige Lösungen
einzigartiger Auftrag
einzigartiger Arbeitgeber

Wir suchen
Ingenieure/innen der Elektro- und Informationstechnik
Informatiker/innen
mit den Abschlüssen FH/Bachelor

Mehr Informationen zum Thema Karriere beim BND unter
www.bundesnachrichtendienst.de (Karriere)

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

F. Geometrische Winkelmessung

(6.29) Für die weiteren Untersuchungen installieren wir in der normalen euklidischen Ebene $(\mathbb{P}, \equiv)$ einen Winkelmesser derart, daß die „Meßstriche“, die im weiteren auch „Meßnadeln“ oder „Öffnungen“ genannt werden, genau die Äquivalenzklassen bzgl. $\simeq$ repräsentieren. Mit diesem Ansatz läßt sich in einfacher Weise eine Winkeladdition einführen, die uns zu weiteren geometrischen Aussagen führen wird.

Als erstes wählen wir zwei beliebige verschiedene Punkte $0, 1$ in $\mathbb{P}$, die bei allen weiteren Betrachtungen festbleiben.
Wir bezeichnen 0 als **Ursprung** und 1 als **Einheitpunkt**. Später werden wir ausgehend von 0 und 1 für unsere Ebene ein Koordinatensystem entwickeln.
Im Moment betrachten wir lediglich die Menge $\mathbb{G}_0 := \{g \in \mathbb{G} \,|\, g \ni 0\}$ aller Geraden durch 0. Die Elemente von $\mathbb{G}_0$ heißen im weiteren auch **Meßnadeln** oder **Öffnungen**, und die spezielle Meßnadel $\mathfrak{n} := <0, 1>$ wird im weitern als **0°-Öffnung** bezeichnet.
Ist (g, h) ein $\mathbb{G}$-Winkel, so gibt es nach (6.14) genau ein $m \in \mathbb{G}_0$ mit $(g, h) \simeq (\mathfrak{n}, m)$. Wir notieren m als $\measuredangle(g, h)$ und nennen $\measuredangle(g, h)$ die **Meßnadel** oder die **Öffnung** oder das (geometrische) **Winkelmaß** von (g, h).
Da $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist, folgt

(1) $(g, h) \simeq (k, l) \;\Leftrightarrow\; \measuredangle(g, h) = \measuredangle(k, l) \;\; \forall\, (g, h), (k, l) \in \mathbb{G}\mathsf{x}\mathbb{G}$,

und insbesondere ist $\mathfrak{n}$ die Meßnadel der Nullwinkel. Entsprechend ist $\mathfrak{r} := (0 \perp \mathfrak{n})$ die Meßnadel der 90°-Winkel, und deshalb wird $\mathfrak{r}$ auch als **90°-Öffnung** bezeichnet.

Auf $\mathbb{G}_0$ soll nun eine Addition engeführt werden, die das Aneinandersetzen von Winkeln beschreibt. Um eine handliche Notation zu erhalten, vereinbaren wir:
Sind $g, h, k, l \in \mathbb{G}_0$ mit $\widetilde{g}\widetilde{h}\widetilde{k} = \widetilde{l}$, so werde $ghk := l$ die **4. Spiegelungsgerade** zu (g, h, k) genannt. Da entsprechendes für die zugehörigen Spiegelungen gilt, ergeben sich für $g, h, k, l, t \in \mathbb{G}_0 \wedge m := \measuredangle(g, h)$ die Regeln

(2) $ghk = khg \wedge ggh = h = hgg \wedge (ghk)lt = g(hkl)t = gh(klt)$,

(3) $(g, h) \simeq (\mathfrak{n}, m) \;\wedge\; \widetilde{g}\widetilde{h} = \widetilde{\mathfrak{n}}\widetilde{m} \;\wedge\; \mathfrak{n}gh = \measuredangle(g, h) \;\wedge\; ghg = \widetilde{g}(h)$.

Sind nun $g, h \in \mathbb{G}_0$, so soll $g \oplus h$ diejenige Meßnadel $s \in \mathbb{G}_0$ sein, die entsteht, wenn man ausgehend von g den Winkel $(\mathfrak{n}, h)$ abträgt, d.h. es soll $(\mathfrak{n}, h) \simeq (g, s)$ sein. Nun ist $(\mathfrak{n}, h) \simeq (g, s) \Leftrightarrow \widetilde{\mathfrak{n}}\widetilde{h} = \widetilde{g}\widetilde{s} \Leftrightarrow g\mathfrak{n}h = s$, und deshalb setzen wir $\boxed{g \oplus h := g\mathfrak{n}h \;\; \forall\, g, h \in \mathbb{G}_0}$.
Damit ergibt sich

(4) $\mathbb{G}_0(\oplus)$ *ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element* $\mathfrak{n}$. *Das Negative von* $g \in \mathbb{G}_0$ *ist* $\ominus g := \widetilde{\mathfrak{n}}(g) = \mathfrak{n}g\mathfrak{n}$.

Download free eBooks at bookboon.com

Beweis: Für $g, h, k \in \mathbb{G}_0$ ist $g \oplus h = g\mathfrak{n}h = h\mathfrak{n}g = h \oplus g \in \mathbb{G}_0 \wedge g \oplus \mathfrak{n} = g\mathfrak{n}\mathfrak{n} = g$ $\wedge (g \oplus h) \oplus k = (g\mathfrak{n}h)\mathfrak{n}k = g\mathfrak{n}(h\mathfrak{n}k) = g \oplus (h \oplus k) \wedge g \oplus (\ominus g) = g\mathfrak{n}(\mathfrak{n}g\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$. □

Die folgende Aussage zeigt, daß unser Kalkül das Gewünschte leistet:

(6.30) **Additivität des Winkelmaßes**. *Sind* $g, h, k \in \mathbb{G}$, *so gilt*

$$\boxed{\measuredangle(g,h) \oplus \measuredangle(h,k) = \measuredangle(g,k)} \text{ und damit } \boxed{\measuredangle(h,g) = \ominus\measuredangle(g,h)}.$$

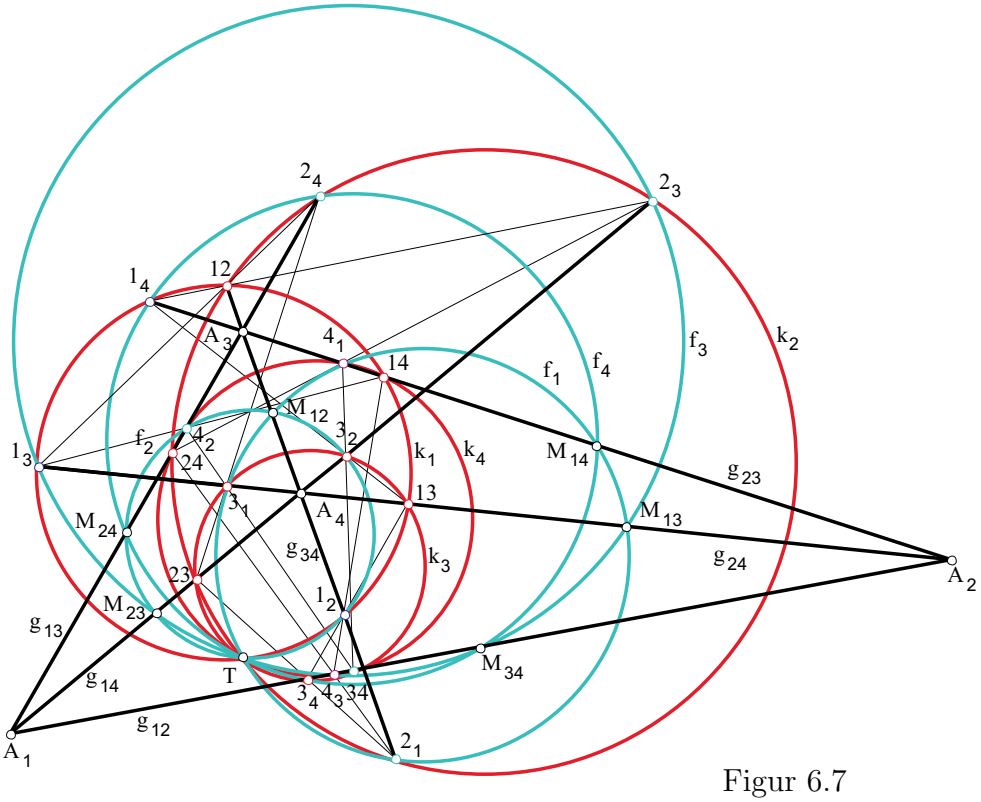
Beweis: Es seien $g', h', k' \in \mathbb{G}_0$ mit $g \parallel g' \wedge h \parallel h' \wedge k \parallel k'$. Dann ist $\measuredangle(g,h) =$ $= \measuredangle(g',h') = \mathfrak{n}g'h' \wedge \measuredangle(h,k) = \measuredangle(h',k') = \mathfrak{n}h'k' \wedge \measuredangle(g,k) = \measuredangle(g',k') = \mathfrak{n}g'k'$, also $\measuredangle(g,h) \oplus \measuredangle(h,k) = (\mathfrak{n}g'h')\mathfrak{n}(\mathfrak{n}h'k') = \mathfrak{n}g'k' = \measuredangle(g,k)$. □

CAREER Venture
eine Marke von MSW & Partner
facebook.com/CareerVenture
google.com/+Career-VentureDe
twitter.com/CareerVenture
Haben Sie Potenzial?
women fall
in Kooperation mit Jobguide
30. November/01. Dezember 2015 Seeheim
Bewerbungsschluss: 01.11.2015
Auszug unserer Referenzen:
Deloitte. DB Mobility Networks Logistics BOSCH Technik fürs Leben Struktur Management Partner TATA CONSULTANCY SERVICES
career-venture.de

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

G. Ein 8-Kreise-Satz für schlichte Vierecke

Als Anwendung des Kreiswinkelsatzes beweisen wir hier eine Aussage über schlichte Vierecke, die als Spezialfall den berühmten Berührsatz von FEUERBACH umfaßt.



Figur 6.7

(6.31) Wir betrachten eine Teilmenge $\mathbb{V} := \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ von $\mathbb{P}$, die aus vier verschiedenen Punkten besteht, welche zu je dreien nichtkollinear sind. Wir nennen $\mathbb{V}$ ein *schlichtes Viereck*, da keine Reihenfolge für die *Ecken* A_1, A_2, A_3, A_4 vorgegeben ist.

Soll eine Eigenschaft des Vierecks $\mathbb{V}$ bewiesen werden, so ist es hinreichend, dies für eine einzige Auswahl der Eckenindizes 1, 2, 3, 4 zu tun, um die Aussage für jede zugehörige Permutation sicherzustellen. Von dieser Möglichkeit des Beweisens machen wir im weiteren häufig Gebrauch, ohne dies immer neu anzumerken.

Download free eBooks at bookboon.com

Im folgenden seien x, y, z, w die Zahlen 1, 2, 3, 4, aber nicht unbedingt in dieser Reihenfolge. Wir verwenden folgende *Notationen* (vgl. Figur 6.7):

$g_{xy} := g_{yx} := <A_x, A_y> =$ Verbindungsgerade von A_x, A_y,
$M_{xy} := M_{yx} :=$ Mitte von $\{A_z, A_w\}$,
$f_x := k(M_{xy}, M_{xz}, M_{xw}) =$ Kreis durch M_{xy}, M_{xz}, M_{xw},
$x_y :=$ Fußpunkt des Lotes von A_x auf g_{zw},
$k_x := k(x_y, x_z, x_w) =$ Kreis oder Gerade durch x_y, x_z, x_w,
$xy :=$ Punkt von g_{zw} mit $k_x \cap g_{zw} = \{x_y, xy\}$,
$\triangle_x := \{A_y, A_z, A_w\} =$ Gegendreieck von A_x,
$m_{xy} :=$ Thaleskreis über $\{A_x, A_y\}$.

Das Symbol „$\overset{k}{=}$“ bedeute „Gleichheit aufgrund von (6.24) bezüglich k“. Entsprechend verwenden wir abkürzend

„W“ für „Winkelkalkül gemäß (6.14)–(6.19), (6.29),(6.30)“,
„SY“ für „Symmetrie gemäß (5.3), (5.26), (6.21)“ und
„PA“ für „Parallelität $\|$ gemäß (6.7)($\diamond$)“.

Nach (4.13) liegt das Seitenmittendreieck $\{M_{xy}, M_{xz}, M_{xw}\}$ von $\triangle_x$ parallel zu $\triangle_x$ und hat f_x als Umkreis.
Wir nennen f_1, f_2, f_3, f_4 die *Feuerbachkreise von* $\mathbb{V}$.
Da A_x auf keiner der Seitengeraden g_{yz}, g_{yw}, g_{zw} des Dreiecks $\triangle_x$ liegt, sind die Lotfußpunkte x_y, x_z, x_w von A_x bzgl. $\triangle_x$ paarweise verschieden, und k_x ist eindeutig bestimmt. Wir nennen k_1, k_2, k_3, k_4 die *Fußpunktkreise von* $\mathbb{V}$ (auch, falls es sich um Geraden handelt).

Zunächst zeigen wir

(1) *Die Kreise f_1, f_2, f_3, f_4 sind entweder paarweise verschieden oder identisch. Ist $f_1 \neq f_2$, so existiert ein Punkt T mit $f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap f_4 = \{T\}$, und es gilt $f_x \cap f_y \cap f_z = \{T\}$ für $\{x, y, z, w\} = \{1, 2, 3, 4\}$.*

Beweis: Es sei $T \in f_2 \cap f_3$ mit $T \neq M_{23}$ im Falle $|f_2 \cap f_3| \neq 1$. Ist $T \in \{M_{24}, M_{34}\}$, so ist $T \in f_4$. Ist $T \notin \{M_{24}, M_{34}\}$ (vgl. Figur 6.8), so erhalten wir $\alpha := \measuredangle\langle A_2A_1A_4\rangle \overset{PA}{=} \measuredangle\langle M_{23}M_{13}M_{34}\rangle \overset{f_3}{=} \measuredangle\langle M_{23}TM_{34}\rangle_{f_3}$ und

$$\varepsilon := \measuredangle\langle A_4A_1A_3\rangle \overset{PA}{=} \measuredangle\langle M_{24}M_{12}M_{23}\rangle \overset{f_2}{=} \measuredangle\langle M_{24}TM_{23}\rangle_{f_2}, \text{ also}$$

$$(*) \quad \measuredangle\langle M_{24}TM_{34}\rangle \overset{W}{=} \measuredangle\langle M_{24}TM_{23}\rangle_{f_2} \oplus \measuredangle\langle M_{23}TM_{34}\rangle_{f_3} =$$
$$= \varepsilon \oplus \alpha \overset{W}{=} \alpha \oplus \varepsilon \overset{W}{=} \measuredangle\langle A_2A_1A_3\rangle \overset{PA}{=} \measuredangle\langle M_{24}M_{14}M_{34}\rangle,$$

Download free eBooks at bookboon.com

denn im Falle $f_2 \cap f_3 = M_{23} = T$ haben f_2 und f_3 in T die gleiche Tangente, da T hier aus Symmetriegründen mit den Mittelpunkten von f_2 und f_3 kollinear liegt.
Aus $(*)$ und (6.24) folgt $T \in f_4$. In jedem Fall gilt somit $T \in f_4$, und Vertauschen der Indizes $1, 4$ liefert $T \in f_1$. Ist jetzt $f_2 = f_3$, so gibt es für T drei Wahlmöglichkeiten, d.h. es ist $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$. Entsprechend führt $f_1 = f_2$ auf $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$. Im Falle $f_1 \neq f_2 \wedge f_2 \neq f_3$ ist $f_1 \cap f_2 \cap f_3 = (f_1 \cap f_2) \cap (f_2 \cap f_3) = \{T, M_{12}\} \cap \{T, M_{23}\} = \{T\}$. $\square$

SEW-EURODRIVE—Driving the world

SEW EURODRIVE

Gestalten Sie die Technologien der Zukunft!

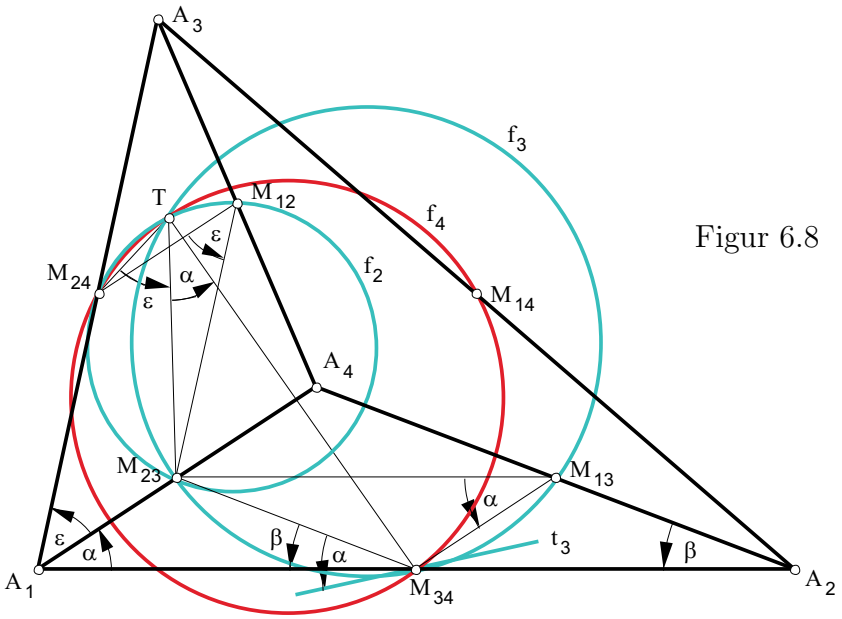
Clevere Köpfe mit Lust auf Neues gesucht. Wir sind einer der Innovationsführer weltweit im Bereich Antriebstechnologie und bieten Studierenden der Fachrichtungen Elektrotechnik, Maschinenbau, Mechatronik, (Wirtschafts-) Informatik oder auch Wirtschaftsingenieurwesen zahlreiche attraktive Einsatzgebiete. Sie möchten uns zeigen, was in Ihnen steckt? Dann herzlich willkommen bei SEW-EURODRIVE!

Jährlich 120 Praktika und Abschlussarbeiten

www.karriere.sew-eurodrive.de

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more



Figur 6.8

Mit der Notation $\measuredangle gh := \measuredangle(g,h)$ für $g,h \in \mathbb{G}$ folgt außerdem

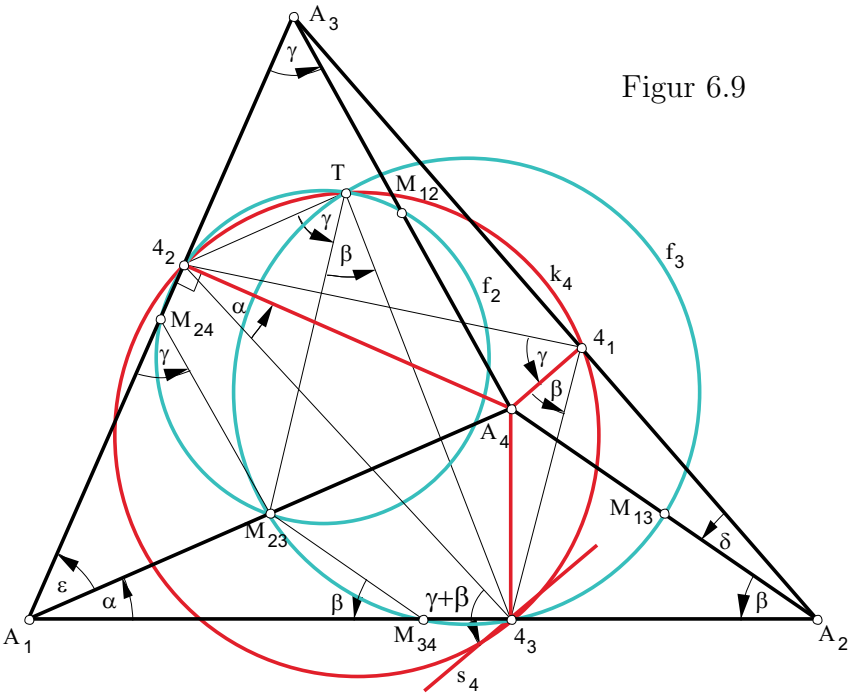
(2) *Ist t_3 die Tangente an f_3 in M_{34}, so gilt $\measuredangle g_{12}t_3 = \measuredangle g_{12}g_{14} \oplus \measuredangle g_{12}g_{24}$.*

Beweis: Ist $\beta := \measuredangle g_{24}g_{12}$, so ist $\ominus\beta \overset{W}{=} \measuredangle g_{12}g_{24} \overset{PA}{=} \measuredangle\, g_{12} {<} M_{23}, M_{34}{>}$. Mit $\alpha \overset{PA}{=} \langle M_{23}M_{13}M_{34}\rangle \overset{f_3}{=} \measuredangle {<} M_{23}, M_{34}{>} t_3$ folgt $\measuredangle g_{12}g_{14} \oplus g_{12}g_{24} = \alpha \ominus \beta = \overset{W}{=} (\ominus\beta) \oplus \alpha \overset{W}{=} \measuredangle g_{12}t_3$ (vgl. Figur 6.8). $\square$

(3) *Es ist $f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap f_4 \subseteq k_1 \cap k_2 \cap k_3 \cap k_4$.*

Beweis: Wieder sei $T \in f_2 \cap f_3$ mit $T \neq M_{23}$ im Falle $|f_2 \cap f_3| \neq 1$.
Ist $T \in \{4_2, 4_3\}$, so ist $T \in k_4$. Ist $T \notin \{4_2, 4_3\}$, so erhalten wir mit Hilfe von (4.14) (vgl. Figur 4.10 und Figur 6.9):

Download free eBooks at bookboon.com



Figur 6.9

$\measuredangle\langle 4_2 4_1 A_4\rangle \overset{m_{34}}{=} \measuredangle\langle A_1 A_3 A_4\rangle =: \gamma \overset{PA}{=} \measuredangle\langle A_1 M_{24} M_{23}\rangle \overset{f_2}{=} \measuredangle\langle 4_2 T M_{23}\rangle_{f_2}$ und
$\measuredangle\langle A_4 4_1 4_3\rangle \overset{m_{24}}{=} \measuredangle\langle A_4 A_2 A_1\rangle =: \beta \overset{PA}{=} \measuredangle\langle M_{23} M_{34} A_1\rangle \overset{f_3}{=} \measuredangle\langle M_{23} T 4_3\rangle_{f_3}$.
Durch Addieren folgt $\measuredangle\langle 4_2 4_1 4_3\rangle \overset{W}{=} \gamma \oplus \beta \overset{W}{=} \measuredangle\langle 4_2 T 4_3\rangle$, und mit (6.24) impliziert dies $T \in k_4$. Durch Variation der Indizes und ggf. durch Variation von T ergibt sich damit die Behauptung. □

Sind $r, s \in \{f_1, \ldots, f_4, k_1, \ldots, k_4\}$, so sei $\measuredangle rs$ die Öffnung des Winkels aus den Tangenten an r und s in $T \in f_1 \cap f_2 \cap f_3$. Bezeichnet $\mathfrak{r}$ die Öffnung der rechten Winkel und ist $\delta := \measuredangle g_{23} g_{24}$, so folgt

(4) *Für* $\{x, y, z, w\} = \{1, 2, 3, 4\}$ *gilt (vgl. Figur 6.9)*

(a) $\measuredangle\langle M_{xy} T w_y\rangle_{f_y} = \measuredangle g_{xw} g_{xz}$,
(b) $\measuredangle k_x f_y = \mathfrak{r} \oplus \measuredangle g_{zw} g_{xy} = \measuredangle k_y f_x$,
(c) $\measuredangle k_x k_y = \measuredangle f_y f_x$,
(d) $\measuredangle k_4 f_4 = \alpha \oplus \gamma \oplus \delta \oplus \mathfrak{r}$.

Beweis: (a) folgt aus $\measuredangle\langle M_{23} T 4_3\rangle_{f_3} = \beta = \measuredangle g_{24} g_{21}$.
Ist t_3' die Tangente an f_3 in 4_3 und s_4 die Tangente an k_4 in 4_3 (vgl. Figur 6.8, 6.9), so gilt $\measuredangle t_3' g_{12} \overset{SY}{=} \measuredangle g_{12} t_3 \overset{(2)}{=} \alpha \ominus \beta$ und $\measuredangle <4_2, 4_3> s_4 \overset{k_4}{=} \beta \oplus \gamma$ sowie

Download free eBooks at bookboon.com

$\measuredangle g_{12}s_4 \overset{W}{=} (\alpha\oplus\varepsilon)\oplus\mathfrak{r}\ominus\alpha\oplus(\beta\oplus\gamma) \overset{W}{=} \varepsilon\oplus\beta\oplus\gamma\oplus\mathfrak{r}$, also $\measuredangle k_4f_3 \overset{SY}{=} \measuredangle t_3's_4 \overset{W}{=} \measuredangle t_3'g_{12}\oplus$ $\oplus\measuredangle g_{12}s_4 = (\alpha\ominus\beta)\oplus(\varepsilon\oplus\beta\oplus\gamma\oplus\mathfrak{r}) \overset{W}{=} \mathfrak{r}\oplus\alpha\oplus\varepsilon\oplus\gamma \overset{W}{=} \mathfrak{r}\oplus\measuredangle g_{12}g_{43}$. Damit ist (b) und gemäß W auch (c) bewiesen, und wir erhalten außerdem $\measuredangle k_4f_4 \overset{W}{=} \measuredangle k_4f_1\oplus\measuredangle f_1k_3\oplus\measuredangle k_3f_4 \overset{(b)}{=} \mathfrak{r}\ominus\mathfrak{r}\oplus\mathfrak{r}\oplus\measuredangle g_{23}g_{41}\ominus\measuredangle g_{24}g_{13}\oplus\measuredangle g_{12}g_{34} =$ $= \mathfrak{r}\oplus(\delta\oplus\beta\oplus\alpha)\ominus(\beta\oplus\alpha\oplus\varepsilon)\oplus(\alpha\oplus\varepsilon\oplus\gamma) \overset{W}{=} \alpha\oplus\gamma\oplus\delta\oplus\mathfrak{r}$, also (4). □

Aus (6.31)(1)–(4) ergibt sich unmittelbar

(6.32) **Berührsatz von Feuerbach.** *Jeder Berührkreis eines Dreiecks berührt dessen Seitenmittenkreis (vgl. Figur 5.9).*

Beweis: $\{A_1, A_2, A_3\}$ sei ein Dreieck mit kongruenten Seitengeraden, und A_4 sei Mittelpunkt eines Berührkreises dieses Dreiecks (vgl. (5.29)). Wir verwenden die Bezeichnungen aus (6.31) und betrachten einen Punkt $T \in f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap k_4$. Da g_{12}, g_{23}, g_{31} Tangenten von k_4 sind, folgt $s_4 = g_{12}$, $\delta = \beta$ und $<4_2, 4_3> \perp g_{14}$ (vgl. (5.26) und Figur 6.9), also $\delta\oplus\gamma = \beta\oplus\gamma =$ $= \measuredangle<4_2, 4_3> g_{12} = \mathfrak{r}\ominus\alpha$ und damit $\measuredangle k_4f_4 \overset{(6.31)(4)(d)}{=} \mathfrak{r}\oplus\mathfrak{r}=\mathfrak{n}$. □

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus (6.31) folgt außerdem

(6.33) **Satz**. *Wenn A_1, A_2, A_3, A_4 auf einem Kreis liegen, dann sind $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{G}$. Andernfalls sind $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathfrak{K}$.*

Beweis: Gemäß (6.24) liegen $A_1, \ldots, A_4$ genau dann auf einem Kreis, wenn $\beta = \ominus\gamma$ ist, und $4_1, 4_2, 4_3$ sind genau dann kollinear, wenn $\beta\oplus\gamma = \mathfrak{n}$ ist (vgl. Figur 6.9). □

(6.34) **Satz**. *Liegen A_1, A_2, A_3, A_4 nicht auf einem Kreis (vgl. Figur 6.7) und ist $\{x, y, z, w\} = \{1, 2, 3, 4\}$, so gilt $xy = yx \in k_x \cap k_y \cap g_{zw}$. Überdies sind xy, x_z, y_w kollinear, ebenso auch xy, x_w, y_z.*

Beweis: a) Es sei $3_1 \neq 4_2$. Dann ist $\measuredangle\langle 3_2 3_1 4_2\rangle \overset{m_{34}}{=} \measuredangle\langle 3_2 A_3 A_1\rangle \overset{m_{13}}{=} \measuredangle<3_2, 3_4>g_{12}$ $\overset{k_3}{=} \measuredangle\langle 3_2 3_1 (34)\rangle_{k_3}$, also $<3_1, 4_2> = <3_1, 34>_{k_3}$, und ebenso ist $<4_2, 3_1> =$ $= <4_2, 43>_{k_4}$. Wegen $\measuredangle<3_1, 34>_{k_3} g_{12} = \measuredangle\langle 3_1(34)3_4\rangle_{k_3} = \measuredangle\langle 3_1 3_2 3_4\rangle \neq \mathfrak{n}$ (vgl. (6.33)) ist $<3_1, 4_2> \nparallel g_{12}$, d.h. es ist $34 = 43 \in <3_1, 4_2> \cap g_{12} \cap k_3 \cap k_4$. b) Entsprechend a) gilt $34 = 43 \in <3_2, 4_1> \cap g_{12} \cap k_3 \cap k_4$ im Falle $3_2 \neq 4_1$. c) Ist $3_1 = 4_2 \wedge 3_2 = 4_1$, so ist $g_{13} \perp g_{24} \wedge g_{23} \perp g_{14}$. Dann ist A_4 der Höhenschnittpunkt von $\{A_1, A_2, A_3\}$, und mit (4.14) folgt $k_3 = k_4$, also $34 = M_{34} = 43$. Zusammen mit a), b) führt dies auf die Behauptung. □

(6.35) *Schlußbemerkung.* Mit (6.31), (6.33) und (6.34) sind alle Lagebeziehungen der Figur 6.7 bewiesen. Weiteres hierzu findet sich in [41].

Download free eBooks at bookboon.com

H. Aufgaben

Man zeige:

A 6.1. Sind k, l Kreise mit den Mittelpunkten M, N und ist $k \cap l = \{U, V\}$ mit $U \neq V$, so sind $M, N \in m_{U,V}$.

A 6.2. Sind k, l zwei verschiedene Kreise durch den Punkt B, so gilt $k \cap l = \{B\}$ genau dann, wenn die Tangente an k in B zugleich die Tangente an l in B ist.

A 6.3. Sind $A, B \in \mathbb{P}$ und $k \in \mathfrak{K}$ mit $A \notin k \wedge B \in k \wedge |<A, B> \cap k| = 2$, so existiert genau ein Kreis l durch A mit $l \cap k = \{B\}$.

A 6.4. Sind $A, B, C \in \mathbb{P}$, $g \in \mathbb{G}$ und $k, l \in \mathfrak{K}$ mit $k \cap l = \{B\} \wedge g \cap k = \{A, B\} \wedge g \cap l = \{B, C\}$, so ist die Tangente an k in A parallel zur Tangente an l in C.

A 6.5. Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so sind äquivalent:
(1) $\{A, B, C\}$ ist gleichschenklig mit C als Spitze.
(2) Es ist $AC \equiv CB$.
(3) Es gibt eine Spiegelung σ mit $\sigma(A) = B \wedge \sigma(C) = C$.
(4) $(C \parallel <A, B>)$ ist eine Winkelhalbierende von $(<A, C>, <B, C>)$.
(5) Es ist $(<C, A>, <A, B>) \simeq (<A, B>, <B, C>)$.
Die Äquivalenz zwischen (2) und (5) wird auch die *Eselsbrücke* genannt.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

A 6.6. Ein Dreieck $\{A, B, C\}$ mit den Seitengeraden g, h, k ist genau dann gleichseitig, wenn es gleichwinklig ist, d. h. wenn $(g, h) \simeq (h, k) \simeq (k, g)$ gilt.

A 6.7. *Kleiner Satz von* PASCAL. Sind $A_1, ..., A_6$ (nicht notwendig verschiedene) Punkte eines Kreises k und sind g_{ij} Geraden mit $g_{ij} \cap k = \{A_i, A_j\}$ für $i, j \in \{1, ..., 6\}$, so gilt: $g_{12} \parallel g_{45} \wedge g_{23} \parallel g_{56} \;\Rightarrow\; g_{34} \parallel g_{61}$.

A 6.8. Sind g, h, x kopunktale Geraden, so gelten für die Drehung $\delta := \widetilde{h} \circ \widetilde{g}$ die folgenden beiden Aussagen (vgl. (6.5) und Figur 6.2):
(1) Es ist $(g, \delta(g)) \simeq (x, \delta(x))$.
(2) Es ist $(g, h) \simeq (h, \delta(g))$.

A 6.9. Sind $g \in \mathbb{G}$ und $\tau \in \mathfrak{T}$, so ist $\tau' := \widetilde{g} \circ \tau \circ \widetilde{g} \in \mathfrak{T}$ mit $\tau' \circ \widetilde{g} = \widetilde{g} \circ \tau$. Ferner gilt $[\,(g, h) \simeq (k, l) \;\Leftrightarrow\; \widetilde{g} \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{l} \circ \widetilde{k} \in \mathfrak{T}\,] \;\forall\; g, h, k, l \in \mathbb{G}$.

Download free eBooks at bookboon.com

Teil II

EUKLIDISCHE EBENEN

7 Definition euklidischer Ebenen

A. Motivation

Der Bereich der bisher betrachteten normalen euklidischen Ebenen soll nun erweitert werden zum Bereich der euklidischen Ebenen.

Ein Hauptgrund für eine solche Bereichserweiterung ist das Verlangen auszuloten, wie weit bestimmte Sätze der klassischen Geometrie tragen. Im vorliegenden Fall stellen wir uns die Aufgabe herauszufinden, was man alles beweisen kann, wenn man sich im wesentlichen nur auf den Peripheriewinkelsatz stützt.

Dieser Satz besagt ja, daß sich der Begriff des Kreises in direkter Weise auf die Begriffe „Winkel“ und „Winkelvergleichung“ zurückführen läßt.

Deshalb werden wir jetzt affine Ebenen betrachten, in denen eine Winkelvergleichung mit gewissen Grundeigenschaften gegeben ist und in denen die Kreise durch diese Winkelvergleichung beschrieben werden. Solche Ebenen wollen wir „*euklidische Ebenen*“ nennen.

Eine Erörterung der Eigenschaften solcher Ebenen wird darauf hinauslaufen, daß wir noch einmal „ganz von vorne“ beginnen, also (vorübergehend) auf die im Teil I gewonnenen Erkenntnisse verzichten und allein mit der gegebenen Winkelvergleichung arbeiten.

Wir werden also zunächst keinen der bereits vertrauten Begriffe „$\equiv$“, „Mittelsenkrechte“, „Orthogonalität“, „Mitte von zwei Punkten“, „Bewegung“, „Mittelpunkt eines Kreises“ sowie auch keinen der damit verbundenen Sätze verwenden.

Ein solches Vorgehen mag auf den ersten Blick unökonomisch erscheinen. Es wird sich jedoch zeigen, daß wir die Beweise, die wir ja ohnehin

Download free eBooks at bookboon.com

führen würden, um etwa für die Anschauungsebene weitere Erkenntnisse zu gewinnen, derart gestalten können, daß sich dieses Vorgehen „unter eingeschränkten Bedingungen“ praktisch *nicht* erschwerend auswirkt.

Der eigentliche Vorteil dieses Vorgehens wird in dem Moment sichtbar werden, in dem wir anhand der algebraischen Darstellung euklidischer Ebenen, die in diesem Teil II entwickelt wird, einen genauen Überblick über die sämtlichen Modelle solcher Ebenen erhalten.

Die algebraische Darstellung ist nun allerdings keineswegs das Hauptziel dieses Teils II. Sie wird sich vielmehr in natürlicher Weise aus einer Betrachtung der Ähnlichkeitsabbildungen ergeben und wird dann sogleich zur Gewinnung weiterer geometrischer Sätze, z. B. der Strahlensätze und des Sekantensatzes, herangezogen werden.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

B. Definition

(7.1) Im folgenden sei $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine beliebige affine Ebene mit $\mathbb{P}$ als Punktmenge und mit $\mathbb{G}$ als Geradenmenge (vgl. (2.2)). Die Sätze (3.2) und (3.3), die das Schnittverhalten paralleler Geraden beschreiben, sind in $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ gültig, wie aus den zugehörigen Beweisen zu ersehen ist.
Wie in (3.1) bezeichne $(A \parallel g)$ die Parallele durch A zu g. Für jedes $A \in \mathbb{P}$ enthält das Sternbüschel $A^* := \{g \in \mathbb{G} \mid g \ni A\}$ nach (3.2)(2) wenigstens drei verschiedene Geraden.

In Übereinstimmung mit (6.1) wird jedes Element (g, h) von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ als **Winkel** mit g als **erstem** und h als **zweitem Schenkel** bezeichnet, und im Falle $A \in g \cap h$ heißt A ein **Scheitel** von (g, h). Ein Winkel (g, h) heißt **Nullwinkel** oder **trivialer Winkel**, wenn $g \parallel h$ ist. Definitionsgemäß besitzt jeder nichttriviale Winkel einen eindeutig bestimmten Scheitel.

Wir denken uns nun eine Äquivalenzrelation $\simeq$ auf $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ gegeben, genannt **Winkelvergleichung**, und bezeichnen zwei Winkel (g, h), (k, l) genau dann als **konform**, wenn sie bzgl. $\simeq$ in Relation stehen, wenn also $(g, h) \simeq (k, l)$ gilt. Die Negation von $\simeq$ notieren wir als $\not\simeq$.

Wir definieren die *Kreise* derart, daß der Peripheriewinkelsatz bzgl. der gegebenen Relation $\simeq$ erfüllt ist. Wir setzen also fest:
Sind A, B, C drei nichtkollineare Punkte, so heiße $k(A, B, C) :=$
$= \{A, C\} \cup \{X \in \mathbb{P} \setminus \{A, C\} \mid (<A, B>, <B, C>) \simeq (<A, X>, <X, C>)\}$
ein **Kreis**, genauer der **Umkreis** des geordneten Dreiecks (A, B, C).

Die Menge aller derart definierten Kreise werde mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet. Definitionsgemäß gilt $A, B, C \in k(A, B, C)$, d. h. jeder Kreis enthält wenigstens drei nichtkollineare Punkte.

Es ist zu beachten, daß die Definition von $k(A, B, C)$ an die Reihenfolge von A, B, C gebunden ist. Deshalb folgt aus unserer Definition lediglich, daß drei nichtkollineare Punkte stets auf mindestens einem Kreis liegen.

Das Tripel $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ *heißt* **euklidische Ebene**, *wenn neben den schon genannten Voraussetzungen die folgenden beiden Axiome erfüllt sind:*

(W) **Winkelaxiom**. *Zu* $g, h, k \in \mathbb{G}$ *und* $A \in \mathbb{P}$ *gibt es stets genau ein* $l \in \mathbb{G}$ *mit* $l \ni A \ \wedge \ (g, h) \simeq (k, l)$.
Dabei gilt $(g \parallel h \ \Leftrightarrow \ k \parallel l)$ *und* $(g \parallel k \ \Leftrightarrow \ h \parallel l)$ *(Figur 6.4).*

(U) **Umkreisaxiom**. *Für je drei nichtkollineare Punkte* A, B, C *ist* $k(A, B, C) = k(C, A, B)$.

Download free eBooks at bookboon.com

(7.2) Wegen (2.5), (4.6), (6.14) und (6.25) ist *jede* normale euklidische Ebene $(\mathbb{P}, \equiv)$ mit der Geradenmenge $\mathbb{G}$ und mit der in (6.7) eingeführten Winkelvergleichung $\simeq$ eine euklidische Ebene.
In diesem Sinne dürfen wir sagen, daß die normalen euklidischen Ebenen *spezielle* euklidische Ebenen sind. Dabei ist es im Moment natürlich noch offen, ob es *nichtnormale* euklidische Ebenen gibt. In jedem Falle dürfen wir aber davon ausgehen, daß jeder Satz, der in allen euklidischen Ebenen gilt, insbesondere auch in allen normalen euklidischen Ebenen gültig ist.

Während das Axiom (W) neben der Abtragbarkeit von Winkeln auch die Verträglichkeit zwischen Winkelvergleichung und Parallelitätsrelation sicherstellt, wird durch das Axiom (U) praktisch gewährleistet, daß durch drei verschiedene Punkte höchstens ein Kreis geht, wie wir sehen werden. Wendet man (U) zweimal an, so folgt sofort $k(A,B,C) = k(C,A,B) = k(B,C,A)$, d. h. (U) besagt, daß die Punkte A, B, C zyklisch vertauscht werden dürfen.

C. Isomorphie

(7.3) Sind $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ und $(\mathbb{P}', \mathbb{G}', \simeq')$ euklidische Ebenen und ist φ eine Kollineation von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ auf $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ mit
$(*) \quad (g,h) \simeq (k,l) \;\Leftrightarrow\; (\varphi(g), \varphi(h)) \simeq' (\varphi(k), \varphi(l))$ für alle $g, h, k, l \in \mathbb{G}$,
so heißt φ ein **Isomorphismus** von $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ auf $(\mathbb{P}', \mathbb{G}', \simeq')$, im Falle $\mathbb{P} = \mathbb{P}' \wedge \mathbb{G} = \mathbb{G}' \wedge \simeq = \simeq'$ auch ein **Automorphismus** von $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Die Eigenschaft $(*)$ bezeichnen wir als **Konformitätstreue**, denn sie besagt, daß jede bestehende Konformität zwischen Winkeln bei Anwendung von φ und von φ^{-1} erhalten bleibt.

Euklidischen Ebenen $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ und $(\mathbb{P}', \mathbb{G}', \simeq')$ heißen **isomorph**, in Zeichen: $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq) \cong (\mathbb{P}', \mathbb{G}', \simeq')$, wenn ein Isomorphismus von $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ auf $(\mathbb{P}', \mathbb{G}', \simeq')$ existiert. Offenbar besitzt $\cong$ die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

(7.4) Wir werden uns später überlegen, daß die in (2.5) und (7.3) eingeführten Isomorphiebegriffe für normale euklidische Ebenen übereinstimmen.

8 Winkel und Kreise in euklidischen Ebenen

Im folgenden wollen wir Eigenschaften von Kreisen euklidischer Ebenen herleiten. Dazu denken wir uns eine euklidische Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ im Sinne von §7 vorgegeben.
Wir nennen Punkte $A_1, ..., A_r (r \in \mathbb{N}^*)$ **konzyklisch**, wenn sie gemeinsam auf einem Kreis liegen. Überdies setzen wir $\langle XYZ\rangle := \langle X, Y, Z\rangle :=$ $= (<X, Y>, <Y, Z>)$ für $X, Y, Z \in \mathbb{P}$ mit $Y \neq X, Z$.

A. Grundeigenschaften der Kreise

Als direkte Folgerung aus Axiom (W) ergibt sich zunächst

(8.1) **Satz**. *Sind $g, h, k, l \in \mathbb{G}$, so gilt:*
(1) Aus $(g \parallel h \wedge k \parallel l) \vee (g \parallel k \wedge h \parallel l)$ folgt $(g, h) \simeq (k, l)$.
(2) Im Falle $(g, h) \simeq (k, l)$ gilt
$(g \parallel h \Leftrightarrow k \parallel l) \wedge (g \parallel k \Leftrightarrow h \parallel l) \wedge (g \nparallel h \Leftrightarrow k \nparallel l) \wedge (g \nparallel k \Leftrightarrow h \nparallel l)$.

Weiter zeigen wir:

(8.2) **Satz**. *Drei nichtkollineare Punkte liegen stets auf genau einem Kreis. Drei verschiedene Punkte eines Kreises sind stets nichtkollinear.*

Beweis: A, B, C seien drei nichtkollineare Punkte. Dann gilt:

1) *Ist $D \in k(A, B, C) \backslash \{A, C\}$, so sind A, D, C nichtkollinear, und es ist $k(A, B, C) = k(A, D, C)$.*

Beweis: Definitionsgemäß ist $\langle A, B, C\rangle \simeq \langle A, D, C\rangle$, und nach (8.1) sind

Download free eBooks at bookboon.com

A, D, C dann nichtkollinear, da $<A, B> \nparallel <B, C>$ ist. Da $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist, ist $\langle A, X, C\rangle \simeq \langle A, B, C\rangle \Leftrightarrow \langle A, X, C\rangle \simeq \langle A, D, C\rangle$ $\forall\, X \in \mathbb{P}\backslash\{A, C\}$, also $X \in k(A, B, C) \Leftrightarrow X \in k(A, D, C)$.

2) *Aus* $\{R, S, T\} = \{A, B, C\}$ *folgt* $k(R, S, T) = k(A, B, C)$.

Beweis: a) Gibt es ein $X \in k(A, B, C)\backslash\{A, B, C\}$, so ist $k(A, B, C) \overset{1)}{=} = k(A, X, C) \overset{(U)}{=} k(X, C, A) \overset{1)}{=} k(X, B, A) \overset{(U)}{=} k(A, X, B) \overset{1)}{=} k(A, C, B)$, und daraus folgt mit Axiom (U) die Behauptung.
b) Ist $k(A, B, C) = \{A, B, C\}$, so ist nach a) auch $k(A, C, B) = \{A, B, C\}$, und daraus folgt mit (U) die Behauptung.

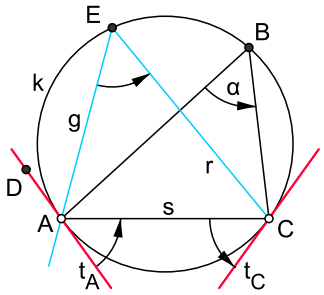
3) *Sind* $R, S, T \in k(A, B, C)$ *mit* $|\{R, S, T\}| = 3$, *so sind* R, S, T *nichtkollinear, und es ist* $k(A, B, C) = k(R, S, T)$.

Beweis: Nach (2) können wir ggf. durch eine Umbenennung der Elemente A, B, C von $R \notin \{A, C\} \wedge T \neq C$ ausgehen. Dann ist $k(A, B, C) \overset{1)}{=} = k(A, R, C) \overset{(U)}{=} k(C, A, R) \overset{1)}{=} k(C, T, R) \overset{(U)}{=} k(R, C, T) \overset{1)}{=} k(R, S, T)$, wobei sich mit 1) nacheinander die Nichtkollinearität von $\{A, R, C\}$, $\{C, T, R\}$ und $\{R, S, T\}$ ergibt.

4) *Mit* 1)–3) *ist* (8.2) *bewiesen.* □

B. Der Kreiswinkelsatz

(8.3) Aufgrund von (8.2) bezeichnen wir $k(A, B, C)$ als den **Umkreis** des Dreiecks $\{A, B, C\}$, und wie in (4.13) nennen wir die Gerade g eine **Passante** bzw. **Tangente** bzw. **Sekante** von (oder bzgl.) $k(A, B, C)$, wenn $|g \cap k(A, B, C)| = 0$ bzw. $= 1$ bzw. $= 2$ ist. In Übereinstimmung mit (4.12)(2) und (6.26) erhalten wir nun für alle euklidischen Ebenen



Figur 8.1

(8.4) **Tangentenlemma** *(Figur 8.1).*
Sind A, B, C *drei nichtkollineare Punkte, so existieren genau eine Gerade* t_A *durch* A *mit* $t_A \cap k(A, B, C) = \{A\}$ *und genau eine Gerade* t_C *durch* C *mit* $t_C \cap k(A, B, C) = \{C\}$. *Es gilt* $(t_A, <A, C>) \simeq \langle ABC\rangle \simeq (<A, C>, t_C)$ *und* $(<C, A>, t_A) \simeq \langle CBA\rangle \simeq (t_C, <C, A>)$.

Beweis: Es sei $k := k(A, B, C) \overset{(8.2)}{=} k(C, B, A)$, $\alpha := \langle ABC\rangle$ und $\beta := \langle CBA\rangle$.
1) Nach Axiom (W) gibt es ein $t_A \in \mathbb{G}$ mit $t_A \ni A \wedge \beta \simeq (<C, A>, t_A)$,

Download free eBooks at bookboon.com

und nach (8.1) ist $t_A \nparallel <C, A>$. Gäbe es ein $D \in t_A \cap k$ mit $D \neq A$, so wäre $(<C, D>, t_A) = \langle C, D, A\rangle \simeq \beta \simeq (<C, A>, t_A)$, und mit (8.1) ergäbe sich $<C, D> = <C, A>$, also $D = A$. Demnach ist $t_A \cap k = \{A\}$ (vgl. Figur 8.1).
2) Nach Axiom (W) gibt es genau ein $s \in \mathbb{G}$ mit $s \ni C \wedge (t_A, s) \simeq \alpha$, und wegen (8.1) ist $s \nparallel t_A$. Wäre $s \cap t_A = D \neq A$, so wäre $D \in k$, also $|t_A \cap k| = 2$. Folglich ist $s = <A, C>$ und $(t_A, <A, C>) \simeq \alpha$.
3) Ist $g \in \mathbb{G}$ mit $g \ni A \wedge g \neq t_A$, so gibt es nach Axiom (W) ein $r \in \mathbb{G}$ mit $r \ni C \wedge (g, r) \simeq \alpha \simeq (t_A, s)$. Wegen (8.1) ist $r \nparallel g, s$, also $g \cap r =: E \in k \backslash \{A\}$, und folglich ist $|g \cap k| = 2$.
4) Die in 1), 2), 3) für (A, B, C) bewiesenen Aussagen gelten entsprechend auch für (C, B, A). Damit folgt die Behauptung. □

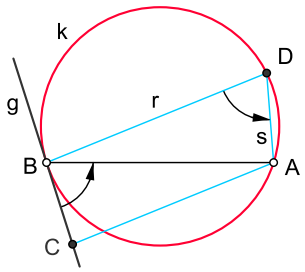
(8.5) **Corollar**. *Jeder Kreis besitzt in jedem seiner Punkte genau eine Tangente.*

Beweis: (8.2), (8.4). □

(8.6) Aufgrund von (8.5) können wir jetzt die Notationen aus (6.23) übernehmen und erhalten (vgl. (6.24), (6.25) und (6.26)):

(8.7) *Der* **Kreiswinkelsatz**, *der* **Peripheriewinkelsatz** *und der* **Tangentenwinkelsatz** *sind in jeder euklidischen Ebene gültig.*

Beweis: (7.1), (8.1), (8.2), (8.4), (8.6). □



Figur 8.2

Weiter folgt (Figur 8.2):

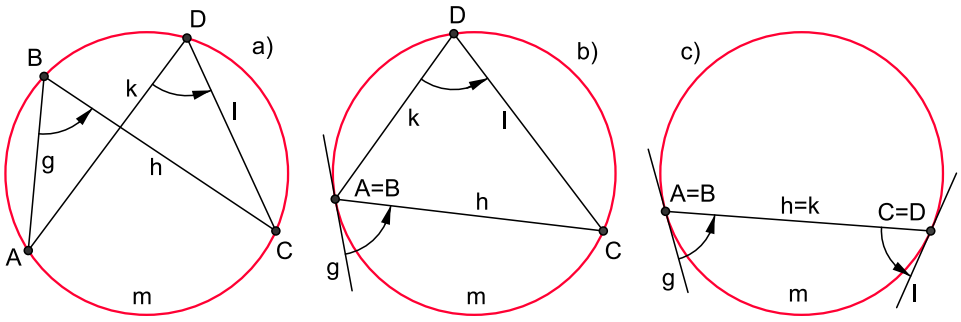
(8.8) **Erster Berührsatz**. *Sind $A, B \in \mathbb{P}$ und ist $g \in \mathbb{G}$ mit $A \notin g \wedge B \in g$, so existiert genau ein Kreis durch A, B, der g als Tangente hat.*

Beweis: Es sei $C \in g \backslash \{B\}$, $r := (B \parallel <A, C>)$ und s die nach Axiom (W) existierende Gerade durch A mit $(g, <B, A>) \simeq (r, s)$ Nach (8.1) ist $r \nparallel s$. Wäre $D := r \cap s$ mit B identisch, so würde (8.1) auf $g = r \parallel <A, C>$ führen, und im Falle $D = A$ wäre $B = C$. Demnach sind A, B, D nichtkollinear, und nach (8.4), (8.5) hat $k := k(A, B, D)$ in B eine Tangente t mit $(t, <A, B>) \simeq (r, s)$. Mit (8.1) folgt nun $g = t$, d. h. k berührt g in B. Ist $k' := k(A, B, E)$ ein weiterer Kreis mit $k' \cap g = B$, so führt (8.4) auf $\langle BEA\rangle \simeq (g, <B, A>) \simeq \langle BDA\rangle$, also auf $D \in k'$, und mit (8.2) erhalten wir dann $k = k'$. □

Download free eBooks at bookboon.com

C. Der Kreisvierseitsatz

(8.9) Ein (geordnetes) Quadrupel (g, h, l, k) von Geraden heißt **Vierseit**, wenn $g \nparallel h \wedge h \nparallel l \wedge l \nparallel k \wedge k \nparallel g \wedge g \cap h \cap l \cap k = \varnothing$ gilt. Die Möglichkeit $g = l \vee h = k$ ist hierbei nicht ausgeschlossen.
Ein Vierseit (g, h, l, k) wird **Kreisvierseit** genannt - wir schreiben kurz $\mathrm{KVS}(g, h, l, k)$ -, wenn es einen Kreis m und Punkte $A, B, C, D \in m$ gibt mit $g \cap m = \{A, B\} \wedge h \cap m = \{B, C\} \wedge l \cap m = \{C, D\} \wedge k \cap m = \{D, A\}$.
Nach den Voraussetzungen sind A, B, C, D durch (g, h, l, k) festgelegt, und es gilt $A \neq C$ sowie $B \neq D$. Nach (8.2) und (8.8) ist der *„zugehörige“* Kreis m im Falle der Existenz eindeutig bestimmt. Offenbar gilt auch
$(*)$ $\mathrm{KVS}(g, h, l, k) \Leftrightarrow \mathrm{KVS}(h, l, k, g) \Leftrightarrow \mathrm{KVS}(l, k, g, h) \Leftrightarrow \mathrm{KVS}(k, l, h, g)$.



Figur 8.3.: Kreisvierseite

Die Antwort ist 42.
Oder Baden-Württemberg.
BW-jetzt.de facebook.com/BWjetzt @BWjetzt
Baden-Württemberg
Wir können alles. Außer Hochdeutsch.
Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Wir zeigen nun

(8.10) **Kreisvierseitsatz**. *Ein Vierseit (g,h,l,k) ist genau dann ein Kreisvierseit, wenn $(g,h) \simeq (k,l)$ ist (Figur 8.3).*

Beweis: Es sei $A := k \cap g,\ B := g \cap h,\ C := h \cap l,\ D := l \cap k$. Wegen $A \neq C$ gibt es nach (8.2) und (8.8) genau ein $m \in \mathfrak{K}$ mit $g \cap m = \{A, B\}$ und $h \cap m = \{B, C\}$. Dann ist $\mathrm{KVS}(g,h,l,k) \Leftrightarrow [\, k \cap m = \{A, D\} \wedge$
$\wedge\, l \cap m = \{D, C\}\,] \overset{(6.24)}{\Leftrightarrow} \langle A, B, C\rangle_m \simeq \langle A, D, C\rangle_m \Leftrightarrow (g,h) \simeq (k,l)$. □

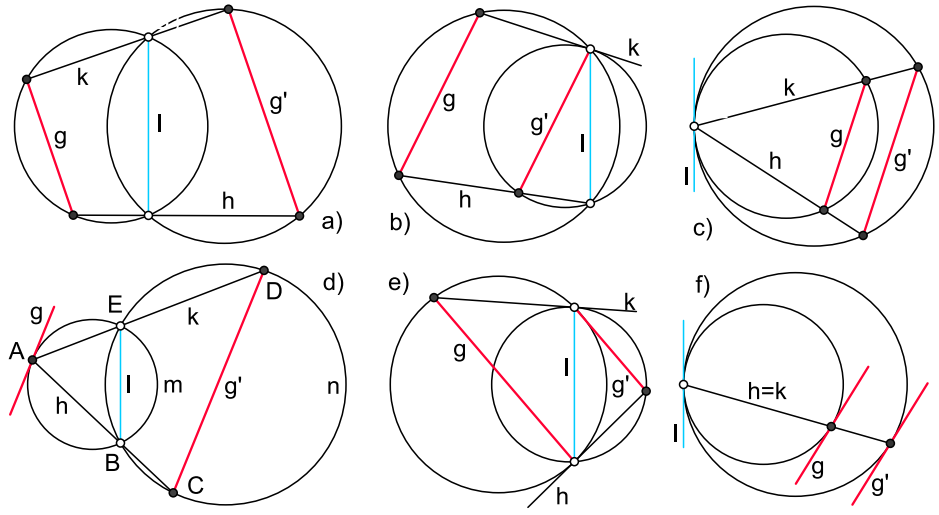
Als Corollarien zu (8.10) erhalten wir (vgl. (6.15) und Figur 6.5):

(8.11) **Schenkelaustauschsatz**. *Für $g,h,k,l \in \mathbb{G}$ und $A \in \mathbb{P}$ gilt:*
(1) Es ist $(g,h) \simeq (k,l) \Leftrightarrow (g,k) \simeq (h,l) \Leftrightarrow (h,g) \simeq (l,k)$.
(2) Es gibt genau ein $m \in \mathbb{G}$ mit $m \ni A$ und $(g,h) \simeq (m,l)$.

Beweis: (1) Ist $g \parallel h \vee h \parallel l \vee l \parallel k \vee k \parallel g$, so folgt die Behauptung aus (8.1). Andernfalls gibt es ein $g' \in \mathbb{G}$ mit $g' \parallel g$, so daß (g',h,l,k) ein Vierseit ist. Dann ist $(g',h) \simeq (k,l) \Leftrightarrow (g',k) \simeq (h,l) \Leftrightarrow (h,g') \simeq (l,k)$ gemäß (8.9)(∗) und (8.10), und mit (8.1) folgt die Behauptung.
(2) Wegen (W) gibt es genau ein $m \in \mathbb{G}$ mit $m \ni A \wedge (h,g) \simeq (l,m)$, also mit $m \ni A \wedge (g,h) \simeq (m,l)$ gemäß (1). □

(8. 12) **Erster Satz von Miquel**. *Ist (g,h,l,k) ein Kreisvierseit und ist $g' \in \mathbb{G}$ mit $g' \cap h \cap l \cap k = \varnothing$, so ist (g',h,l,k) genau dann ein Kreisvierseit, wenn $g' \parallel g$ ist (Figur 8.4).*

Beweis: Es ist $\mathrm{KVS}(g',h,l,k) \overset{(8.10)}{\Leftrightarrow} (g',h) \simeq (k,l) \simeq (g,h) \overset{(8.1),(8.10)}{\Leftrightarrow} g' \parallel g$. □



Figur 8.4: Erster Satz von Miquel

(8.13) **Zweiter Berührsatz**. *Sind m, n zwei verschiedene Kreise durch den Punkt B, so gilt $m \cap n = \{B\}$ genau dann, wenn die Tangente an m in B zugleich die Tangente an n in B ist.*

Download free eBooks at bookboon.com

Beweis: Die Tangente an m bzw. n in B sei t_m bzw. t_n.
a) Ist $t_m = t_n$, so gibt es nach (8.8) wegen $m \neq n$ kein $X \in (m \cap n) \backslash \{B\}$.
b) Es sei $t_m \neq t_n$. Wir wählen ein $h \in \mathbb{G}$ mit $h \ni B \ \wedge \ h \neq t_m, t_n$ (vgl. (3.2)(2)) und setzen $\{A, B\} := h \cap m \ \wedge \ \{B, C\} := h \cap n$ (vgl. Figur 8.4 d)). Dann ist $B \neq A, C$, und im Falle $A = C$ ist $m \cap n = \{A, B\}$.
Ist $A \neq C$ und ist $g := <A, A>_m$ sowie $t := <C, C>_n$, so führt (8.4) wegen $t_m \neq t_n$ auf $(g, h) \simeq (h, t_m) \not\simeq (h, t_n) \simeq (t, h)$), d.h. es ist $g \nparallel t$. Ist nun $g' := (C \parallel g)$ und $\{C, D\} := g' \cap n$, so ist $D \notin g \cup h$ wegen $g \neq g' \neq t$, und für $k := <A, D> \wedge \{A, E\} := k \cap m \wedge l := <B, E>$ führt (8.12) nun auf $m \cap n = \{B, E\}$ mit $B \neq E$ (vgl. Figur 8.4 d)). $\square$

MASTER OF SCIENCE IN MANAGEMENT

NYENRODE BUSINESS UNIVERSITEIT

The Master of Science in Management has been voted the Best Master 2014 in the Netherlands for the fifth time running. This could only be achieved because of our remarkable students. Our students distinguish themselves by having the courage to take on challenges and through the development of the leadership, entrepreneurship and stewardship skills. This makes the Master program at Nyenrode an achievement, from which you can benefit for the rest of your life. During this program you will not only learn in class, you will also develop your soft skills by living on campus and by working together in the student association. Do you think this program is something for you? Then it is our pleasure to invite you to Nyenrode. Go to www.nyenrode.nl/msc or call +31 346 291 291.

NYENRODE. A REWARD FOR LIFE

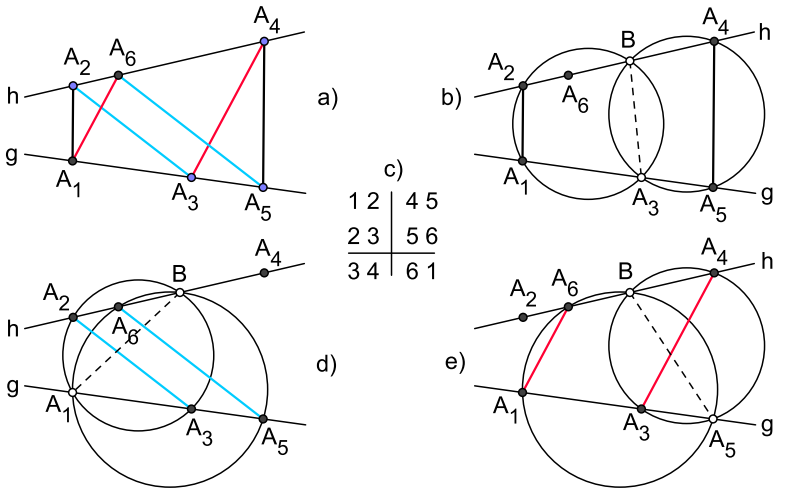
Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

D. Sätze von Pappus und Pascal

Durch dreimalige Anwendung von (8.12) erhalten wir

(8.14) **Satz von Pappus**. *Sind* $g, h \overset{\in}{\neq} \mathbb{G}$ *und sind* $A_1, ..., A_6 \overset{\in}{\neq} \mathbb{P}$ *mit* $A_1, A_3, A_5 \in g \backslash h$ *und* $A_2, A_4, A_6 \in h \backslash g$, *so gilt (vgl. Figur 8.5 a)):*
$<A_1, A_2> \parallel <A_4, A_5> \wedge <A_2, A_3> \parallel <A_5, A_6> \Rightarrow <A_3, A_4> \parallel <A_6, A_1>$.



Figur 8.5; c): Merkschema

Beweis: Es sei $B \in h$ mit $k(A_1, A_2, A_3) \cap h = \{A_2, B\}$. Dann ist $B \notin g$, denn sonst wäre $B \in \{A_1, A_3\}$ und damit $h \cap \{A_1, A_3\} \neq \varnothing$. Nach (8.12) führt $<A_1, A_2> \parallel <A_4, A_5>$ auf $k(A_3, A_4, A_5) \cap h = \{A_4, B\}$ (Figur 8.6 b)) und $<A_2, A_3> \parallel <A_5, A_6>$ auf $k(A_5, A_6, A_1) \cap h = \{A_6, B\}$ (Figur 8.6 d)), und aus beidem folgt mit (8.12), daß $<A_3, A_4> \parallel <A_6, A_1>$ ist (Figur 8.6 e)). □

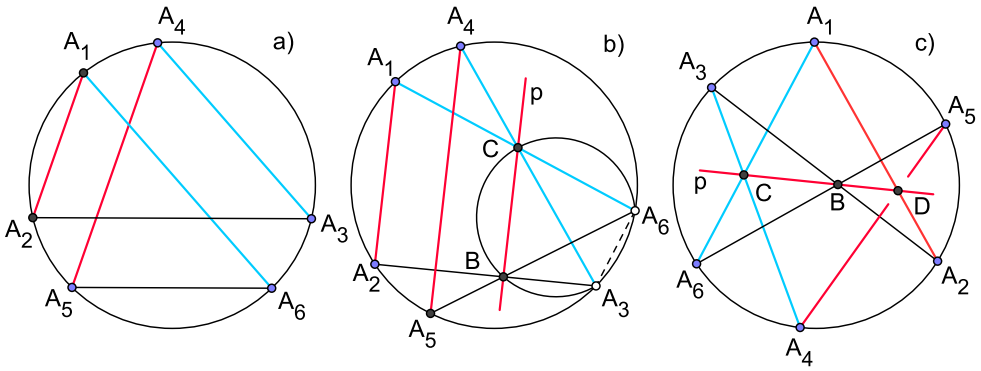
Als weitere Anwendung von (8.12) ergibt sich

(8.15) **Satz von Pascal**. *Sind* $A_1, ..., A_6$ *sechs (nicht notwendig verschiedene) Punkte eines Kreises* k *und ist* $g_{ij} := <A_i, A_j>_k \ \forall\, i, j \overset{\in}{\neq} \{1, ..., 6\}$, *so gilt* $g_{12} \parallel g_{45} \wedge g_{23} \parallel g_{56} \wedge g_{34} \parallel g_{61}$, *oder es existiert eine sogenannte* **Pascal-Gerade** p, *die sowohl mit* g_{12}, g_{45} *als auch mit* g_{23}, g_{56} *als auch mit* g_{34}, g_{61} *im Büschel liegt (Figur 8.6 a),b),c)).*

Beweis: 1) Ist (8.15) für ein Sechstupel $(A_l, ..., A_6)$ gültig, so schreiben wir $P(A_1, ..., A_6)$. Es ist $P(A_6, ..., A_1) \Leftrightarrow P(A_1, ..., A_6) \Leftrightarrow P(A_6, A_1, ..., A_5)$, d.h. man darf die Punkte zyklisch und antizyklisch vertauschen.

Download free eBooks at bookboon.com

2) Ist $A_1 = A_4$, so ist $A_1 \in (g_{12} \cap g_{45}) \cap (g_{34} \cap g_{61})$, und damit folgt $P(A_1, ..., A_6)$.
3) Ist $A_1 = A_3$, so ist $A_1 \in g_{12} \cap g_{34} \cap g_{61} \wedge g_{12} = g_{23}$, d. h. für $p := g_{12}$ ergibt sich $P(A_1, ..., A_6)$.
4) Wegen 1) – 3) können wir o.B.d.A. von $A_i \neq A_{i+2}, A_{i+3}, A_{i+4}$ für $i = 1, ..., 6$ ausgehen, wobei mit den Indizes modulo 6 zu rechnen ist.



Figur 8.6

5) Es sei $g_{12} \parallel g_{45}$, und es gebe ein $B \in g_{23} \cap g_{56}$ (Figur 8.6 b)). Wegen 4) ist $\{A_2, A_3\} \cap \{A_5, A_6\} = \varnothing$, und folglich sind B, A_3, A_6 nichtkollinear. Ist $m := k(B, A_3, A_6)$ und $p := (B \parallel g_{12})$, so gibt es genau ein $C \in m$ mit $m \cap p = \{B, C\}$. Wegen $\mathrm{KVS}(g_{12}, g_{23}, g_{36}, g_{61}) \wedge \mathrm{KVS}(g_{45}, g_{56}, g_{36}, g_{34})$ und (8.12) gilt $\mathrm{KVS}(p, g_{23}, g_{36}, g_{61}) \wedge \mathrm{KVS}(p, g_{56}, g_{36}, g_{34})$ mit m als zugehörigem Kreis, d.h. es ist $p \cap g_{61} = C = p \cap g_{34}$ und damit $C \in p \cap g_{61} \cap g_{34}$.
6) Gemäß 1)-5) ist (8.15) im Falle $g_{12} \parallel g_{45}$ oder $g_{23} \parallel g_{56}$ oder $g_{34} \parallel g_{61}$ gültig.
7) Es gelte 4), und es gebe $A, B, C \overset{\in}{\neq} \mathbb{P}$ mit $A = g_{12} \cap g_{45} \wedge B = g_{23} \cap g_{56} \wedge C = g_{34} \cap g_{61}$. Wegen 4) sind $A, B, C \notin k$. Nun sei $p := <B, C>$. Indem wir ggf. die Umbenennung $A_i \to A_{i+3}$ für $i = 1, ..., 6$ vornehmen, dürfen wir von $p \nparallel g_{12}$ ausgehen. Für $D := p \cap g_{12}$ folgt $D \notin k$, denn sonst wäre $D \in \{A_1, A_2\}$, also $A_1 \in p \vee A_2 \in p$ und damit $(A_6 \in p \wedge A_1 = A_5) \vee (A_3 \in p \wedge A_2 = A_4)$ (Figur 8.6 c)).
Wir betrachten nun (unter Fortlassen des Symbols „$\circ$“) die Abbildungen

$\hat{p} : k \to k : R \to S$ mit $(R \parallel p) \cap k = \{R, S\}$ und
$\hat{X} : k \to k : R \to S$ mit $<R, X> \cap k = \{R, S\}$ für $X \in p \setminus k$.

Offenbar sind $\hat{p}$ und $\hat{X}$ Bijektionen mit $\hat{p}\hat{p} = id_k = \hat{X}\hat{X}$. Für $Y, Z \in p \setminus k$ führt 6) auf $\hat{Z}\hat{Y}\hat{p}\hat{Z}\hat{Y}\hat{p}\,(R) = R \;\; \forall\, R \in k$ (vgl. Figur 8.6 b) für $B = Y$, $C = Z$ und $R \in \{A_1, A_4\}$). Dann ist $\hat{Z}\hat{Y}\hat{p}\hat{Z}\hat{Y}\hat{p} = id_k$, also $\hat{Z}\hat{Y}\hat{p} = \hat{p}\hat{Y}\hat{Z}$

Download free eBooks at bookboon.com

und $\hat{Y}\hat{p}\hat{Z} = \hat{Z}\hat{p}\hat{Y}$, und es folgt $\hat{D}\hat{B}\hat{C} = \hat{D}\hat{B}\hat{p}\hat{p}\hat{C} = \hat{p}\hat{B}\hat{D}\hat{p}\hat{C} = \hat{p}\hat{B}\hat{C}\hat{p}\hat{D} = = \hat{C}\hat{B}\hat{p}\hat{p}\hat{D} = \hat{C}\hat{B}\hat{D}$. Dies impliziert aber $\hat{D}(A_5) = \hat{C}\hat{B}\hat{D}\hat{C}\hat{B}(A_5) = A_4$, also $D \in <A_4, A_5>$ und $D = A$. □

(8.16) *Bemerkungen.*

1) Mit Hilfsmitteln der projektiven Geometrie läßt sich der Satz von Pascal gänzlich anders beweisen (vgl. [14]; jedoch führt eine genaue Behandlung der Ausartungsfälle auch dort zu Fallunterscheidungen).

2) Am einfachsten ergibt sich der Satz von Pascal als Spezialfall des 1. Satzes von Miquel in der minkowskischen und der galileischen Geometrie (vgl. [35]).

3) Der Pascalsche Satz kann als Ausgangspunkt für eine synthetische Behandlung der ebenen hyperbolischen Geometrie verwendet werden (vgl. [4] und [13]). (Die im obigen Beweis verwendeten Abbildungen $\hat{p}$ und $\hat{X}$ sind Restriktionen hyperbolischer Bewegungen.)

4) Analog kann die ebene minkowskische Geometrie aus dem Satz von Pappus entwickelt werden (vgl. [33]).

E. Weitere Schließungssätze

(8.17) Unter einer Konfiguration **F** der euklidischen Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ verstehen wir eine nichtleere endliche Menge, die aus Punkten, Geraden und Kreisen besteht. Wir sagen, die Konfiguration **F** schließt sich, wenn jedes Element von **F** durch die übrigen Elemente von **F** inzidenzgeometrisch, also hinsichtlich der Lagebeziehungen, „überbestimmt“ ist, d. h. wenn jeder *Punkt* von **F** Schnitt von wenigstens drei oder Berührpunkt von wenigstens zwei Elementen aus **F** ist, wenn jede *Gerade* von **F** entweder wenigstens drei oder genau zwei Punkte aus **F** enthält und im zweiten Fall Tangente oder Parallele eines weiteren Elementes aus **F** ist, und schließlich, wenn jeder *Kreis* von **F** entweder wenigstens vier oder genau drei oder genau zwei Punkte aus **F** enthält und im zweiten bzw. dritten Fall ein bzw. zwei weitere Elemente von **F** berührt.

Jeder Satz, der die Existenz einer sich schließenden Konfiguration zum Inhalt hat, wird auch **Schließungssatz** genannt. Wir haben bereits einige sich schließende Konfigurationen kennengelernt; vgl. d. Figuren 5.9, 6.7, 8.4, 8.5 und 8.6. Weitere derartige Konfigurationen liefern die nachfolgenden Sätze (8.18) bis (8.20).

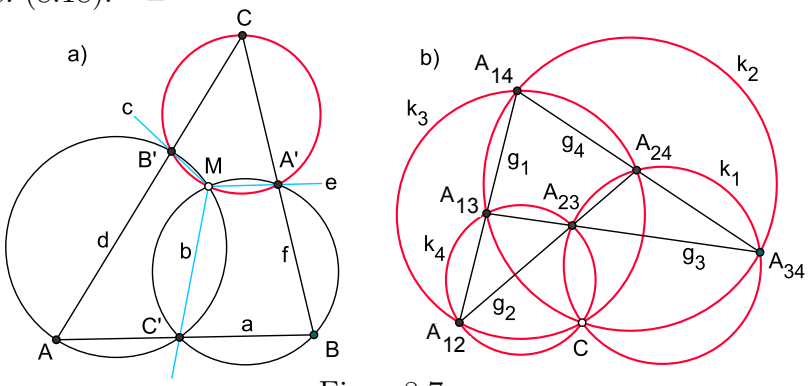
Download free eBooks at bookboon.com

(8.18) **Zweiter Satz von Miquel**. *Gegeben seien Kreisvierseite* (a,b,c,d) *und* (a,b,e,f) *mit* $b\cap c\cap e\neq\varnothing\wedge c\cap d\cap e\cap f=\varnothing\wedge d\nparallel f$. *Dann ist auch* (c,d,f,e) *ein Kreisvierseit, und die zu den Kreisvierseiten gehörigen Kreise treffen sich im Punkt* $b\cap c$ *(Figur 8.7 a)).*

Beweis: Nach (8.10) gilt $(a,b)\simeq(d,c)\wedge(a,b)\simeq(f,e)$, also $(d,c)\simeq(f,e)$, und wegen (8.1) führt $d\nparallel f$ dann auf $c\nparallel e$. Dies impliziert mit (8.10) die Behauptung. □

(8.19) **Corollar**. *Sind* $A,B,C,A',B',C'\overset{\in}{\neq}\mathbb{P}$ *mit* $A'\in<B,C>\wedge B'\in<C,A>\wedge C'\in<A,B>\wedge C\notin<A,B>$, *so ist* $k(A,B',C')\cap k(B,C',A')\cap k(C,A',B')\neq\varnothing$ *(Figur 8.7 a)).*

Beweis: (8.18). □



Figur 8.7

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Mit Hilfe von (8.19) erhalten wir

(8. 20) **Satz von Clifford**. *Gegeben seien vier Geraden, die zu je dreien die Seitengeraden eines Dreiecks bilden. Dann gilt: Die vier Umkreise dieser Dreiecke haben einen Punkt C, genannt* **Clifford-Punkt**, *gemeinsam (Figur 8.7 b)).*

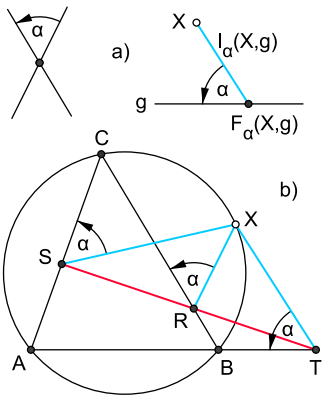
Beweis: Die gegebenen Geraden seien $g_1, ..., g_4$, der Umkreis des Dreiecks mit den Seitengeraden g_r, g_s, g_t sei k_u, und es sei $A_{rs} := g_r \cap g_s$ für $\{r, s, t, u\} = \{1, ..., 4\}$. Nach (8.19), bezogen auf das Ausgangsdreieck $\{A_{12}, A_{13}, A_{23}\}$ bzw. $\{A_{23}, A_{24}, A_{34}\}$, gibt es ein $C \in k_1 \cap k_2 \cap k_3$ bzw. ein $C' \in k_2 \cap k_3 \cap k_4$. Wegen $A_{14} \notin k_1 \cup k_4$ sind $C, C' \neq A_{14}$, und mit $C, C', A_{14} \in k_2 \cap k_3$ folgt dann $C = C'$. □

(8.21) *Anmerkung.* Der Satz (8.20) steht als Prototyp für eine ganze Palette von Sätzen. Beispielsweise gilt ein (8.20) entsprechender Satz auch für $2n$ Geraden ($n \geq 3$). Der interessierte Leser mag dies in [40] nachlesen.

(8.22) Sind $\alpha \in \mathbb{G} \times \mathbb{G}$, $X \in \mathbb{P}$ und $g \in \mathbb{G}$, so gibt es nach (8.11) genau eine Gerade m mit $m \ni X \wedge (m, g) \simeq \alpha$. Wir bezeichnen m als das α**-Lot** $l_\alpha(X, g)$ von X auf g (Figur 8.8 a)). Wenn α ein Nullwinkel ist, so ist $l_\alpha(X, g) = (X \parallel g)$, und wenn α in einer normalen euklidischen Ebene ein rechter Winkel ist, so ist $l_\alpha(X, g) = (X \perp g)$. Ist α in einer beliebigen euklidischen Ebene ein nichttrivialer Winkel, so besitzt das α-Lot von X auf g genau einen α**-Lotfußpunkt** $F_\alpha(X, g)$, der durch $l_\alpha(X, g) \cap g$ gegeben ist (Figur 8.8 a)).

Mit den gerade eingeführten Bezeichnungen erhalten wir

(8.23) **Satz von Wallace und Simson**. *Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, ist $X \in \mathbb{P}$ und ist α ein nichttrivialer Winkel, so sind die Fußpunkte der α-Lote von X auf die Seitengeraden von $\{A, B, C\}$ genau dann kollinear, wenn X auf dem Umkreis von $\{A, B, C\}$ liegt (Figur 8.8 b)).*



Figur 8.8

Beweis: Es sei $a := <B, C>$, $b := <C, A>$, $c := <A, B>$, $R := F_\alpha(X, a)$, $S := F_\alpha(X, b)$ und $T := F_\alpha(X, c)$. Wir gehen von $X \notin a \cup b \cup c$ aus, denn andernfalls ergibt sich die Behauptung aus (8.1).
Nach (6.24) (vgl. (8.7)) ist $C \in k := k(X, R, S)$ mit $b \cap k = \{C, S\}$, und es ist $B \in m := k(X, R, T)$ mit $c \cap m = \{B, T\}$. Mit (6.24) folgt
(∗) $\langle XR\,S\rangle \simeq \langle XCS\rangle_k = \langle XCA\rangle \wedge \langle XR\,T\rangle \simeq \langle XB\,T\rangle_m = \langle XBA\rangle$. Dann ist $<R, S> = <R, T> \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \langle X, C, A\rangle \simeq \langle X, B, A\rangle \overset{(6.24)}{\Leftrightarrow} C \in k(X, B, A)$. □

Download free eBooks at bookboon.com

F. Aufgaben

Man zeige:

A 8.1. *Umkehrung des Satzes von* PAPPUS UP$(A_1, ...A_6)$.
Sind $A_1, ..., A_6 \in \mathbb{P}$ mit $A_1 \neq A_5 \wedge A_3 \in <A_1, A_5> \wedge A_2, A_4 \notin <A_1, A_5>$ $\wedge <A_1, A_2> \parallel <A_4, A_5> \wedge A_6 \in (A_5 \parallel <A_2, A_3>) \cap (A_1 \parallel <A_3, A_4>)$, so ist $A_2 \neq A_4 \wedge A_6 \in <A_2, A_4>$.

A 8.2. *Die 4-Punkte-Gerade eines Vierseits.*
In einer normalen euklidischen Ebene seien vier Geraden gegeben, die zu je dreien die Seitengeraden eines Dreiecks bilden. Dann liegen die Höhenschnittpunkte der vier Dreiecke auf einer Geraden. (Hinweis: Man benutze A 8.1.)

A 8.3. *Ein Satz von* STEINER.
In einer normalen euklidischen Ebene seien vier Geraden gegeben, die zu je dreien die Seitengeraden eines Dreiecks bilden. Dann liegen die Umkreismittelpunkte der vier Dreiecke auf einem Kreis, der zugleich durch den CLIFFORD-Punkt C der vier Geraden geht (vgl. (8.20)).

A 8.4. *Das Minimalmodell einer euklidischen Ebene.*
Gegeben sei eine vierelementige Menge $\mathbb{P} = \{A_1, ..., A_4\}$. Wir setzen $g_{ij} := \{A_i, A_j\}$ für $i, j \overset{\in}{\neq} \{1, ..., 4\}$ und $\mathbb{G} := \{g_{ij} \mid i, j \overset{\in}{\neq} \{1, ..., 4\}\}$. Weiter sei $\mathbb{B}_1 := \{g_{12}, g_{34}\}$, $\mathbb{B}_2 := \{g_{13}, g_{24}\}$, $\mathbb{B}_3 := \{g_{14}, g_{23}\}$, und „$\simeq$“ sei die Äquivalenzrelation mit den drei Äquivalenzklassen $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 \times \mathbb{B}_2 \cup \mathbb{B}_3 \times \mathbb{B}_3$, $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 \cup \mathbb{B}_2 \times \mathbb{B}_3 \cup \mathbb{B}_3 \times \mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_3 \cup \mathbb{B}_3 \times \mathbb{B}_2 \cup \mathbb{B}_2 \times \mathbb{B}_1$. Zeigen Sie:
a) $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ ist eine affine Ebene.
b) Es ist $|\mathbb{G}| = 6$, und $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}_3$ sind die Parallelbüschel von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$.
c) Sind $g, h \in \mathbb{G}$ mit $g \nparallel h$, so ist $(g, h) \not\simeq (h, g)$.
d) Es sei $k_r := \mathbb{P} \setminus \{A_r\}$ für $r = 1, ..., 4$.
Dann ist $\mathfrak{K} = \{k_1, ..., k_4\}$ die Menge der Kreise bzgl. $\simeq$.
e) Ist $\{r, s, t, u\} = \{1, 2, 3, 4\}$, so hat k_r die Tangenten g_{rs}, g_{rt}, g_{ru}.
f) $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ ist eine nichtnormale euklidische Ebene.
g) Wenn ein Lehrsatz in einer mathematischen Struktur formulierbar ist, ohne daß alle Voraussetzungen erfüllbar sind, dann ist dieser Lehrsatz in der betrachteten Struktur nach den Regeln der Logik zwar gültig, aber er ist dort, wie wir sagen, **nicht realisierbar**. Untersuchen Sie, welche Sätze aus §8 in $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ realisierbar sind.

9 Algebraische Darstellung euklidischer Ebenen

Im folgenden sei eine euklidische Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ im Sinne von §7 mit $\mathfrak{K}$ als Kreismenge vorgegeben.
Wir wollen nachweisen, daß in $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ gewisse Ähnlichkeitsabbildungen existieren, um dann mit Hilfe dieser Abbildungen eine algebraische Darstellung für $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ zu entwickeln. Aufgrund dieser Darstellung werden

Download free eBooks at bookboon.com

wir einen genauen Überblick über die verschiedenen Modelle euklidischer Ebenen erhalten.

A. Existenz gleichsinniger Ähnlichkeiten

(9.1) Eine Kollineation φ von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ heißt **gleichsinnige Ähnlichkeit** oder **gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung** von $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$, wenn sie die Bedingung

(1) $(g, h) \simeq (\varphi(g), \varphi(h)) \quad \forall\, g, h \in \mathbb{G}$

erfüllt, wenn φ also **winkeltreu** ist. Nach (8.11) ist (1) äquivalent zu

(2) $(g, \varphi(g)) \simeq (h, \varphi(h)) \quad \forall\, g, h \in \mathbb{G}.$

Wir bezeichnen die Menge aller gleichsinnigen Ähnlichkeiten der euklidischen Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ mit $\ddot{\mathbb{A}}^+$. Wegen der Transitivität von $\simeq$ ist jede gleichsinnige Ähnlichkeit ein Automorphismus von $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ (vgl. (7.3)).

Ist $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$, so auch φ^{-1}, denn aus (1) folgt

$(\varphi^{-1}(g), \varphi^{-1}(h)) \simeq (\varphi(\varphi^{-1}(g)), \varphi(\varphi^{-1}(h))) = (g, h) \quad \forall\, g, h \in \mathbb{G}.$

Ferner ist offenbar $id_{\mathbb{P}} \in \ddot{\mathbb{A}}^+$, und aus $\varphi, \psi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ folgt $\varphi \circ \psi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$. Demnach ist $\ddot{\mathbb{A}}^+$ mit dem Hintereinanderausführen als Verknüpfung eine Gruppe, genannt **Gruppe $\ddot{\mathbb{A}}^+(\circ)$ der gleichsinnigen Ähnlichkeiten** von $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$.

Capgemini
CONSULTING.TECHNOLOGY.OUTSOURCING
Jetzt **bewerben** und jederzeit einsteigen!
FastTrack
IT-Einsteigerprogramm für Bachelor- und Masterabsolventen
Durchstarten in Ihre IT-Karriere
Unser 18-monatiges Programm bildet die perfekte Grundlage für Ihren beruflichen Erfolg: Arbeit in Top-Projekten, Ausbildung in fachlichen und Soft-Skill-Trainings, Betreuung durch einen persönlichen Mentor und Austausch mit Kollegen aus aller Welt. Ihren Schwerpunkt wählen Sie selbst:
- Business Technology Consulting
- Individuelle Softwarelösungen
- Lösungen auf Basis von Standardsoftware
- Business Information Management
- Application Lifecycle Services

Mehr Informationen auf www.capgemini.de/karriere
XING
People matter, results count.
Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Aus der Definition der Kreise in (7.1) folgt, daß jeder Kreis durch eine gleichsinnige Ähnlichkeit auf einen Kreis abgebildet wird. Demnach sind die gleichsinnigen Ähnlichkeiten **kreistreue** Kollineationen.

Diejenigen Kollineationen von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$, die die Bedingung

(3) $\varphi(g) \parallel g \quad \forall\, g \in \mathbb{G}$

erfüllen, werden auch als **Dilatationen** bezeichnet. Man überlegt sich sofort, daß die Dilatationen eine Untergruppe Δ von $\ddot{\mathbb{A}}^+$ bilden.

Spezielle Dilatationen sind die bereits in (3.12) eingeführten **Translationen**. Für Translationen sind die Aussagen aus (3.13) bis auf die Aussage (5) in beliebigen euklidischen Ebenen gültig, da der Beweis allein auf den Axiomen (V) und (P) aus (2.1) und auf (3.2), (3.3) beruht.

Die Menge $\mathfrak{T}$ der Translationen von $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ ist eine Untergruppe von Δ, denn sind $\sigma, \tau \in \mathfrak{T}$, so gilt zunächst $\sigma^{-1} \circ \tau \in \Delta$, und hat $\sigma^{-1} \circ \tau$ den Fixpunkt A, so ist $\tau(A) = \sigma(A)$, also $\tau = \sigma$ gemäß (3.13)(6) und damit $\sigma^{-1} \circ \tau = id_{\mathbb{P}} \in \mathfrak{T}$.

Ferner sind $\mathfrak{T}$ und Δ Normalteiler der Gruppe $\Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{G})(\circ)$ aller Kollineationen von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$, denn sind $\varphi \in \Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ und $\delta \in \Delta$, so ist $\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1} \in \Delta$, da $\delta \circ \varphi^{-1}(g) \parallel \varphi^{-1}(g) \quad \forall\, g \in \mathbb{G}$ auf $\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1}(g) \parallel g \quad \forall\, g \in \mathbb{G}$ führt, und es ist $[\, \delta(A) = A \;\Leftrightarrow\; \varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1}(\varphi(A)) = \varphi \circ \delta(A) = \varphi(A) \,] \;\; \forall\, A \in \mathbb{P}$, also $[\, \delta \notin \mathfrak{T} \;\Leftrightarrow\; \varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1} \notin \mathfrak{T} \,]$ und deshalb $[\, \delta \in \mathfrak{T} \;\Leftrightarrow\; \varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1} \in \mathfrak{T} \,]$.

Für unsere weiteren Untersuchungen benötigen wir die folgenden Aussagen:

(9.2) **Satz**. *Ist $\delta \in \Delta \backslash \mathfrak{T}$, so besitzt δ genau einen Fixpunkt Z_δ, und die Fixgeraden von δ sind die den Punkt Z_δ enthaltenden Geraden.*

Beweis: Nach der Definition von $\mathfrak{T}$ besitzt δ wenigstens einen Fixpunkt A. Ist Z ein beliebiger Fixpunkt von δ und ist $g \in \mathbb{G}$ mit $g \ni Z$, so führt $Z \in g \parallel \delta(g) \ni \delta(Z) = Z$ auf $\delta(g) = g$, d. h. alle Geraden durch Z sind Fixgeraden. Hätte δ nun zwei verschiedene Fixpunkte A, B, so wäre $X = <X, A> \cap <X, B> = \delta(<X, A>) \cap \delta(<X, B>) = \delta(X)$ für alle $X \in \mathbb{P} \setminus <A, B>$, und für $Y \in <A, B>$ und $X_0 \in \mathbb{P} \setminus <A, B>$ ergäbe sich $Y = <X_0, Y> \cap <A, B> = \delta(<X_0, Y>) \cap \delta(<A, B>) = \delta(Y)$, d. h. es wäre $\delta = id_{\mathbb{P}} \in \mathfrak{T}$. Demnach hat δ genau einen Fixpunkt Z_δ. Andere Fixgeraden als die angegebenen kann es nicht geben, da δ sonst weitere Fixpunkte hätte. $\square$

(9.3) Ist $\delta \in \Delta$ mit Z als Fixpunkt, so wird δ auch eine **zentrische Streckung** mit dem **Zentrum** Z genannt.
Die Menge $\Delta(Z)$ aller zentrischen Streckungen mit dem festem Zentrum Z ist eine Untergruppe von $\Delta(\circ)$, denn es ist $id_{\mathbb{P}} \in \Delta(Z)$, und für $\delta, \varepsilon \in \Delta(Z)$ gilt $\delta^{-1}(Z) = Z \wedge \delta \circ \varepsilon(Z) = Z$, also $\delta^{-1}, \delta \circ \varepsilon \in \Delta(Z)$.
Ebenso erkennt man: Ist $g \in \mathbb{G}$, so ist die Menge $\mathfrak{T}_g$ aller Translationen, die g festlassen, eine Untergruppe von $\mathfrak{T}$.

Download free eBooks at bookboon.com

Außerdem zeigt (9.2):

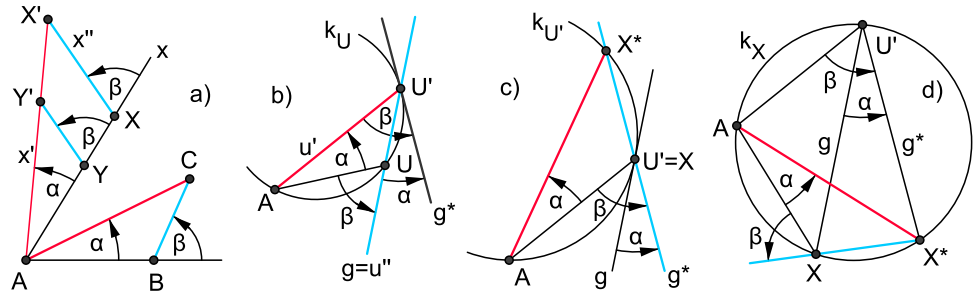
Liegen die Zentren zweier zentrischer Streckungen δ, ε auf einer Geraden g, so ist g eine Fixgerade von $\delta\circ\varepsilon$, und im Falle $\delta\circ\varepsilon \notin \mathfrak{T}$ enthält g das Zentrum von $\delta\circ\varepsilon$.

Die folgende Aussage ist für alles Weitere von zentraler Bedeutung:

(9.4) **Satz**. *Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so existiert ein $\psi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit*
(1) Es gilt $\psi(A) = A \ \wedge \ \psi(B) = C \ \wedge \ X \neq \psi(X) \ \ \forall \ X \in \mathbb{P}\setminus\{A\}$.
(2) Es ist $\langle A, B, C\rangle \simeq \langle A, X, \psi(X)\rangle \ \ \forall \ X \in \mathbb{P}\setminus\{A\}$.
(3) Es ist $(g, \psi(g)) \simeq \langle B, A, C\rangle \ \ \forall \ g \in \mathbb{G}$.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Beweis: Es sei $\alpha := \langle B, A, C\rangle$ und $\beta := \langle A, B, C\rangle$, und für $X \in \mathbb{P}\setminus\{A\}$ seien $x := <A, X>$ und $x', x'' \in \mathbb{G}$ mit $x' \ni A \wedge (x, x') \simeq \alpha$ und mit $x'' \ni X \wedge (x, x'') \simeq \beta$ (vgl. Axiom (W)). Wegen $C \notin <A, B>$ ist $\alpha \neq \beta$ und damit $x' \nparallel x''$ (vgl. (8.1) und Figur 9.1 a)).
a) Wir setzen $\psi(A) := A$ sowie $\psi(X) := X' := x' \cap x''$ für alle $X \in \mathbb{P}\setminus\{A\}$ (Figur 9.1 a)). Da α und β keine Nullwinkel sind, sind A, X, X' für alle $X \in \mathbb{P}\setminus\{A\}$ nichtkollinear, und es gelten die Aussagen (1) und (2).



Figur 9.1

b) Ist $X \in \mathbb{P}\setminus\{A\}$ und ist $Y \in x\setminus\{A\}$, so ist $y' = x' \wedge y'' \parallel x''$ (vgl. (8.1)), d.h. die Restriktion $\psi\big|_x$ von ψ auf x ist eine Bijektion von x auf x'. Insbesondere gilt $(x, \psi(x)) \simeq \alpha$ (Figur 9.1 a)).
c) Es sei $g \in \mathbb{G}$ mit $g \not\ni A$. Nach (8.11)(2) gibt es genau ein $U \in g$ mit $(u, g) \simeq \beta$, und wegen (2) gilt dann $u'' = g \wedge U' = u' \cap g$. Ist nun $g^* \in \mathbb{G}$ mit $g^* \ni U' \wedge (g, g^*) \simeq \alpha$, so ist g^* nach (8.4) die Tangente an $k(A, U, U')$ in U'. Dann ist $A \notin g^*$, und mit (8.4) folgt $(u', g^*) \simeq \beta$ (Figur 9.1 b)).
Nach (8.2) und (8.8) entspricht jedem $X \in g$ genau ein $X^* \in g^*$ derart, daß ein Kreis k_X durch A, U' mit $k_X \cap g = \{U', X\}$ und $k_X \cap g^* = \{U', X^*\}$ existiert, und nach (8.2) und (8.8) ist die Zuordnung $X \to X^*$ eine Bijektion von g auf g^* (Figur 9.1 b), c), d)). Nach (6.24), bezogen auf k_X, gilt $\langle X, A, X^*\rangle \simeq \alpha$ sowie $\langle A, X, X^*\rangle \simeq \beta \;\; \forall\, X \in g$, und folglich ist $\psi(X) = X^* \;\; \forall\, X \in g$. Damit ist gezeigt, daß $\psi\big|_g$ eine Bijektion von g auf g^* mit $(g, \psi(g)) \simeq \alpha$ ist.
d) Wegen b) und c) ist ψ injektiv. Außerdem ist ψ surjektiv, denn nach (8.11)(2) und nach Axiom (W) gibt es zu jedem $Z \in \mathbb{P}\setminus\{A\}$ ein $W \in \mathbb{P}\setminus\{A\}$ mit $\langle W, A, Z\rangle \simeq \alpha$ und $\langle A, W, Z\rangle \simeq \beta$, also mit $\psi(W) = Z$. Nach b) und c) ist ψ dann eine Kollineation von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ mit $(g, \psi(g)) \simeq \alpha$ $\forall\, g \in \mathbb{G}$, und gemäß (9.1)(2) und (8.11)(1) bedeutet dies $\psi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$. $\square$

Download free eBooks at bookboon.com

B. Transitivität gleichsinniger Ähnlichkeiten

Unter Verwendung von (9.4) ergibt sich nun die grundlegende Aussage

(9.5) **Transitivität der gleichsinnigen Ähnlichkeiten**.
Sind $A, B, C, D \in \mathbb{P}$ mit $A \neq B$ und $C \neq D$, so existiert genau ein $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\varphi(A) = C \ \wedge \ \varphi(B) = D$.

Beweis: a) Ist $A = C$, so sei $\psi_1 := id_{\mathbb{P}}$. Ist $A \neq C$, so sei $E \in \mathbb{P} \setminus <A, C>$, und dann gibt es nach (9.4) ein $\psi_1 \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\psi_1(E) = E \wedge \psi_1(A) = C$. Wegen $A \neq B$ ist $B' := \psi_1(B) \neq C$. Liegen B', C, D auf einer Geraden g, so sei $F \in \mathbb{P} \setminus g$, und nach (9.4) lassen sich dann $\psi_2, \psi_3 \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ finden mit $\psi_2(C) = C = \psi_3(C) \wedge \psi_2(B') = F \wedge \psi_3(F) = D$. Sind B', C, D dagegen nichtkollinear, so gibt es nach (9.4) ein $\psi_2 \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\psi_2(C) = = C \wedge \psi_2(B') = D$, und dann setzen wir $\psi_3 := id_{\mathbb{P}}$. In jedem Falle ist $\varphi := \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1$ nun ein Element von $\ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\varphi(A) = C \wedge \varphi(B) = D$.
b) Sind $\varphi, \xi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\varphi(A) = \xi(A) = C \wedge \varphi(B) = \xi(B) = D$, so ist $\eta := \varphi^{-1} \circ \xi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit den Fixpunkten A, B, und aus $\eta(<A, B>) = = <A, B>$, (9.1)(2) und (8.1) ergibt sich $\eta(g) \parallel g \ \ \forall\, g \in \mathbb{G}$, also $\eta \in \Delta$. Mit (9.2) folgt nun $\eta = id_{\mathbb{P}}$ und damit $\varphi = \xi$. □

(9.6) **Corollar 1**. *Besitzt $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mehr als einen Fixpunkt, so ist $\varphi = id_{\mathbb{P}}$.*

(9.7) **Corollar 2**. *Sind $A, B \in \mathbb{P}$, so existiert genau eine Translation, die A in B überführt. Diese wird mit $\tau_{A,B}$ bezeichnet (vgl. (3.15)).*

Beweis: O.B.d.A. sei $A \neq B$. Wir wählen ein $D \in \mathbb{P} \setminus <A, B>$ und dann gemäß (3.3) ein $C \in \mathbb{P}$ derart, daß (A, B, D, C) ein Parallelogramm ist. Nach (9.5) gibt es ein $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\varphi(A) = B \wedge \varphi(C) = D$, und dann führt $\varphi(<A, C>) = <B, D> \parallel <A, C>$ mit (9.1)(2) auf $\varphi \in \Delta$. Da $<A, B>, <C, D>$ zwei disjunkte Fixgeraden von φ sind, ist φ nach (9.2) eine Translation. Nach (3.13)(6) gibt es keine weitere Translation, die A in B überführt. □

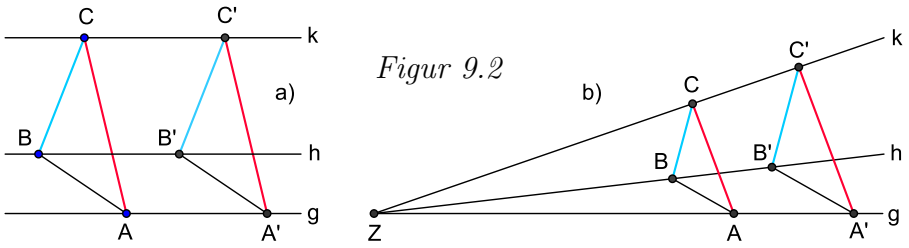
(9.8) **Corollar 3**. *Sind Z, A, A' drei kollineare Punkte mit $Z \neq A, A'$, so existiert genau eine zentrische Streckung δ mit Z als Zentrum, die A in A' überführt (Figur 9.2 b)).*

Beweis: Nach (9.5) gibt es genau ein $\delta \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\delta(Z) = Z \wedge \delta(A) = A'$. Wegen $\delta(<Z, A>) = <Z, A>$, (9.1)(2) und (8.1) ist $\delta \in \Delta$. □

Download free eBooks at bookboon.com

Als weitere Folgerungen aus (9.5) zeigen wir

(9.9) **Satz des Desargues**.
Sind g, h, k drei verschiedene im Büschel gelegene Geraden und sind $A, A' \in g \backslash h \wedge B, B' \in h \backslash k \wedge C, C' \in k \backslash g$ mit $<A, B> \parallel <A', B'>$ und $<B, C> \parallel <B', C'>$, so ist $<A, C> \parallel (<A', C'>$ (Figur 9.2).



Figur 9.2

Beweis: Im Falle $g \parallel h \parallel k$ sei $\delta := \tau_{A,A'}$ gemäß (9.7), und im Falle $Z = g \cap h \cap k$ sei $\delta \in \Delta$ mit $\delta(Z) = Z \wedge \delta(A) = A'$ gemäß (9.8). Dann sind g, h, k Fixgeraden von δ. Aus $<A, B> \parallel <A', B'>$ folgt nun $\delta(B) = B'$, und aus $<B, C> \parallel <B', C'>$ ergibt sich $\delta(C) = C'$. Damit erhalten wir $<A, C> \parallel \delta(<A, C>) = <A', C'>$. □

(9.10) **Satz**. $\mathfrak{T}(\circ)$ *ist eine abelsche Gruppe (vgl. (3.17)).*

Beweis: Wegen (9.1) ist nur die Kommutativität von $\mathfrak{T}(\circ)$ nachzuweisen.
a) Sind $\sigma, \tau \in \mathfrak{T} \setminus \{id_{\mathbb{P}}\}$ mit verschiedenen Richtungen (vgl. (3.13)), so sind $(A, \tau(A), \tau(\sigma(A)), \sigma(A))$ und $(A, \tau(A), \sigma(\tau(A)), \sigma(A))$ für jedes $A \in \mathbb{P}$ Parallelogramme mit übereinstimmenden Ecken. Mithin ist $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$.
b) Haben $\sigma, \tau \in \mathfrak{T} \setminus \{id_{\mathbb{P}}\}$ die gleiche Richtung $g \parallel$, so gibt es nach (9.7) ein $\varrho \in \mathfrak{T}$ mit $\varrho(g) \neq g$, und dann ist auch $\varrho \circ \tau(g) \neq g$, d. h. ϱ und $\varrho \circ \tau$ haben eine andere Richtung als σ. Mit a) erhalten wir nun $\varrho \circ (\tau \circ \sigma) = (\varrho \circ \tau) \circ \sigma = \sigma \circ (\varrho \circ \tau) = (\sigma \circ \varrho) \circ \tau = (\varrho \circ \sigma) \circ \tau = \varrho \circ (\sigma \circ \tau)$ und damit $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$. □

(9.11) **Satz**. *Für jedes $Z \in \mathbb{P}$ ist $\ddot{\mathbb{A}}^+(Z) := [\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^+ \mid \varphi(Z) = Z)$ eine abelsche Untergruppe von $\ddot{\mathbb{A}}^+(\circ)$.*

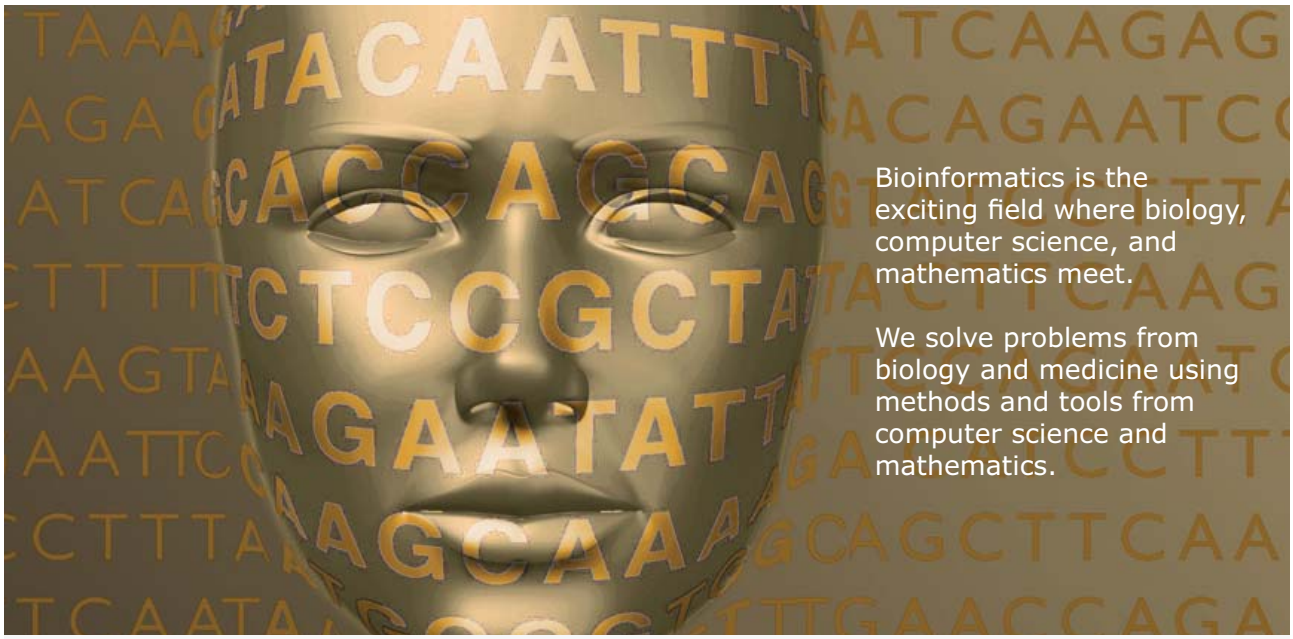
Beweis: In Analogie zum Beweis in (9.3) ist klar, daß $\ddot{\mathbb{A}}^+(Z)$ eine Untergruppe von $\ddot{\mathbb{A}}^+(\circ)$ ist.
Zum Nachweis der Kommutativität seien $\varphi, \psi \in \ddot{\mathbb{A}}^+(Z)$ vorgegeben.
a) Es sei $\psi \in \ddot{\mathbb{A}}^+ \setminus \Delta$. Wir betrachten ein $B \in \mathbb{P} \setminus \{Z\}$ und setzen $A := Z \wedge \wedge C := \psi(B) \wedge X := \varphi(B) \wedge b := <A, B> \wedge c := <A, C> \wedge x := <A, X>$. Es folgt $\langle A, X, \varphi(C)\rangle = \langle \varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)\rangle \overset{(9.1)}{\simeq} \langle A, B, C\rangle \overset{(9.4)(2)}{\simeq} \langle A, X, \psi(X)\rangle$ sowie $(c, \varphi(c)) \overset{(9.1)}{\simeq} (b, \varphi(b)) = (b, x) \overset{(9.1)}{\simeq} (\psi(b), \psi(x)) = (c, \psi(x))$ und mit

Download free eBooks at bookboon.com

(8.1) dann $<X, \varphi(C)> = <X, \psi(X)>$ und $A, \varphi(C), \psi(X) \in \varphi(c) = \psi(x)$. Da $\{A, X, \varphi(C)\} = \{\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)\}$ ein Dreieck ist, ergibt sich nun $\varphi(C) = \psi(X)$, also $\varphi \circ \psi(B) = \psi \circ \varphi(B)$. Dies gilt für alle $B \in \mathbb{P} \setminus \{Z\}$, und mithin ist $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.
b) Es sei $\psi \in \Delta$. Nach (9.5) gibt es ein $\eta \in \ddot{A}^+ \setminus \Delta$, und dann ist auch $\eta \circ \psi \in \ddot{A}^+ \setminus \Delta$, denn sonst wäre $\eta = (\eta \circ \psi) \circ \psi^{-1} \in \Delta$. Mit a) erhalten wir nun $\eta \circ (\varphi \circ \psi) = (\eta \circ \varphi) \circ \psi = (\varphi \circ \eta) \circ \psi = \varphi \circ (\eta \circ \psi) = (\eta \circ \psi) \circ \varphi = \eta \circ (\psi \circ \varphi)$ und damit $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. □

UPPSALA UNIVERSITET

Develop the tools we need for Life Science
Masters Degree in Bioinformatics



Read more about this and our other international masters degree programmes at www.uu.se/master

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

C. Gewinnung einer quadratischen Körpererweiterung

(9.12) Wir wollen die Punktmenge $\mathbb{P}$ der euklidischen Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ jetzt zu einem kommutativen Körper $\mathbb{P}(+,\cdot)$ ausbauen. Dabei werden die Verknüpfungen $+,\cdot$ derart eingeführt, daß mit ihrer Hilfe eine einfache Beschreibung der Geraden, der Winkelvergleichung und der gleichsinnigen Ähnlichkeiten möglich ist.

Wir beginnen damit, daß wir zwei verschiedene und im weiteren feste Punkte aus $\mathbb{P}$ auswählen und diese mit 0 (**Null**) und 1 (**Eins**) bezeichnen (vgl. (6.29)).

Weiter sei $\hat{0}$ die Abbildung $\mathbb{P}\to\{0\} : X\to 0$ (**Nullabbildung**), und für $A \in \mathbb{P}^* := \mathbb{P}\setminus\{0\}$ sei $\hat{A}$ die nach (9.5) eindeutig existierende gleichsinnige Ähnlichkeit mit der Eigenschaft

$(*)\quad \hat{A}(0) = 0 \ \wedge\ \hat{A}(1) = A.$

Mit der Abkürzung $\tau_X := \tau_{0,X} \ \ \forall\ X \in \mathbb{P}$ können wir die Verknüpfungen $+,\cdot$ dann durch

$(\diamond)\quad X{+}Y := \tau_X\circ\tau_Y(0) = \tau_X(Y) \ \wedge\ X{\cdot}Y := \hat{X}\circ\hat{Y}(1) = \hat{X}(Y) \quad \forall\ X,Y\in\mathbb{P}$

definieren. Unter Verwendung dieser Definitionen erhalten wir

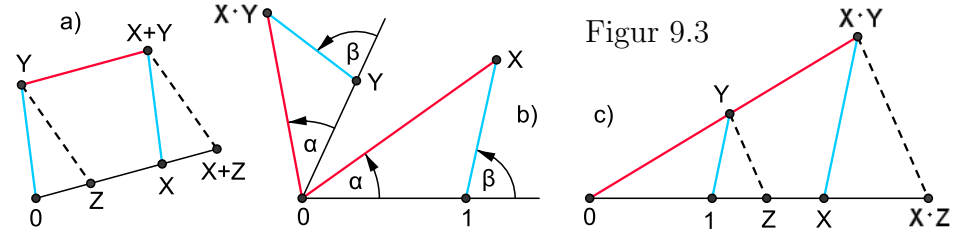
(9.13) **Satz** $\mathbb{P}(+,\cdot)$ *ist ein Körper*[2].

Beweis: 1) Nach (9.10), (9.11) und wegen $\hat{0}\circ\hat{X} = \hat{0} = \hat{X}\circ\hat{0} \ \ \forall\ X \in \mathbb{P}$ gilt $X{+}Y = Y{+}X \ \wedge\ X{\cdot}Y = Y{\cdot}X \ \wedge\ 0{\cdot}X = 0 \ \ \forall\ X,Y \in \mathbb{P}$.
2) Wegen $\tau_0 = id_{\mathbb{P}} = \hat{1}$ ist $0{+}X = X$ und $1{\cdot}X = X \ \ \forall\ X \in \mathbb{P}$.
Setzen wir $-X := \tau_X^{-1}(0)$, so ist $X + (-X) = 0 \ \ \forall\ X \in \mathbb{P}$.

[2]Sprachgebrauch: Bei einem „**Körper**“ sei das Kommutativgesetz bzgl. „$\cdot$“ stets erfüllt, bei einem „**Schiefkörper**“ dagegen nicht unbedingt.

Download free eBooks at bookboon.com

Ist $Y \in \mathbb{P}^*$ und setzen wir $Y^{-1} := \hat{Y}^{-1}(1)$, so ist $Y \cdot Y^{-1} = 1$.
3) Es seien $X, Y, Z \in \mathbb{P}$. Wegen $\tau_X \circ \tau_Y(0) = \tau_X(Y) = \tau_{(\tau_X(Y))}(0)$ und (3.13)(6) ist $\tau_X \circ \tau_Y = \tau_{(\tau_X(Y))}$, und damit folgt
$X + (Y+Z) = \tau_X \circ \tau_Y(Z) = \tau_{(\tau_X(Y))}(Z) = \tau_X(Y) + Z = (X+Y)+Z$.
Wegen $\hat{X} \circ \hat{Y}(1) = \hat{X}(Y) = \widehat{\hat{X}(Y)}(1)$ und (9.5) ist $\hat{X} \circ \hat{Y} = \widehat{\hat{X}(Y)}$, und damit folgt $X \cdot (Y \cdot Z) = \hat{X} \circ \hat{Y}(Z) = \widehat{\hat{X}(Y)}(Z) = \hat{X}(Y) \cdot Z = (X \cdot Y) \cdot Z$.
Nun sei $X \neq 0$. Da $\mathfrak{T}$ nach (9.1) ein Normalteiler von $\ddot{\mathbb{A}}^+$ ist, ist $\hat{X} \circ \tau_Y \circ \hat{X}^{-1}$ eine Translation, und nach (3.13)(6) führt $\hat{X} \circ \tau_Y \circ \hat{X}^{-1}(0) = \hat{X} \circ \tau_Y(0) = \hat{X}(Y) = \tau_{\hat{X}(Y)}(0)$ dann auf $\hat{X} \circ \tau_Y \circ \hat{X}^{-1} = \tau_{\hat{X}(Y)}$. Damit ergibt sich
$X \cdot (Y+Z) = \hat{X} \circ \tau_Y(Z) = \tau_{\hat{X}(Y)} \circ \hat{X}(Z) = \hat{X}(Y) + \hat{X}(Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$
für $X \neq 0$, und offenbar ist $0 \cdot (Y+Z) = 0 = 0 \cdot Y + 0 \cdot Z$. □



Figur 9.3

(9.14) Die Figur 9.3 zeigt, wie man die Verknüpfungen + und · veranschaulichen und zeichnerisch ausführen kann. Ist nämlich $X \neq 0$ und ist $Y \notin <0, X>$, so ist $(Y, 0, X, X+Y) = (Y, 0, \tau_X(0), \tau_X(Y))$ nach (3.13)(4) ein Parallelogramm, und für $Z \in <0, X>$ ist ebenso $(Y, Z, X+Z, X+Y) = (Y, Z, \tau_X(Z), \tau_X(Y))$ ein Parallelogramm (Figur 9.3 a)).

Sind $0, 1, X$ nichtkollinear, so hat $\hat{X}$ nach (9.4) und (9.5) die gleiche Wirkung wie die Abbildung ψ aus (9.4), d. h. für jedes $Y \in \mathbb{P}^*$ gilt:
(1) Die Punkte $0, Y, X \cdot Y$ sind nichtkollinear, und es ist $\hat{X} \notin \Delta$.
(2) Es ist $\langle 1, 0, X \rangle \simeq \langle Y, 0, X \cdot Y \rangle$.
(3) Es ist $\langle 0, 1, X \rangle \simeq \langle 0, Y, X \cdot Y \rangle$ (Figur 9.3 b)).

Sind dagegen $0, 1, X$ kollinear mit $X \neq 0$, so ist $\hat{X}$ nach (9.5) und (9.8) eine Dilatation, die alle Geraden durch 0 festläßt, und wegen $\hat{X}(g) \parallel g$ $\forall\, g \in \mathbb{G}$ folgen für $Y \in \mathbb{P} \setminus <0, 1>$ und für $Z \in <0, 1> \setminus \{0\}$ die Aussagen
(4) Es ist $X \cdot Y = <0, Y> \cap (X \parallel <1, Y>)$.
(5) Es ist $X \cdot Z = <0, 1> \cap (X \cdot Y \parallel <Y, Z>)$ (Figur 9.3 c)).

Aus Figur 9.3 wird ebenso wie aus den Definitionen deutlich, daß die Verknüpfungen $+, \cdot$ von der Wahl der Punkte 0 und 1 abhängig sind.

Download free eBooks at bookboon.com

Im weiteren denken wir uns die für Körper üblichen Bezeichnungen und Vereinbarungen (z. B. hinsichtlich des Gebrauchs des Minuszeichens) für $\mathbb{P}(+,\cdot)$ eingeführt. Insbesondere schreiben wir in Zukunft auch AB statt $A \cdot B$. Wir zeigen nun

(9.15) **Satz**, *Die Gerade* $\mathbb{K} := <0,1>$ *ist ein Teilkörper von* $\mathbb{P}(+,\cdot)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) Ist $A \in \mathbb{P}^*$, *so ist* $\mathbb{K}A := \{\lambda A \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\} = <0, A>$.

(2) Ist $A \in \mathbb{P}\setminus\mathbb{K}$, *so ist* $\mathbb{K} + \mathbb{K}A := \{\lambda + \mu A \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} = \mathbb{P}$.

(3) $\mathbb{P}(+)$ *ist ein zweidimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum.*

(4) Sind $A, B \in \mathbb{P}$ *mit* $A \neq B$, *so ist*
$A + \mathbb{K}(B-A) := \{A + \lambda\,(B-A) \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\} = <A, B>$.

(5) Es ist $\mathbb{G} = \{A + \mathbb{K}B \,|\, A \in \mathbb{P} \wedge B \in \mathbb{P}^*\}$.

(6) Sind $A, B \in \mathbb{P}^*$ *und* $A', B' \in \mathbb{P}$, *so ist*
$A' + \mathbb{K}A \,\|\, B' + \mathbb{K}B \;\Leftrightarrow\; \mathbb{K}A = \mathbb{K}B$.

(7) Sind $A, B, C, D \in \mathbb{P}^*$ *und* $A', B', C', D' \in \mathbb{P}$, *so ist*
$(A'+\mathbb{K}A, B'+\mathbb{K}B) \simeq (C'+\mathbb{K}C, D'+\mathbb{K}D) \Leftrightarrow (\mathbb{K}A, \mathbb{K}B) \simeq (\mathbb{K}C, \mathbb{K}D)$
$\Leftrightarrow \mathbb{K}\,A^{-1}B = \mathbb{K}\,C^{-1}D \Leftrightarrow A^{-1}BCD^{-1} \in \mathbb{K}^* := \mathbb{K}\setminus\{0\}$.

(8) Sind $A, B \in \mathbb{P}^*$ *und* $A', B' \in \mathbb{P}$, *so ist*
$(A' + \mathbb{K}A, B' + \mathbb{K}B) \simeq (\mathbb{K}, \mathbb{K}\,A^{-1}B)$.

Wir bezeichnen das Paar $(\mathbb{P}(+,\cdot), \mathbb{K}(+,\cdot))$ *als eine zu* $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ *gehörige* **quadratische Körpererweiterung**.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Beweis von (9.15): a) Gemäß (9.3) ist $\Delta(0) = \{\hat{\lambda} \,|\, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$, und aus (9.8) und (9.14) folgt dann (1). Ferner führen (9.3), (9.13) und (9.14) auf $-\mu,\ \nu^{-1},\ \lambda+\mu,\ \lambda\cdot\mu \in \mathbb{K}\ \ \forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{K},\ \forall\ \nu \in \mathbb{K}^*$, und deshalb ist $\mathbb{K}$ ein Teilkörper von $\mathbb{P}(+,\cdot)$.
b) Da $\mathbb{K}$ ein Teilkörper von $\mathbb{P}(+,\cdot)$ ist, ist $\mathbb{P}(+)$ insbesondere auch ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Dieser ist zweidimensional, denn sind $A \in \mathbb{P}\setminus\mathbb{K}$, $X \in \mathbb{P}$, $X_1 := (X \parallel \mathbb{K}A) \cap \mathbb{K}$ und $X_2 := (X \parallel \mathbb{K}) \cap \mathbb{K}A$, so ist $X = X_1 + X_2 \in$ $\in \mathbb{K} + \mathbb{K}A$, also $\mathbb{P} = \mathbb{K} + \mathbb{K}A$. Damit sind (2) und (3) gezeigt.
c) Sind $A, B \in \mathbb{P}$ mit $A \neq B$, so ist $<A,B> = \tau_A \circ \tau_A^{-1}(<A,B>) = \tau_A(<0, \tau_A^{-1}(B)>) = A + <0, B-A> = A + \mathbb{K}(B-A)$, d. h. es gilt (4). Überdies ist $A + \mathbb{K}B = \tau_A(\mathbb{K}B) \overset{(1)}{\in} \mathbb{G}\ \ \forall\ (A,B) \in \mathbb{P}\times\mathbb{P}^*$, und folglich gilt auch (5). Aus $0 \in \mathbb{K}A \parallel \tau_{A'}(\mathbb{K}A) = A' + \mathbb{K}A \wedge 0 \in \mathbb{K}B \parallel \tau_{B'}(\mathbb{K}B) = B' + \mathbb{K}B$ erhalten wir (6).
d) Sind $A, B, C, D \in \mathbb{P}^*$ und $A', B', C', D' \in \mathbb{P}$, so führen (8.1) und (6) auf $(A'+\mathbb{K}A, B'+\mathbb{K}B) \simeq (C'+\mathbb{K}C, D'+\mathbb{K}D) \Leftrightarrow (\mathbb{K}A, \mathbb{K}B) \simeq (\mathbb{K}C, \mathbb{K}D)$.

Ist $E := A^{-1}C$, so ist $\hat{E} \in \ddot{\mathbb{A}}^+$, und folglich ist
$(\mathbb{K}A, \mathbb{K}B) \simeq (\hat{E}(\mathbb{K}A), \hat{E}(\mathbb{K}B)) \simeq (\mathbb{K}EA, \mathbb{K}EB) \simeq (\mathbb{K}C, \mathbb{K}EB)$.
In Verbindung mit Axiom (W) und (8.1) erhalten wir dann
$(\mathbb{K}A, \mathbb{K}B) \simeq (\mathbb{K}C, \mathbb{K}D) \Leftrightarrow (\mathbb{K}C, \mathbb{K}EB) \simeq (\mathbb{K}C, \mathbb{K}D) \Leftrightarrow \mathbb{K}EB \parallel \mathbb{K}D \Leftrightarrow$
$\mathbb{K}A^{-1}CB = \mathbb{K}D \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{K}^*$ mit $A^{-1}CB = \lambda D \Leftrightarrow A^{-1}BCD^{-1} = \lambda \in \mathbb{K}^*$
$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ mit $A^{-1}B = \lambda C^{-1}D \Leftrightarrow \mathbb{K}A^{-1}B = \mathbb{K}C^{-1}D$, also (7).
e) Ist $C = 1$ und $D = A^{-1}B$, so ist $\mathbb{K}A^{-1}B = \mathbb{K}C^{-1}D$, und deshalb folgt (8) aus (7) für $C' := D' := 0$. □

Bemerkung. Mit (9.12) – (9.15) wird deutlich, *„wie die Zahlen in die Geometrie kommen“*. Denn wenn $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ die Anschauungsebene ist, so liefert unsere Konstruktion, wie wir sehen werden, mit $\mathbb{P}(+,\cdot)$ (bis auf Isomorphie) den *Körper* $\mathbb{C}\,(+,\cdot)$ *der komplexen Zahlen* und mit $\mathbb{K}(+,\cdot)$ (bis auf Isomorphie) den *Körper* $\mathbb{R}(+,\cdot)$ *der reellen Zahlen.*

D. Algebraische Darstellung von Kreisen und Ähnlichkeiten

(9.16) Gemäß (9.15) liegt nun eine algebraische Darstellung für die Komponenten $\mathbb{P}$, $\mathbb{G}$ und $\simeq$ der euklidischen Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ vor. Hieraus ergibt sich wiederum eine Darstellung der Kreise und der gleichsinnigen Ähnlichkeiten von $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$:

(9.17) **Satz**. *Sind A, B, C nichtkollineare Punkte, so ist* $k(A,B,C) =$
$= \{C\} \cup \{X \in \mathbb{P}\setminus\{C\} \,|\, (A-B)^{-1}(B-C)(A-X)(X-C)^{-1} \in \mathbb{K}\} =$
$= \{A, C\} \cup \{X \in \mathbb{P}\setminus\{A,C\} \,|\, \mathbb{K}(A-B)^{-1}(B-C) = \mathbb{K}(A-X)^{-1}(X-C)\}$.

Download free eBooks at bookboon.com

Beweis: Offenbar liegen A, B, C in den links und rechts vom Gleichheitszeichen aufgeführten Mengen. Ist $X \in \mathbb{P}\backslash\{A, C\}$, so führen (7.1) und (9.15) auf $X \in k(A, B, C) \Leftrightarrow (<A, B>, <B, C>) \simeq (<A, X>, <X, C>)$
$\Leftrightarrow \mathbb{K}(A-B)^{-1}(B-C) = \mathbb{K}(A-X)^{-1}(X-C)$
$\Leftrightarrow (A-B)^{-1}(B-C)(A-X)(X-C)^{-1} \in \mathbb{K}$. □

(9.18) **Satz**. $\ddot{\mathbb{A}}^+$ *besteht aus den Abbildungen der Form*
$\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{P} : \boxed{X \to A \cdot X + B}$ *mit* $(A, B) \in \mathbb{P}^* \times \mathbb{P}$.
Hierbei ist φ *genau dann eine Dilatation, wenn* $A \in \mathbb{K}^*$ *ist, und genau dann eine Translation, wenn* $A = 1$ *ist.*

Beweis: 1) Ist φ wie angegeben erklärt, so ist $\varphi(X) = \tau_B \circ \hat{A}(X) \ \forall\, X \in \mathbb{P}$, also $\varphi = \tau_B \circ \hat{A} \in \ddot{\mathbb{A}}^+$.
2) Ist $\psi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$, so seien $C := \psi(1) - \psi(0)$ und $D := \psi(0)$. Wegen $\psi(1) \neq \psi(0)$ ist dann $C \in \mathbb{P}^*$, und für $\tau_D \circ \hat{C} \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ ergibt sich $\tau_D \circ \hat{C}(0) = D = \psi(0)$ und

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

$\tau_D \circ \hat{C}(1) = \tau_D(C) = D+C = \psi(1)$. Nach (9.5) bedeutet dies $\psi = \tau_D \circ \hat{C}$, also $\psi(X) = \tau_D \circ \hat{C}(X) = C \cdot X + D \;\; \forall\, X \in \mathbb{P}$. $\square$

E. Der Hauptsatz

(9.19) Ist $\mathbb{L}(+,\cdot)$ ein beliebiger Körper, der einen beliebigen Teilkörper $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} \neq \mathbb{L} \wedge \mathbb{K} + \mathbb{K}A = \mathbb{L} \;\; \forall\, A \in \mathbb{L}\backslash\mathbb{K}$ enthält, der also als Vektorraum über $\mathbb{K}$ die Dimension 2 hat, so wird das Körperpaar $(\mathbb{L}(+,\cdot), \mathbb{K})$ eine **quadratische Körpererweiterung** genannt (vgl. (9.15)).

Die vorangehenden Sätze zeigen, daß sich jede euklidische Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ durch eine quadratische Körpererweiterung $(\mathbb{P}(+,\cdot), \mathbb{K})$ algebraisch darstellen läßt.

Umgekehrt gehört nun auch zu jeder quadratischen Körpererweiterung eine euklidische Ebene. Dies ergibt sich aus

(9.20) **Hauptsatz** *zur algebraischen Darstellung euklidischer Ebenen. Ist* $(\mathbb{L}(+,\cdot), \mathbb{K})$ *eine quadratische Körpererweiterung und ist* $\mathbb{G}_\mathbb{L} := \{A' + \mathbb{K}A \,|\, A, A' \in \mathbb{L} \wedge A \neq 0\}$*, so ist auf* $\mathbb{G}_\mathbb{L} \times \mathbb{G}_\mathbb{L}$ *durch* $(A'+\mathbb{K}A, B'+\mathbb{K}B) \simeq_\mathbb{L} (C'+\mathbb{K}C, D'+\mathbb{K}D) :\Leftrightarrow \mathbb{K}A^{-1}B = \mathbb{K}C^{-1}D$ *für* $A, ..., D \in \mathbb{L}\backslash\{0\} \wedge A', ..., D' \in \mathbb{L}$ *eine wohldefinierte Äquivalenzrelation* $\simeq_\mathbb{L}$ *erklärt, und* $\mathbb{E}(\mathbb{L}(+,\cdot), \mathbb{K}) := (\mathbb{L}, \mathbb{G}_\mathbb{L}, \simeq_\mathbb{L})$ *ist eine euklidische Ebene. Umgekehrt existiert zu jeder euklidischen Ebene* $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ *eine quadratische Körpererweiterung* $(\mathbb{P}(+,\cdot), \mathbb{K})$ *mit* $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(+,\cdot), \mathbb{K})$.

Beweis: 1) Der schwierigere Teil des Beweises, nämlich der Beweis der letzten Aussage, ist bereits durch (9.13) und (9.15) erbracht, wobei sich die Beweise von (9.13) und (9.15) auf die vorangehenden Aussagen (9.1) bis (9.11) stützen.
2) Zum Beweis der ersten Aussage zeigen wir zunächst, daß $(\mathbb{L}, \mathbb{G}_\mathbb{L})$ eine affine Ebene ist. Dazu betrachten wir $g := A+\mathbb{K}B$ und $h := C+\mathbb{K}D$ mit $A, C \in \mathbb{L}$ und $B, D \in \mathbb{L}^* := \mathbb{L}\backslash\{0\}$: a) Im Falle $\mathbb{K}B = \mathbb{K}D$ sind g, h additive Nebenklassen der echten Untergruppe $\mathbb{K}B(+)$ von $\mathbb{L}(+)$, und damit folgt $g = h \vee g \cap h = \varnothing$ sowie $\mathbb{L} \notin \mathbb{G}$.
b) Im Falle $\mathbb{K}B \neq \mathbb{K}D$ ist $\{B, D\}$ eine $\mathbb{K}$-Basis des zweidimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathbb{L}$, und deshalb gibt es genau ein Paar $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ mit $A - C = \mu D - \lambda B$, also mit $A + \lambda B = C + \mu D$. Dies bedeutet aber $|g \cap h| = 1$.

Download free eBooks at bookboon.com

c) Nach a) und b) ist $(g = h \vee g \cap h = \varnothing) \Leftrightarrow KB = KD$. Da jedes Element von $\mathbb{L}(+)$ in genau einer Nebenklasse von $\mathbb{K}B(+)$ liegt, ist das Parallelenaxiom (P) gültig.

d) Sind $X, Y \in \mathbb{L}$ mit $X \neq Y$, so sind $X, Y \in X + \mathbb{K}(Y - X)$ wegen $0, 1 \in \mathbb{K}$. Gemäß a) und b) ist also das Verbindungsaxiom (V) erfüllt. Damit ist gezeigt, daß $(\mathbb{L}, G_{\mathbb{L}})$ eine affine Ebene ist. Für diese denken wir uns die bekannten Bezeichnungen eingeführt.

3) Um die Wohldefiniertheit von $\simeq_{\mathbb{L}}$ zu beweisen, betrachten wir $X', X'' \in \mathbb{L}$ und $X, X_0 \in \mathbb{L}^*$ für $X \in \{A, B, C, D\}$. Aus $X' + \mathbb{K}X = X'' + \mathbb{K}X_0$ folgt $\mathbb{K}X = \mathbb{K}X_0$ gemäß 2) c), und dann existiert ein $\lambda_X \in \mathbb{K}^*$ mit $X_0 = \lambda_X X$. Gilt nun $A' + \mathbb{K}A = A'' + \mathbb{K}A_0$ und $B' + \mathbb{K}B = B'' + \mathbb{K}B_0$, so gibt es $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{K}^*$ mit $A_0 = \lambda_A A \wedge B_0 = \lambda_B B$, und dann ist $\mathbb{K}A_0^{-1}B_0 = \mathbb{K}\lambda_A^{-1}\lambda_B A^{-1}B = \mathbb{K}A^{-1}B$. Entsprechendes gilt bzgl. C, D, und mithin ist $\simeq_{\mathbb{L}}$ wohldefiniert. Da $\simeq_{\mathbb{L}}$ durch eine Gleichheitsrelation definiert wurde, ist $\simeq_{\mathbb{L}}$ eine Äquivalenzrelation.

4) Wir zeigen nun, daß das Winkelaxiom (W) aus (7.1) gültig ist. Dazu seien die Geraden $g = A' + \mathbb{K}A,\ h = B' + \mathbb{K}B,\ k = C' + \mathbb{K}C$ und ein $D' \in \mathbb{L}$ vorgegeben. Für $D := A^{-1}BC$ besitzt $l := D' + \mathbb{K}D$ wegen $\mathbb{K}A^{-1}B = \mathbb{K}C^{-1}D \ \wedge\ (\mathbb{K}A = \mathbb{K}B \Leftrightarrow A^{-1}B \in \mathbb{K} \Leftrightarrow C^{-1}D \in \mathbb{K} \Leftrightarrow \mathbb{K}C = \mathbb{K}D) \ \wedge\ (\mathbb{K}A = \mathbb{K}C \Leftrightarrow A^{-1}C \in \mathbb{K} \Leftrightarrow B^{-1}D \in \mathbb{K} \Leftrightarrow \mathbb{K}B = \mathbb{K}D)$ und wegen 2) die gewünschten Eigenschaften. Ist $l_0 := D' + \mathbb{K}D_0$ eine weitere Gerade durch D' mit $(g, h) \simeq (k, l_0)$, also mit $\mathbb{K}C^{-1}D_0 = \mathbb{K}A^{-1}B$, so ist $\mathbb{K}D_0 = \mathbb{K}A^{-1}BC = KD$ und damit $l_0 = l$, d. h. (W) ist erfüllt.

5) Nach (7.1) ist jetzt nur noch das Umkreisaxiom (U) für drei beliebige nichtkollineare Punkte A, B, C nachzuweisen, d. h. für $X \in \mathbb{L}\backslash\{A, B, C\}$ ist $[\langle A, B, C\rangle \simeq \langle A, X, C\rangle] \Leftrightarrow [\langle C, X, B\rangle \simeq \langle C, A, B\rangle]$ und damit $[\mathbb{K} \ni (A-B)^{-1}(B-C)(A-X)(X-C)^{-1}] \Leftrightarrow [(C-X)^{-1}(X-B)(C-A)(A-B)^{-1} \in \mathbb{K}]$ zu zeigen. Dies folgt aber direkt durch Einsetzen der Identität $(B-C)(A-X) = (A-B)(X-C) + (X-B)(C-A)$. □

F. Der Isomorphiesatz

(9.21) Der Satz (9.20) zeigt, wie man aus quadratischen Körpererweiterungen euklidische Ebenen gewinnt. Bevor wir nun auf Beispiele eingehen, wollen wir aber sicherstellen, daß zu nichtisomorphen quadratischen Körpererweiterungen auch wirklich nichtisomorphe euklidische Ebenen gehören.

Download free eBooks at bookboon.com

Dabei nennen wir zwei quadratische Körpererweiterungen $(\mathbb{L},\mathbb{K})$, $(\mathbb{L}',\mathbb{K}')$ **isomorph**, wenn ein Körperisomorphismus σ von $\mathbb{L}(+,\cdot)$ auf $\mathbb{L}'(+,\cdot)$ mit $\sigma(\mathbb{K})=\mathbb{K}'$ existiert. Die Restriktion $\sigma\big|_{\mathbb{K}}$ von σ auf $\mathbb{K}$ ist dann ein Körperisomorphismus von $\mathbb{K}(+,\cdot)$ auf $\mathbb{K}'(+,\cdot)$. Wir beweisen nun

(9.22) **Isomorphiesatz für euklidische Ebenen**.
Sind $(\mathbb{L},\mathbb{K})$, $(\mathbb{L}',\mathbb{K}')$ zwei quadratische Körpererweiterungen und ist φ eine Bijektion von $\mathbb{L}$ auf $\mathbb{L}'$, so sind äquivalent:

(1) φ ist eine kreistreue Kollineation von $\mathbb{E}(\mathbb{L},\mathbb{K})$ auf $\mathbb{E}(\mathbb{L}',\mathbb{K}')$, d. h. φ führt Geraden in Geraden und Kreise in Kreise über.

(2) φ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{E}(\mathbb{L},\mathbb{K})$ auf $\mathbb{E}(\mathbb{L}',\mathbb{K}')$ im Sinne von (7.3).

(3) Es gibt Elemente $A,B\in\mathbb{L}'$ mit $A\neq 0'$ und einen Körperisomorphismus σ von $\mathbb{L}(+,\cdot)$ auf $\mathbb{L}'(+,\cdot)$ mit
$\boxed{\sigma(\mathbb{K})=\mathbb{K}'}\ \wedge\ \boxed{\varphi(X)=A\cdot\sigma(X)+B}\quad\forall\ X\in\mathbb{L}$.

Beweis: Es sei $\mathbb{E}:=\mathbb{E}(\mathbb{L},\mathbb{K})=:(\mathbb{L},\mathbb{G},\simeq)\wedge\mathbb{E}':=\mathbb{E}(\mathbb{L}',\mathbb{K}')=:(\mathbb{L}',\mathbb{G}',\simeq')$.
(1)$\Rightarrow$(2): Da in $\mathbb{E}$ und in $\mathbb{E}'$ durch je drei nichtkollineare Punkte genau ein Kreis geht, bildet φ^{-1} die Kreise von $\mathbb{E}'$ auf die Kreise von $\mathbb{E}$ ab.
Es seien nun $g,h,k,l\in\mathbb{G}$, und $g',h',k',l'\in\mathbb{G}'$ seien die zugehörigen Bilder bezüglich φ. Wir gehen von $g\nparallel h\wedge h\nparallel l\wedge l\nparallel k\wedge k\nparallel g$ aus, denn andernfalls ergibt sich $(g,h)\simeq(k,l)\Leftrightarrow(g',h')\simeq(k',l')$ aus (8.1) und aus der Pallelitätstreue von φ. Dann gibt es ein $g_0\in\mathbb{G}$ mit $g_0\cap h\cap l\cap k=\varnothing\wedge g_0\parallel g$, und für $g_0'=\varphi(g_0)$ gilt entsprechend $g_0'\cap h'\cap l'\cap k'=\varnothing\wedge g_0'\parallel g'$. Mit (8.10) und der Kreistreue von φ folgt nun
$(g,h)\simeq(k,l)\Leftrightarrow KVS(g_0,h,l,k)\Leftrightarrow KVS(g_0',h',l',k')\Leftrightarrow(g',h')\simeq(k',l')$, d. h. φ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{E}$ auf $\mathbb{E}'$ im Sinne von (7.3).
(2)$\Rightarrow$(3): Es sei $A:=\varphi(1)-\varphi(0)$ und $B:=\varphi(0)$. Dann ist $A\neq 0$, und $\eta:\mathbb{L}'\to\mathbb{L}':X\to AX+B$ ist gemäß (9.18) eine gleichsinnige Ähnlichkeit von $\mathbb{E}'$ mit $\eta(0')=\varphi(0)\wedge\eta(1')=\varphi(1)$. Dies bedeutet aber, daß $\sigma:=\eta^{-1}\circ\varphi$ ein Isomorphismus von $\mathbb{E}$ auf $\mathbb{E}'$ mit $\sigma(0)=0'\wedge\sigma(1)=1'$ ist und daß $\varphi(X)=A\cdot\sigma(X)+B\ \ \forall\ X\in\mathbb{L}$ gilt. Da σ eine konformitätserhaltende Kollineation ist, ist $\sigma(\mathbb{K})=\sigma(<0,1>)=<0',1'>=\mathbb{K}'$, und jeder Figur, die die Verknüpfung + bzw.$\cdot$ von zwei Elementen aus $\mathbb{E}$ beschreibt (vgl. (9.14) und Figur 9.3), entspricht vermittels σ eine Figur gleichen Typs in $\mathbb{E}'$. Demnach gilt $\sigma(X+Y)=\sigma(X)+\sigma(Y)\wedge\sigma(X\cdot Y)=$
$=\sigma(X)\cdot\sigma(Y)\ \ \forall\ X,Y\in\mathbb{L}$, d. h. σ ist ein Körperisomorphismus von $\mathbb{L}(+,\cdot)$ auf $\mathbb{L}'(+,\cdot)$.

Download free eBooks at bookboon.com

(3) $\Rightarrow$ (1): Es sei $X' := \sigma(X) \quad \forall\, X \in \mathbb{L}$. Für $C, D, E, X \overset{\in}{\neq} \mathbb{L} \;\wedge\; F \in \mathbb{L}^*$ erhalten wir dann $[(C'-D')^{-1}(D'-E')(C'-X')(X'-E')^{-1} \in \sigma(\mathbb{K}) = \mathbb{K}'$ $\Leftrightarrow (C-D)^{-1}(D-E)(C-X)(X-E)^{-1} \in \mathbb{K}]$ und $\sigma(E+\mathbb{K}F) = E'+\sigma(\mathbb{K})F'$. Gemäß (9.17), (9.18) und (9.20) bedeutet dies, daß σ und damit auch φ eine kreistreue Kollineation ist. $\square$

(9.23) **Corollar 1**. *Zwei quadratische Körpererweiterungen sind genau dann (algebraisch) isomorph, wenn die zugehörigen euklidischen Ebenen (geometrisch) isomorph sind.*

(9.24) **Corollar 2**. *Ist* $(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ *eine quadratische Körpererweiterung, so sind die Automorphismen von* $\mathbb{E}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ *die Abbildungen der Form*

$$\mathbb{L} \to \mathbb{L} : \boxed{X \to A \cdot \sigma(X) + B},$$

wobei $A, B \in \mathbb{L}$ *mit* $A \neq 0$ *sind und wobei* σ *ein Automorphismus des Körpers* $\mathbb{L}(+, \cdot)$ *mit* $\sigma(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$ *ist.*
Die Automorphismen von $\mathbb{E}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ *sind genau die kreistreuen Kollineationen von* $\mathbb{E}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$. *Ist* $\mathbb{E}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ *eine normale euklidische Ebene, so sind die Automorphismen von* $\mathbb{E}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ *genau die orthogonalitätstreuen Kollineationen von* $\mathbb{E}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ *(vgl. Aufgabe 4.10).*

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

(9.25) *Bemerkung.* Ist $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ eine euklidische Ebene und konstruiert man zu dieser gemäß (9.12) eine quadratische Körpererweiterung $(\mathbb{L}, \mathbb{K})$, so führt eine andere Wahl von 0 und 1 nach (9.22) auf ein isomorphes Körperpaar $(\mathbb{L}', \mathbb{K}')$.
Demnach ist $(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ durch $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, und daher wird $(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ auch *„die“ zu* $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ *gehörige quadratische Körpererweiterung mit* $\mathbb{K}$ *als zugehörigem* **Koordinatenkörper** genannt.

G. Konstruktion von Modellen

(9.26) Unser Vorhaben, Modelle nichtisomorpher euklidischer Ebenen vorzustellen, läuft nach (9.22) darauf hinaus, Beispiele nichtisomorpher quadratischer Körpererweiterungen anzugeben.
Man konstruiert solche Erweiterungen in der Regel derart, daß man sich einen Körper $\mathbb{K}(+, \cdot)$ gegeben denkt, dann für $\mathbb{L} := \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ in geeigneter Weise Verknüpfungen $+, \cdot$ erklärt und schließlich $\mathbb{K}(+, \cdot)$ in $\mathbb{L}(+, \cdot)$ einbettet, ein Verfahren, wie es z. B. auch bei der Konstruktion von $\mathbb{C}$ aus $\mathbb{R}$ benutzt wird.

Damit unser Vorgehen für den allgemeinen Fall verständlich wird, bemerken wir zunächst folgendes:

(9.27) Gegeben sei eine quadratische Körpererweiterung $(\mathbb{L}(+, \cdot), \mathbb{K})$.
Man gewinnt eine Darstellung von $\mathbb{L}$ mit Hilfe des Koordinatenkörpers $\mathbb{K}$, indem man ein festes $i \in \mathbb{L} \backslash \mathbb{K}$ wählt und dann $\{1, i\}$ als Basis des zweidimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathbb{L}$ benutzt.
Bezüglich dieser Basis ist jedes $X \in \mathbb{L}$ auf genau eine Weise in der Form

(1) $X = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{K}$

darstellbar. Insbesondere gibt es feste Elemente $p, q \in \mathbb{K}$ mit

(2) $i^2 = p + iq$,

und dann lassen sich die Verknüpfungen von $\mathbb{L}(+, \cdot)$ in der Form

(3) $(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$,

(4) $(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu + pyv) + i(xv + yu + qyv)$

mit $x, y, u, v \in \mathbb{K}$ darstellen.
Aus der (durch Nachrechnen zu bestätigenden) Beziehung

(5) $(x + iy) \cdot (x + qy - iy) = x^2 + qxy - py^2 \in \mathbb{K} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{K}$

ergibt sich eine Formel für die Inversenbildung in $\mathbb{L}^* := \mathbb{L} \backslash \{0\}$, denn im Falle $(x, y) \neq (0, 0)$ ist $x^2 + qxy - py^2$ als Produkt aus zwei von Null verschiedenen Faktoren selbst von Null verschieden, und mithin gilt

(6) $(x + iy)^{-1} = \dfrac{x + qy}{x^2 + qxy - py^2} - i\, \dfrac{y}{x^2 + qxy - py^2} \qquad \forall\, x + iy \in \mathbb{L}^*$

sowie (mit $y = 1$)

(7) $p \neq x^2 + qx \quad \forall\, x \in \mathbb{K}$.

Download free eBooks at bookboon.com

Nach (7) ist $\mathbb{K}$ kein ganz beliebiger Körper, sondern ein Körper, in dem sich Elemente p, q mit (7) finden lassen. Zum Beispiel kann man nicht $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wählen, denn zu jedem Paar $(p, q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $p = z^2 + qz$, da jede quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$ lösbar ist.

Wir wollen uns nun überlegen, daß (7) die einzige Einschränkung ist, die an $\mathbb{K}$ zu stellen ist:

(9.28) Gegeben sei ein Körper $\mathbb{K}(+, \cdot)$, in welchem Elemente p, q mit

(1) $p \neq x^2 + qx \quad \forall\, x \in \mathbb{K}$

existieren. Auf $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ seien durch

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$$
$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu + pyv, xv + yu + qyv)$$

für $x, y, u, v \in \mathbb{K}$ zwei Verknüpfungen $+, \cdot$ erklärt (vgl. (9.27) (3), (4)).

WAGENINGEN UNIVERSITY
WAGENINGEN UR

WILLST DU EINFLUSS AUF EINEN GESUNDEN LEBENSRAUM HABEN?

DANN DENKE AN DIE WAGENINGEN UNIVERSITY IN DEN NIEDERLANDEN

Bist du an einem Master auf dem Gebiet der innovativen Methoden und nachhaltigen Lösungen interessiert, um die Qualität unseres Lebensraumes zu verbessern? Dann denke an die Wageningen University. Hier findest du besondere Umweltstudien wie **Nachhaltiger Tourismus**, **Sozialökonomische Entwicklung**, **Umwelt** und **Innovative Technologien**. Diese multidisziplinäre Herangehensweise macht diese Masterstudiengänge einzigartig!

Um mehr Information zu erhalten, gehe zu **www.wageningenuniversity.eu**

YouTube Broadcast Yourself™

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Es zeigt sich dann, daß $\mathbb{L}_{p,q}(\mathbb{K}) := \mathbb{L}_{p,q} := (\mathbb{K}\times\mathbb{K})(+,\cdot)$ ein kommutativer Körper ist, wobei sich die Möglichkeit der Inversenbildung für jedes $(x,y) \in (\mathbb{K}\times\mathbb{K})\backslash\{(0,0)\}$ aus (1) ergibt (vgl. (9.27) (6) und Aufgabe A 9.3.). Die Abbildung $\mathbb{K} \to \mathbb{L}_{p,q} : x \to (x,0)$ erweist sich als ein Körpermonomorphismus (vgl. Aufgabe A 9.3.), und folglich dürfen wir uns den Körper $\mathbb{K}$ im weiteren durch die Identifikation $x = (x,0)\ \forall\, x \in \mathbb{K}$ in den Körper $\mathbb{L}_{p,q}$ eingebettet denken.
Setzen wir noch $i := (0,1)$, so erhalten wir

(2) $(x,y) = (x,0) + (0,1)\cdot(y,0) = x + iy$

$\forall\, x,y \in \mathbb{K}$ und insbesondere

(3) $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (p,q) = p + iq,$

d. h. $(\mathbb{L}_{p,q}(+,\cdot),\mathbb{K})$ ist eine quadratische Körpererweiterung, die wir auch *die zu* $(\mathbb{K},p,q)$ *gehörige* **quadratische Körpererweiterung** nennen.

(9.29) Im Falle $\mathbb{K}=\mathbb{R}\wedge p=-1\wedge q=0$ ist $\mathbb{L}_{p,q}(+,\cdot)$ definitionsgemäß der Körper $\mathbb{C}\,(+,\cdot)$ der komplexen Zahlen. Ist $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ und sind $p,q\in\mathbb{R}$ mit $p\neq x^2+qx\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$, so erweist sich $\mathbb{L}_{p,q}(+,\cdot)$ als ein zu $\mathbb{C}\,(+,\cdot)$ isomorpher Körper (vgl. Aufgabe A 9.4.). Demnach gibt es zu $\mathbb{R}$ (bis auf Isomorphie) genau die quadratische Körpererweiterung $(\mathbb{C},\mathbb{R})$. Wir werden später sehen, daß $\mathbb{E}(\mathbb{C},\mathbb{R})$ die Anschauungsebene ist.

Ist $\mathbb{K}(+,\cdot)$ ein Körper, so sei $\mathbb{K}^{(2)} := \{x^2 \mid x\in\mathbb{K}\}$. Wir zeigen

(9.30) **Satz**. *Ist* $\mathbb{K}(+,\cdot)$ *ein Körper und sind* $p,p'\in\mathbb{K}\backslash\mathbb{K}^{(2)}$ *mit* $p/p'\in\mathbb{K}^{(2)}$, *so sind* $(\mathbb{L}_{p,0}(+,\cdot),\mathbb{K})$ *und* $(\mathbb{L}_{p',0}(+,\cdot'),\mathbb{K})$ *isomorph.*

Beweis: Ist $r\in\mathbb{K}^*$ mit $p'\cdot r^2=p$, so ist $\sigma\colon \mathbb{L}_{p,0}(\mathbb{K})(+,\cdot)\to\mathbb{L}_{p',0}(\mathbb{K})(+,\cdot')$: $(x,y)\to(x,ry)$ ein Körperisomorphismus mit $\sigma(\mathbb{K})=\mathbb{K}$. □

(9.31) Der Körper $\mathbb{Q}(+,\cdot)$ der rationalen Zahlen besitzt unendlich viele nichtisomorphe quadratische Körpererweiterungen. Dies folgt aus

(9.32) **Satz**. *Sind* $p,\ p'\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Q}^{(2)}$, *so gilt* $\mathbb{L}_{p,0}(\mathbb{Q})(+,\cdot)\cong L_{p',0}(\mathbb{Q})(+,\cdot')$ *genau dann, wenn* $p/p'\in\mathbb{Q}^{(2)}$ *ist. Wenn* p *und* p' *Primzahlen sind, dann sind* $p,\ p'\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Q}^{(2)}$, *und im Falle* $p\neq p'$ *ist* $p/p'\notin\mathbb{Q}^{(2)}$.

Beweis: 1) Ist σ ein Isomorphismus von $\mathbb{L}_{p,0}(\mathbb{Q})(+,\cdot)$ auf $\mathbb{L}_{p',0}(\mathbb{Q})(+,\cdot')$, so führt Induktion zunächst auf $\sigma(n)=n\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$, und damit folgt nacheinander $\sigma(1/n)=1/n\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $\sigma(r)=r\ \forall\ r\in\mathbb{Q}_+$ und $\sigma(r)=r\ \forall\ r\in\mathbb{Q}$. Nun seien $u,v\in\mathbb{Q}$ mit $\sigma(i)=u+iv$. Dann erhalten wir $u^2+p'v^2+2uvi=$ $=\sigma(i)\cdot'\sigma(i)=\sigma(i\cdot i)=\sigma(p)=p$, also $u=0\ \wedge\ p'\cdot v^2=p\ \wedge\ p/p'\in\mathbb{Q}^{(2)}$.
2) Sind p,p' Primzahlen, so führt der Satz über die eindeutige Primfak-

Download free eBooks at bookboon.com

torzerlegung in $\mathbb{N}^*$ auf $p{\cdot}m^2 \neq n^2 \wedge [\, p \neq p' \Rightarrow p{\cdot}m^2 \neq p'{\cdot}n^2\,] \;\; \forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$.
3) Mit 1), (9.30) und 2) ist der Satz bewiesen. □

(9.33) Ist $\mathbb{K}(+,\cdot)$ ein Körper, in welchem -1 kein Quadrat eines Elementes aus $\mathbb{K}$ ist – jeder angeordnete Körper hat z. B. diese Eigenschaft – so kann man $p = -1 \wedge q = 0$ wählen, und dann ist $(\mathbb{L}_{p,q}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ eine quadratische Körpererweiterung.

(9.34) Ist $\mathbb{K}(+,\cdot)$ ein *endlicher* Körper, also ein sogenanntes **Galois-Feld** mit endlichen vielen Elementen, so ist die Abbildung $\mathbb{K} \to \mathbb{K} : x \to x^2 + x$ wegen $0^2 + 0 = 0 = (-1)^2 + (-1)$ nicht injektiv und deshalb auch nicht surjektiv. Demnach gibt es ein $p \in \mathbb{K}$ mit $p \neq x^2 + x \;\; \forall\, x \in \mathbb{K}$, und dann ist $(\mathbb{L}_{p,1}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ eine quadratische Körpererweiterung.
Im Falle $|\mathbb{K}| = n \in \mathbb{N}$ enthält $\mathbb{E}(\mathbb{L}_{p,1}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ genau n^2 Punkte, und jede Gerade besteht aus genau n Punkten (vgl.(9.28), (9.20)). Dabei ist $n \geq 2$, da stets $0, 1 \in \mathbb{K}$ gilt.
Man nennt eine euklidische Ebene genau dann **endlich**, wenn sie nur endlich viele Punkte enthält.

(9.35) Ist a eine Primzahl, so wird aus der Menge $\mathbb{Z}_a := \{0, 1, ..., a-1\}$ durch Rechnen „modulo a“ der Körper $GF(a) := \mathbb{Z}_a(+_a, \cdot_a)$, der aus genau a Elementen besteht und **Primkörper** der Charakteristik a oder **Galois-Feld** mit a Elementen genannt wird.

Ausgehend von $GF(a)$ kann man nun gemäß (9.34) nacheinander Körper $GF(a^2), GF(a^4), GF(a^8), ..., GF(a^{2^n}), ...$ mit $a^2, (a^2)^2, (a^2)^2)^2, ..., a^{2^n}, ...$ Elementen konstruieren, wobei $(GF(a^{2^{n+1}}), GF(a^{2^n}))$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine quadratische Körpererweiterung ist.

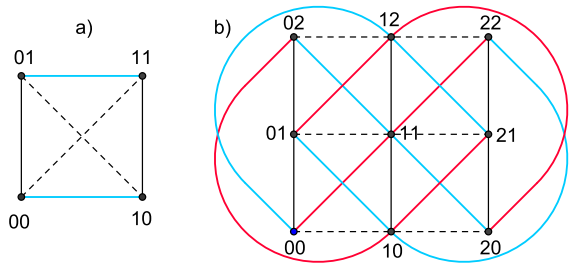
Damit erhält man allerdings noch nicht alle endlichen euklidischen Ebenen. In der Algebra wird nämlich bewiesen, daß ein Körper $\mathbb{K}$ mit $|\mathbb{K}| = m \in \mathbb{N}$ genau dann existiert, wenn m eine Primzahlpotenz ist, und ferner, daß je zwei endliche Körper gleicher Mächtigkeit isomorph sind. Dies bedeutet nach (9.22) und nach (9.34), daß es zu jeder Primzahl a und zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ bis auf Isomorphie genau eine euklidische Ebene mit a^{2n} Punkten gibt. In einer solchen Ebene besteht jede Gerade aus genau a^n Punkten, und ähnlich wie in (4.17) folgt aus (8.2) und (8.4), daß dann jeder Kreis $a^n{+}1$ Punkte enthält (vgl. Aufgabe A 9.5.).

Zur Konstruktion nichtendlicher quadratischer Körpererweiterungen aus endlichen Körpern vgl. (11.7)(6).

Download free eBooks at bookboon.com

Die kleinste euklidische Ebene besteht aus vier Punkten; die Geraden sind die zweielementigen Teilmengen, und die Kreise sind die dreielementigen Teilmengen (vgl. A 8.4.). Die nächstgrößere euklidische Ebene besteht aus 9 Punkten; hier sind die Geraden gewisse dreielementige Teilmengen und die Kreise gewisse vierelementige Teilmengen.

Man kann versuchen, diese beiden kleinsten euklidischen Ebenen, die man ausgehend von GF(2) bzw. von GF(3) gemäß (9.34) gewinnt, schematisch darzustellen, indem man z. B. Punkte, die eine Gerade oder einen Kreis bilden, durch eine Linie verbindet. (Nicht die Linie, sondern lediglich die auf der Linie besonders markierten Punkte bilden eine Gerade bzw. einen Kreis).
Die folgenden Diagramme, deren Gestalt man durch Nachrechnen bestätigen kann, stellen aus Gründen der Übersichtlichkeit lediglich die Punkte und Geraden der beiden kleinsten euklidischen Ebenen dar:



Figur 9.4: $xy := (x, y)$

a) $\mathbb{E}(GF(4), GF(2))$.
b) $\mathbb{E}(GF(9), GF(3))$ ist die kleinste normale euklidische Ebene. Hier gibt es 12 Geraden und 18 Kreise, wie wir später sehen werden (vgl. (11.14)). Z.B. ist
$k_{11;10} = \{10, 21, 12, 01\}$ und
$k_{11;00} = \{00, 20, 22, 02\}$.

H. Aufgaben

A 9.1. Man beweise unter Verwendung von Induktion: Ist $\mathbb{K}$ ein Körper mit $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{Q}$ und ist σ ein Homomorphismus von $\mathbb{Q}(+, \cdot)$ in $\mathbb{K}(+, \cdot)$ mit $\sigma(1) \neq 0$, so ist $\sigma = id_{\mathbb{Q}}$.

A 9.2. Man beweise: Ist σ ein Homomorphismus von $\mathbb{R}(+, \cdot)$ in sich mit $\sigma(1) \neq 0$, so ist $\sigma = id_{\mathbb{R}}$. (Hinweis: Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $x \leq y$ genau dann, wenn es ein $z \in \mathbb{R}$ mit $z^2 = y - x$ gibt.)

A 9.3. a) Man zeige, daß $\mathbb{L}_{p,q}(\mathbb{K})$ aus (9.28) ein Körper ist. (Zur Inversenbildung vgl. (9.27)(5),(6).)
b) Man zeige, daß $\mathbb{K} \to \mathbb{L}_{p,q}(\mathbb{K}) : x \to (x, 0)$ ein Körpermonomorphismus ist.

Download free eBooks at bookboon.com

A 9.4. $\mathbb{K}(+,\cdot)$ sei ein Körper, und es seien $p,q\in\mathbb{K}$ mit $p\neq x^2+qx\ \ \forall\, x\in\mathbb{K}$. Man zeige: a) Ist $q\neq 0$ und ist $p':=p/q^2$, so ist $p'\neq x^2+x\ \ \forall\, x\in\mathbb{K}$, und $\sigma:\mathbb{L}_{p,q}(+,\cdot)\to\mathbb{L}_{p',1}(+,\cdot'):(x,y)\to(x,qy)$ ist ein Isomorphismus.
b) Erfüllt das Element $2:=1+1$ von $\mathbb{K}$ die Bedingung $2\neq 0$ und ist $p':=p+(q/2)^2$, so ist $p'\neq x^2\ \ \forall\, x\in\mathbb{K}$, und $\sigma:\mathbb{L}_{p,q}(+,\cdot)\to\mathbb{L}_{p',0}(+,\cdot'):(x,y)\to(x+qy/2,y)$ ist ein Isomorphismus.
c) Ist $\mathbb{K}=\mathbb{R}\wedge q=0$, so ist $\sigma:\mathbb{L}_{p,q}(+,\cdot')\to\mathbb{C}(+,\cdot):(x,y)\to(x,\sqrt{-p}\,y)$ ein Isomorphismus.

A 9.5. Man zeige: Ist $(\mathbb{P},\mathbb{G},\simeq)$ eine euklidische Ebene und gibt es ein $g_0\in\mathbb{G}$ mit $|g_0|=n\in\mathbb{N}$, so gilt $|g|=n\geq 2\ \ \forall\, g\in\mathbb{G}$ und $|k|=n+1\geq 3\ \forall\, k\in\mathfrak{K}$ (vgl.(4.17)).

A 9.6. Man zeige: Ist $(\mathbb{P},\mathbb{G},\simeq)$ eine euklidische Ebene und sind $Z,Z'\in\mathbb{P}$, so ist $\Delta(Z)(\circ)\cong\Delta(Z')(\circ)$ und $\ddot{\mathbb{A}}^+(Z)(\circ)\cong\ddot{\mathbb{A}}^+(Z')(\circ)$ (vgl. (9.3), (9.11)).

A 9.7. Man zeige: Ist $(\mathbb{P}_\nu,\mathbb{G}_\nu,\simeq_\nu)$ eine euklidische Ebene mit $\ddot{\mathbb{A}}^+{}_\nu$ bzw. Δ_ν bzw. $\mathfrak{T}_\nu$ als Gruppe der gleichsinnigen Ähnlichkeiten bzw. der Dilatationen bzw. der Translationen $(\nu=1,2)$ und ist φ ein Isomorphismus von $(\mathbb{P}_1,\mathbb{G}_1,\simeq_1)$ auf $(\mathbb{P}_2,\mathbb{G}_2,\simeq_2)$, so gilt $\varphi\circ\ddot{\mathbb{A}}^+{}_1\circ\varphi^{-1}=\ddot{\mathbb{A}}^+{}_2$ und $\varphi\circ\Delta_1\circ\varphi^{-1}=\Delta_2$ sowie $\varphi\circ\mathfrak{T}_1\circ\varphi^{-1}=\mathfrak{T}_2$.

A 9.8. Man zeige: Ist $(\mathbb{P},\mathbb{G},\simeq)$ eine euklidische Ebene, so ist $\ddot{\mathbb{A}}^+$ ein Normalteiler der Automorphismengruppe von $(\mathbb{P},\mathbb{G},\simeq)$.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Bemerkung. *Nach A 9.4. a) und b) darf man im Falle* $2 \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ *o.B.d.A. von* $q=0$ *und im Falle* $2=0$ *o.B.d.A. von* $q \in \{0,1\}$ *ausgehen, wenn es darum geht, alle nichtisomorphen quadratischen Körpererweiterungen von* $\mathbb{K}$ *zu erfassen.*

10 Teilverhältnisse

Im folgenden sei $(\mathbb{L}(+,\cdot),\mathbb{K})$ eine quadratische Körpererweiterung mit $\mathbb{E} := (\mathbb{P},\mathbb{G},\simeq) := \mathbb{E}(\mathbb{L}(+,\cdot),\mathbb{K})$ als der zugehörigen euklidischen Ebene (vgl. §9).

Die eingeführten algebraischen Operationen lassen sich mit geometrischen Konzepten und Aussagen verbinden. So werden wir hier ausgehend von dem Begriff des Teilverhältnisses zwei Ähnlichkeitssätze, die Strahlensätze sowie Sätze von Menelaos, Ceva und Brianchon beweisen.

A. Charakteristik eines Körpers

(10.1) Es sei $0 = 0_{\mathbb{L}}$ bzw. $1 = 1_{\mathbb{L}}$ das Null- bzw. Einselement von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{L}$, und es sei $2_{\mathbb{L}} := 1_{\mathbb{L}} + 1_{\mathbb{L}}$ sowie $3_{\mathbb{L}} := 1_{\mathbb{L}} + 1_{\mathbb{L}} + 1_{\mathbb{L}}$. Ist $2_{\mathbb{L}} = 0_{\mathbb{L}}$ (bzw. $3_{\mathbb{L}} = 0_{\mathbb{L}}$), so bezeichnen wir 2 (bzw. 3) als die **Charakteristik** von $\mathbb{K}$, von $\mathbb{L}$ und von $\mathbb{E}$, in Zeichen: $char\,\mathbb{K} = char\,\mathbb{L} = char\,\mathbb{E} = 2$ (bzw. $= 3$). Gilt dagegen $2_{\mathbb{L}} \neq 0_{\mathbb{L}}$ (bzw. $3_{\mathbb{L}} \neq 0_{\mathbb{L}}$), so sagen wir, daß $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ und $\mathbb{E}$ eine **von 2 (bzw. von 3) verschiedene Charakteristik** besitzen, in Zeichen: $char\,\mathbb{K} = char\,\mathbb{L} = char\,\mathbb{E} \neq 2$ (bzw. $\neq 3$).
Ist $2_{\mathbb{L}} \neq 0_{\mathbb{L}}$, so ist $1/2 := 2_{\mathbb{L}}^{-1}$ ein wohlbestimmtes Element von $\mathbb{K}$, und man kann Ausdrücke der Form $A/2 := A \cdot 1/2$ mit $A \in \mathbb{L}$ bilden, d. h. hier besteht die Möglichkeit des Halbierens. Offenbar ist $A/2 + A/2 = = A(1/2 + 1/2) = A \cdot (1_{\mathbb{L}}+1_{\mathbb{L}}) \cdot 1/2 = A \ \ \forall\, A \in \mathbb{L}$.
Entsprechend bedeutet $3_{\mathbb{L}} \neq 0_{\mathbb{L}}$, daß $1/3 := 3_{\mathbb{L}}^{-1}$ ein wohlbestimmtes Element von $\mathbb{K}$ ist und daß man Ausdrücke der Form $A/3 := A \cdot 1/3$ mit $A \in \mathbb{L}$ bilden kann, d. h. hier besteht die Möglichkeit des Drittelns.
Wenn man Körper der Charakteristik 2 (bzw. 3) zuläßt, so läuft dies darauf hinaus, daß man bei Sätzen und Beweisen auf die Möglichkeit des Halbierens (bzw. Drittelns) verzichtet.
Ist $\mathbb{L}$ ein Körper der Charakteristik 2, so ist $1_{\mathbb{L}}=-1_{\mathbb{L}}$ und $A=-A \ \ \forall\, A \in \mathbb{L}$, also $+ = -$, d. h. beim Rechnen in einem solchen Körper kann man keine Vorzeichenfehler machen.
Ist $\mathbb{K}$ endlich, so gilt $char\,\mathbb{K} = 2$ (bzw. $char\,\mathbb{K} = 3$) genau dann, wenn $|\mathbb{K}|$ durch 2 (bzw. durch 3) teilbar ist. (Beispiele: $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ und allgemein $GF(2^n), GF(3^n)$ mit $n \in \mathbb{N}^*$).
Ist $\mathbb{K}(+,\cdot)$ ein beliebiger Körper und existiert eine kleinste positive Zahl $r \in \mathbb{N}^*$ mit $r_{\mathbb{L}} := \sum_{\nu=1}^{r} 1_{\mathbb{L}} =: r \cdot 1_{\mathbb{L}} = 0$, so nennt man r die **Charakteristik** von $\mathbb{K}$, von $\mathbb{L}$ und von $\mathbb{E}$, in Zeichen: $char\,\mathbb{K} := char\,\mathbb{L} := char\,\mathbb{E} := r$. Man kann sich überlegen, daß eine solche Zahl r, wenn sie existiert, stets eine Primzahl ist.

Download free eBooks at bookboon.com

Existiert eine solche Zahl r jedoch nicht (wie z.B. im Fall $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), so setzt man $char\,\mathbb{K} := char\,\mathbb{L} := char\,\mathbb{E} := 0$ und spricht von der **Charakteristik Null**. Es gilt stets $(*)$ $\boxed{X \cdot char\,\mathbb{L} = 0_{\mathbb{L}}}$ $\forall\ X \in \mathbb{L}$, denn ist $n := char\,\mathbb{L}$, so ist $X \cdot n = (X \cdot 1_{\mathbb{L}}) \cdot n = X \cdot (1_{\mathbb{L}} \cdot n) = X \cdot 0_{\mathbb{L}} = 0_{\mathbb{L}}$. Statt $n_{\mathbb{L}}$ oder $1_{\mathbb{L}} \cdot n$ schreibt man in der Regel einfach n. Im Zweifelsfalle muß man sich also überlegen, ob $n \in \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{K}$ gemeint ist. Der folgende Satz zeigt, wie sich der Fall der Charakteristik 2 geometrisch auswirkt:

Realise
your dreams
and ambitions

Mid Sweden University offers a wide range of international programmes in English. This way, you can study, meet new, inspiring people and experience a different culture and environment at the same time. Invest in a first-class education which you will benefit from in years to come – an education that makes a difference.

Apply today!

Learn more at **www.miun.se/eng**

Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY
Discover your opportunities

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

(10.2) **Satz**. *(1) Ein echtes Viereck (A, B, C, D) der euklidischen Ebene $\mathbb{E}$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn $A - D = B - C$ ist.*
(2) Die Diagonalen eines Parallelogramms (A, B, C, D) schneiden sich genau dann, wenn $\operatorname{char}\mathbb{E} \neq 2$ ist.

Beweis: (1) Nach (3.12) und (3.13) ist (A,B,C,D) genau dann ein Parallelogramm, wenn $\tau_{A,B}(D) = C$ ist. Nach (9.18) ist $\tau_{A,B}$ die Abbildung $X \to X + B - A$, und folglich ist $\tau_{A,B}(D) = C \Leftrightarrow D + B - A = C \Leftrightarrow A - D = B - C$.
(2) Voraussetzungsgemäß sind $C - A, A - B$ linear unabhängig, und es gilt $D - A = C - B$, also $D - B = (C - A) + 2(A - B)$. Demnach ist $<A, C> \cap <B, D> = \varnothing \Leftrightarrow \mathbb{K}(C - A) = \mathbb{K}(D - B) \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{K} : \lambda\cdot(C - A) = (C - A) + 2(A - B) \Leftrightarrow 2 = 0$. □

(10.3) *Anmerkung.* Nach (10.2)(2) und (3.10) sind euklidische Ebenen der Charakteristik 2 keine normalen euklidischen Ebenen, also sogenannte **nichtnormale euklidische Ebenen**. Umgekehrt zeigen (10.2)(2) und (3.10), daß die Charakteristik einer normalen euklidischen Ebene stets von 2 verschieden ist.
Später werden wir sehen, daß die normalen euklidischen Ebenen genau die euklidischen Ebenen mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik sind.

B. Definition und Grundeigenschaften von Teilverhältnissen

(10.4) Sind A, B, C drei verschiedene Punkte von $\mathbb{E}$, so wird $\frac{A-C}{B-C}$ das **Teilverhältnis** von C bezüglich (A, B) genannt. Das Teilverhältnis heißt **linear**, wenn A, B, C kollinear sind.
Durch Nachrechnen bestätigt man leicht die folgenden Aussagen für je drei verschiedene Punkte A, B, C:

(1) Ist $T := \frac{A-C}{B-C}$, *so gilt* $T \in \mathbb{L}\backslash\{0, 1\} \wedge 1-T \neq 0 \neq 1-T^{-1}$ *sowie*
$T^{-1} = \frac{B-C}{A-C} \wedge 1-T = \frac{A-B}{C-B} \wedge (1-T)^{-1} = \frac{C-B}{A-B} \wedge 1-T^{-1} = \frac{B-A}{C-A}$
$\wedge\ (1-T^{-1})^{-1} = \frac{C-A}{B-A} \wedge C = A+(1-T^{-1})^{-1}(B-A)$.

(2) Die Zuordnung $t : \mathbb{L}\backslash\{A, B\} \to \mathbb{L}\backslash\{0, 1\} : X \to \frac{A-X}{B-X}$ *ist eine Bijektion mit* $t\,(<A, B>\backslash\{A, B\}) = \mathbb{K}\backslash\{0, 1\}$.

Download free eBooks at bookboon.com

(3) Es ist $\frac{A-C}{B-C} \in \mathbb{K} \Leftrightarrow C \in <A,B>$.

(4) Es ist $\frac{B-A}{C-A} \cdot \frac{C-B}{A-B} \cdot \frac{A-C}{B-C} = \frac{B-C}{A-C} \cdot \frac{A-B}{C-B} \cdot \frac{C-A}{B-A} = -1$.

(5) Ist $D \in \mathbb{L}\backslash\{A\}$*, so ist* $\frac{B-A}{C-A} \cdot \frac{C-A}{D-A} = \frac{B-A}{D-A}$.

(10.5) Ist (A,B,C,D) ein Parallelogramm und ist $<A,C> \cap <B,D> = \{M\}$ mit $M \in \mathbb{L}$, so ist *char* $\mathbb{L} \neq 2$ gemäß (10.2). Mit $A-D = B-C$ folgt $<A,C> \ni A+\frac{1}{2}(C-A) = \frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}(B+D) = B+\frac{1}{2}(D-B) \in <B,D>$, also $M = \frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}(B+D)$.
Im Hinblick auf (3.10) erweist es sich demnach als sinnvoll, $M = \frac{1}{2}(A+C)$ als die **Mitte von** $\{A,C\}$ zu bezeichnen, und zwar auch dann, wenn $A = C$ ist. Ist $A \neq C$, so ist

$$M = \tfrac{1}{2}(A+C) \Leftrightarrow A-M = -(C-M) \Leftrightarrow \frac{A-M}{C-M} = -1.$$

Folglich ist M im Falle $A \neq C$ genau dann die Mitte von $\{A,C\}$, wenn M bezüglich (A,C) (und damit auch bezüglich (C,A)) das Teilverhältnis -1 hat. Da $\frac{A-M}{C-M}$ im Falle $A \neq C$ nicht gleich $+1$ sein kann, besitzt $\{A,C\}$ im Falle $A \neq C$ *genau dann eine Mitte, wenn char* $\mathbb{E} \neq 2$ *ist.*

Wir erhalten nun

(10.6) **Satz**. *Gegeben sei eine gleichsinnige Ähnlichkeit* φ.
Ist $A := \varphi(1) - \varphi(0)$ *und* $B := \varphi(0)$*, so gilt:*

(1) Es ist $\boxed{\varphi(X) = AX+B}$ *und* $\boxed{\varphi(X)-\varphi(Y) = A\cdot(X-Y)}$ $\forall\ X,Y \in \mathbb{L}$.
Deshalb wird A *auch der* **Streckungsfaktor** *von* φ *genannt.*

(2) Es ist $\frac{\varphi(X)-\varphi(Z)}{\varphi(Y)-\varphi(Z)} = \frac{X-Z}{Y-Z}$ $\forall\ X,Y,Z \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$,
d.h. φ *ist* **teilverhältnistreu**.

(3) Im Falle char $\mathbb{E} = 2$ *ist* φ *genau dann involutorisch (vgl. (5.14)), wenn* φ *eine von* $id_{\mathbb{L}}$ *verschiedene Translation ist.*

(4) Im Falle char $\mathbb{E} \neq 2$ *ist* φ *genau dann involutorisch,wenn* $A = -1$ *ist. Für* $A = -1 \neq +1$ *ist* φ *eine involutorische Dilatation mit dem einzigen Fixpunkt* $M = \frac{1}{2}B$*, und dann wird* φ *die* **Punktspiegelung** $\widetilde{M}$ *an* M *genannt (vgl. (3.7) und (9.2)). Es ist*
$\boxed{\widetilde{M}(X) = -X+2M}$ *und* $[\widetilde{M}(X) = Y \Leftrightarrow M = \frac{1}{2}(X+Y)]$ $\forall\ X,Y \in \mathbb{P}$.

Beweis: (1) folgt aus (9.5) und (9.18), und (2)-(4) ergeben sich mit kurzer Rechnung aus (1). □

Download free eBooks at bookboon.com

C. Ähnlichkeitssätze und Strahlensätze

(10.7) Teilmengen $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ von $\mathbb{L}$ heißen **gleichsinnig ähnlich**, wenn es ein $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\varphi(\mathbb{M}) = \mathbb{M}'$ gibt. Sind $A, B, C \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$ und $A', B', C' \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$, so heißen die Tripel (A, B, C), (A', B', C') **gleichsinnig ähnlich**, wenn es ein $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\varphi(A) = A' \wedge \varphi(B) = B' \wedge \varphi(C) = C'$ gibt. Sind $A, B, C \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$, so heißt (A, B, C) ein **geordnetes Dreieck**, wenn A, B, C nichtkollinear sind. Mit diesen Vereinbarungen folgt

(10.8) **Erster Ähnlichkeitssatz**. *Sind $A, B, C \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$ und $A', B', C' \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$, so sind äquivalent:*

(1) (A, B, C) und (A', B', C') sind gleichsinnig ähnlich.

(2) Die Teilverhältnisse $\frac{A-C}{B-C}$ und $\frac{A'-C'}{B'-C'}$ sind gleich.

(3) Es gibt ein $X \in \mathbb{L}^*$ mit $X \cdot (A-C) = A'-C' \wedge X \cdot (B-C) = B'-C'$.

Beweis: Nach (9.5) und (9.18) gibt es genau ein $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\varphi(C) = C' \wedge$ $\wedge\ \varphi(B) = B'$, nämlich $\varphi : \mathbb{L} \to \mathbb{L} : X \to \frac{B'-C'}{B-C}(X-C)+C'$. Dann ist
(1) $\Leftrightarrow \varphi(A) = A' \Leftrightarrow A'-C' = \frac{B'-C'}{B-C}(A-C) \Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). $\square$

(10.9) **Zweiter Ähnlichkeitssatz**. *Zwei geordnete Dreiecke (A, B, C), (A', B', C') sind genau dann gleichsinnig ähnlich, wenn wenigstens zwei der Bedingungen $\langle B, A, C\rangle \simeq \langle B', A', C'\rangle$,*
$\langle C, B, A\rangle \simeq \langle C', B', A'\rangle$, $\langle A, C, B\rangle \simeq \langle A', C', B'\rangle$ erfüllt sind.

Beweis: Gemäß (9.5) sei $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ festgelegt durch $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(B) = B'$. Genau wenn wenigstens zwei der angegebenen Bedingungen gelten, ist $\varphi(C) = C'$ (vgl. (9.1)(1), Axiom (W), (8.11)(2) und (8.1)). $\square$

(10.10) **Strahlensätze.** *Sind Z, A, B, C, D fünf verschiedene Punkte von $\mathbb{L}$ mit $B \in \langle Z, A\rangle$ und $C \notin \langle Z, A\rangle$, so gilt (vgl. Figur 10.1 a))*

(1) $D \in \langle Z, C\rangle \cap (B \parallel \langle A, C\rangle) \Leftrightarrow \frac{D-Z}{C-Z} = \frac{B-Z}{A-Z}$,

(2) $D \in \langle Z, C\rangle \cap (B \parallel \langle A, C\rangle) \Leftrightarrow \frac{D-B}{C-A} = \frac{B-Z}{A-Z}$.

Man nennt (1) bzw. (2) den 1. bzw. 2. Strahlensatz mit Umkehrung.

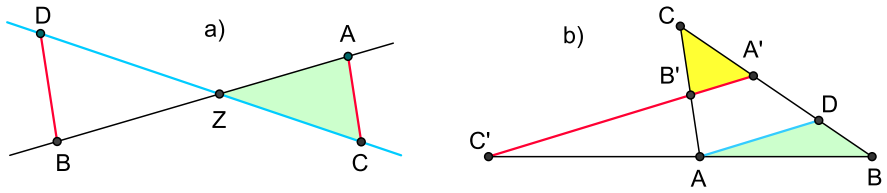
Beweis: Nach (8.1) und (10.9) gilt $D \in \langle Z, C\rangle \cap (B \parallel \langle A, C\rangle)$ genau dann, wenn die geordneten Dreiecke (Z, A, C) und (Z, B, D) ähnlich sind. Letzteres ist nach (10.8) genau dann der Fall, wenn die Gleichung aus (1) oder die Gleichung aus (2) erfüllt ist. $\square$

Download free eBooks at bookboon.com

Als Ergänzung zu (10.10) zeigen wir

(10.11) **Satz**. *Sind $g,h,k\in\mathbb{G}$ mit $g\nparallel h\wedge g\nparallel k$ und ist φ_g die Parallelprojektion von h auf k in Richtung g (vgl. (3.2)(2) und Figur 3.1 b)), so gibt es genau ein $\psi\in\ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\psi\big|_h=\varphi_g$.*
Jede Parallelprojektion ist teilverhältnistreu.

Beweis: Ist $h\parallel k$, so gibt es offenbar eine Translation τ mit $\tau\big|_h=\varphi_g$. Ist dagegen $h\cap k=\{A\}$ mit $A\in\mathbb{L}$, so sei $B\in h\backslash\{A\}$ und $C=\varphi_g(B)$. Nach (9.4)(2) existiert dann ein $\psi\in\ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\psi(h)=k\wedge\langle A,B,C\rangle\simeq\langle A,X,\psi(X)\rangle$ $\forall\ X\in h$, also mit $<B,C>\parallel<X,\psi(X)>\ \ \forall\ X\in h$. Dann ist $\psi\big|_h=\varphi_g$.
Mit (9.5) und (10.6)(2) folgt die Behauptung. □



Figur 10.1

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

D. Sätze von Menelaos, Ceva und Brianchon

Als Anwendung von (10.11) erhalten wir (vgl. Figur 10.1 b)):

(10.12) **Satz des Menelaos.** *Sind* $A, B, C, A', B', C' \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$ *mit* $A \notin \langle B, C\rangle \wedge A' \in \langle B, C\rangle \wedge B' \in \langle C, A\rangle \wedge C' \in \langle A, B\rangle$, *so sind* A', B', C' *genau dann kollinear, wenn* $\frac{A-C'}{B-C'} \cdot \frac{B-A'}{C-A'} \cdot \frac{C-B'}{A-B'} = 1$ *ist.*

Beweis: Wegen $B' \notin \langle B, C\rangle$ existiert $D \in \langle B, C\rangle$ mit $\langle A, D\rangle \| \langle A', B'\rangle$.
Dann ist $C' \in \langle A', B'\rangle \Leftrightarrow \langle A', C'\rangle \| \langle A, D\rangle \overset{(10.4)(2),(10.11)}{\Leftrightarrow}$

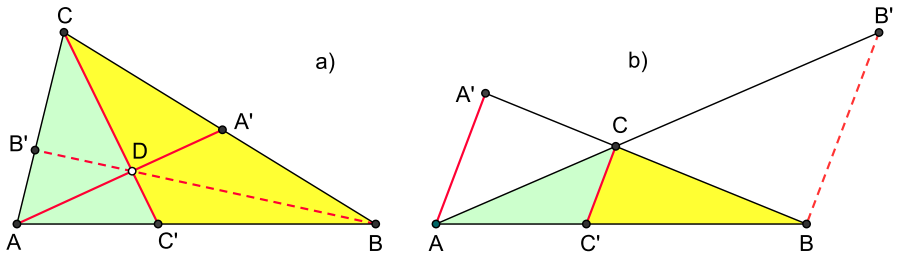
$$\Leftrightarrow \frac{B-C'}{A-C'} = \frac{B-A'}{D-A'} = \frac{B-A'}{C-A'} \cdot \frac{C-A'}{D-A'} \overset{(10.11)}{=} \frac{B-A'}{C-A'} \cdot \frac{C-B'}{A-B'}. \quad \square$$

Die folgende Aussage, die mit (10.12) eng verbunden erscheint, wurde erst etwa 1800 Jahre später entdeckt:

(10.13) **Satz des Ceva.** *Sind* $A, B, C, A', B', C' \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$ *mit* $A \notin \langle B, C\rangle \wedge A' \in \langle B, C\rangle \wedge B' \in \langle C, A\rangle \wedge C' \in \langle A, B\rangle$, *so liegen die Geraden* $<A, A'>, <B, B'>, <C, C'>$ *genau dann im Büschel, wenn*

$$(*) \quad \frac{A-C'}{B-C'} \cdot \frac{B-A'}{C-A'} \cdot \frac{C-B'}{A-B'} = -1 \quad \textit{gilt (vgl. Figur (10.2 a),b))).}$$

Beweis: Wir setzen $\alpha := \frac{B-A'}{C-A'} \cdot \frac{C'-A}{B-A}$ und $\beta := \frac{C-B'}{A-B'} \cdot \frac{A-B}{C'-B}$.
a) Es sei $\langle A, A'\rangle \cap \langle C, C'\rangle =: \{D\}$, also $\alpha = \frac{C'-D}{C-D}$ gemäß (10.12).
Dann ist $[D \in \langle B, B'\rangle \overset{(10.12)}{\Leftrightarrow} \beta = \frac{C-D}{C'-D} \Leftrightarrow \alpha \cdot (-\beta) = -1 \Leftrightarrow (*)]$.
b) Es sei $\langle A, A'\rangle \| \langle C, C'\rangle$, also $\alpha = 1$ gemäß (10.11) (vgl. Figur 10.2 b)).
Dann ist $[\langle B, B'\rangle \| \langle C, C'\rangle \overset{(10.4)(2),(10.11)}{\Leftrightarrow} \beta = 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot (-\beta) = -1 \Leftrightarrow (*)]$. $\square$



Figur 10.2

(10.14) *Anmerkung.* Die Punkte A, B, C, A', B', C' seien wie in (10.13) gegeben, und die Geraden $<A, A'>, <B, B'>, <C, C'>$ mögen im Büschel liegen. Nach (10.12) und (10.13) sind A', B', C' genau dann kollinear, wenn $-1 = +1$, also $char\, \mathbb{E} = 2$ ist. Damit haben wir neben (10.2) eine weitere Kennzeichnung des Falles der Charakteristik 2.

Ebenso wie (10.13) läßt sich auch der folgende Schließungssatz mit Hilfe des Satzes von MENELAOS beweisen:

Download free eBooks at bookboon.com

(10.15) **Affiner Satz von Brianchon**. *Sind $g_1, ..., g_6$ sechs verschiedene Geraden mit $g_1 \parallel g_3 \parallel g_5 \nparallel g_2 \parallel g_4 \parallel g_6$ und ist $A_{rs} := g_r \cap g_s$ für $r, s \overset{\in}{\neq} \{1, ..., 6\}$, so liegen die Geraden $<A_{12}, A_{45}>, <A_{23}A_{56}>$ und $<A_{34}A_{61}>$ im Büschel (Figur 10.3 a), b)).*

Beweis: 1) Es gebe ein $B \in <A_{12}, A_{45}> \cap <A_{23}, A_{56}>$ (Figur 10.3 a)). Nach (10.12), bezogen auf $\{A_{25}, A_{12}, A_{45}\}$, und nach (10.2)(1) gilt dann

$$1 = \frac{A_{12}-B}{A_{45}-B} \cdot \frac{A_{45}-A_{56}}{A_{25}-A_{56}} \cdot \frac{A_{25}-A_{23}}{A_{12}-A_{23}} = \frac{A_{12}-B}{A_{45}-B} \cdot \frac{A_{14}-A_{61}}{A_{12}-A_{61}} \cdot \frac{A_{45}-A_{34}}{A_{14}-A_{34}},$$

und nach (10.12) bzgl. $\{A_{14}, A_{12}, A_{45}\}$ impliziert dies die Behauptung.
2) Ist $<A_{12}, A_{45}> \parallel <A_{23}, A_{56}>$ und ist $C := <A_{12}, A_{45}> \cap g_3$ (Figur 10.3 b)), so folgt $A_{12}-A_{23} = A_{61}-A_{36} \wedge A_{23}-C = A_{56}-A_{45} = A_{36}-A_{34}$ gemäß (10.2)(1). Eine Addition der Gleichungen führt auf $A_{12}-C = A_{61}-A_{34}$ und damit auf $<A_{12}, A_{45}> \parallel <A_{61}, A_{34}>$. □

staufenbiel Institut

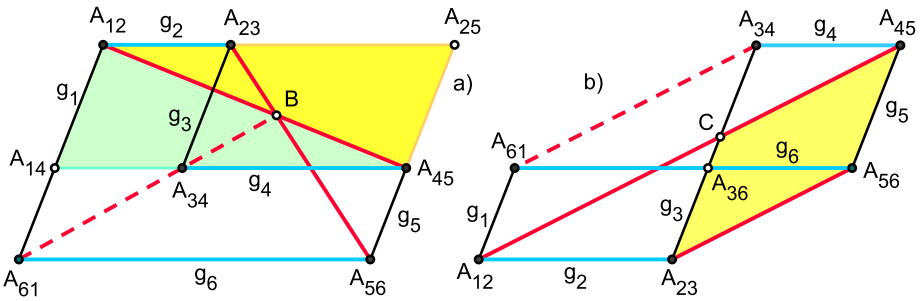
Für Ihren Karrierestart unbezahlbar.
Für Sie kostenlos.

Karriere zum Download
Jetzt dem kostenlosen Staufenbiel *Career Club* beitreten und die aktuellste Ausgabe als ebook sichern: staufenbiel.de/ebooks

>>> Jetzt downloaden: staufenbiel.de/ebooks

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more



Figur 10.3

E. Aufgaben

Man zeige für eine beliebige euklidische Ebene $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$:

A 10.1. Der Satz von PAPPUS läßt sich aus den Eigenschaften der Dilatationen herleiten.

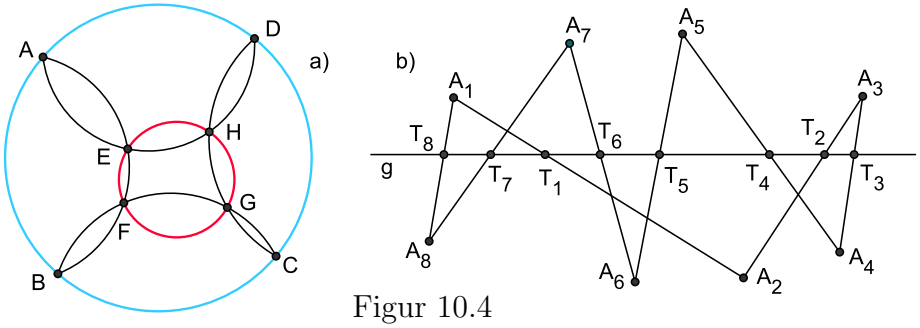
A 10.2. Sind A, B, C, D vier verschiedene Punkte von $\mathbb{L}$, so wird

$$\begin{bmatrix} A\,B \\ D\,C \end{bmatrix} := \frac{A-C}{A-D} : \frac{B-C}{B-D} := \frac{(A-C)(B-D)}{(A-D)(B-C)} \quad \text{(Merkregel: } \frac{\nwarrow \cdot \nearrow}{\uparrow \cdot \uparrow}\text{)}$$

das **Doppelverhältnis** von A, B, C, D genannt.
Für paarweise verschiedene Punkte $A, ..., H \in \mathbb{L}$ gilt:
(1) Sind A, B, C nichtkollinear, so ist der A, B, C enthaltende Kreis gegeben durch $k(A, B, C) = \{A, B, C\} \cup \{X \in \mathbb{L} \backslash \{A, B, C\} \mid \begin{bmatrix} A\,B \\ X\,C \end{bmatrix} \in \mathbb{K}\}$.
(2) Genau im Falle $\begin{bmatrix} A\,B \\ D\,C \end{bmatrix} \in \mathbb{K}$ sind A, B, C, D konzyklisch oder kollinear.
(3) Es ist $\begin{bmatrix} A\,B \\ D\,C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D\,C \\ A\,B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\,A \\ C\,D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\,D \\ B\,A \end{bmatrix}$ (Vertauschung von Zeilen bzw. Spalten).
(4) Es ist $\begin{bmatrix} A\,B \\ C\,D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\,B \\ D\,C \end{bmatrix}^{-1}$ (Vertauschung innerhalb einer Zeile).
(5) Es ist $\begin{bmatrix} A\,C \\ D\,B \end{bmatrix} = 1 - \begin{bmatrix} A\,B \\ D\,C \end{bmatrix}$ (Vertauschung innerhalb einer Spalte).
(6) Es ist $\begin{bmatrix} A\,B \\ E\,D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A\,B \\ D\,C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\,B \\ E\,C \end{bmatrix}$ (Reduktionsregel).
(7) $\begin{bmatrix} A\,C \\ D\,B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H\,F \\ E\,G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\,H \\ D\,E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H\,C \\ D\,G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\,F \\ B\,G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F\,A \\ B\,E \end{bmatrix}$ (Peczar-Identität).

A 10.3. **Dritter Satz von Miquel**. *Sind* $A, ..., H \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$ *und sind fünf der Mengen* $\{A, B, C, D\}$, $\{A, B, E, F\}$, $\{B, C, F, G\}$, $\{C, D, G, H\}$, $\{D, A, H, E\}$, $\{E, F, G, H\}$ *konzyklisch oder kollinear, so gilt dies auch für die verbleibende sechste Menge (vgl. Figur 10.4 a))*. [Verwenden Sie A 10.2.(7).]

Download free eBooks at bookboon.com



Figur 10.4

A 10.4. **Verallgemeinerter Satz von Menelaos**. *Gegeben seien n verschiedene Punkte $A_1, ..., A_{n+1}$ mit $A_{n+1} = A_1$ $(n \geq 3)$. Ist g eine Gerade, die für jedes $\nu \in \{1, ..., n\}$ die Gerade $<A_\nu, A_{\nu+1}>$ in genau einem Punkt $T_\nu \neq A_\nu, A_{\nu+1}$ trifft, so ist* $\frac{A_1-T_1}{A_2-T_1} \cdot \frac{A_2-T_2}{A_3-T_2} \cdot \frac{A_3-T_3}{A_4-T_3} \cdot ... \cdot \frac{A_n-T_n}{A_1-T_n} = 1$ (vgl. Figur 10.4 b)). [Man verwende Parallelprojektion auf $<A_1, A_n>$ in Richtung g].

A 10.5. Gegeben seien $A, B, C, A', B', C', D \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$ mit $A \notin <B, C>$ und $A' = <D, A> \cap <B, C> \wedge B' = <D, B> \cap <C, A> \wedge C' = <D, C> \cap <A, B>$. Dann gilt $\frac{A-D}{A'-D} = \frac{A-B'}{C-B'} + \frac{A-C'}{B-C'}$ (vgl. Figur 10.2 a)).

11 Kongruenz und Metrik

Im folgenden sei $(\mathbb{L}(+, \cdot), \mathbb{K})$ eine quadratische Körpererweiterung mit $\mathbb{E} := (\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq) := \mathbb{E}(\mathbb{L}(+, \cdot), \mathbb{K})$ als der zugehörigen euklidischen Ebene.

Gemäß (9.27) und (9.28) denken wir uns $\mathbb{L}$ in der Form $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{p,q}(\mathbb{K})$ mit $p, q \in \mathbb{K} \ \wedge \ i^2 = p + iq$ vorgegeben, wobei $p \neq x^2 + qx \ \ \forall \ x \in \mathbb{K}$ ist. Wieder sei $\mathfrak{K}$ die Menge der Kreise von $\mathbb{E}$.

Wir wollen zeigen, daß zu jeder euklidischen Ebene in natürlicher Weise eine Kongruenzrelation gehört, und wollen alle Ähnlichkeitsabbildungen und Bewegungen ermitteln. Dabei werden sich entsprechende Transitivitätssätze ergeben, und insbesondere werden wir sehen, daß die normalen euklidischen Ebenen genau die euklidischen Ebenen mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik sind.
Neben einer Art Abstandsmessung werden wir auch eine Winkelmessung einführen. Wir schließen diesen Paragraphen mit einer Reihe interessanter Sätze der Kreis- und Dreiecksgeometrie.

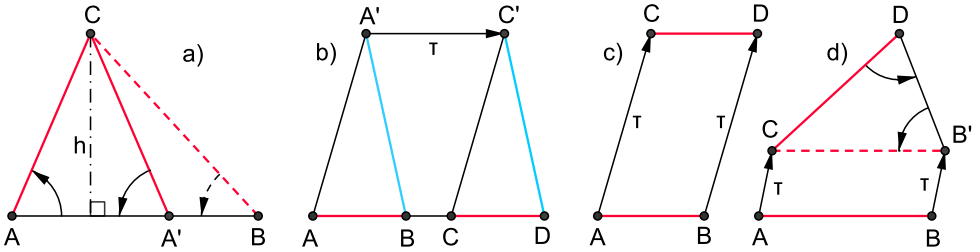
Download free eBooks at bookboon.com

A. Kongruenz

Die Kongruenz in *normalen euklidischen Ebenen* läßt sich mit Hilfe der Winkelvergleichung $\simeq$ beschreiben, denn dort gilt (vgl. Aufgabe 6.5.):

(11.1) **Die Eselsbrücke**. *Sind A, B, C nichtkollineare Punkte, so ist* $\{A, C\} \equiv \{B, C\} \Leftrightarrow \langle C, B, A\rangle \simeq \langle B, A, C\rangle$ *(vgl. Figur 11.1 a)).*

Beweis: Ggf. nach einer Vertauschung von A,B ist $A \notin h := (C \perp <A, B>)$. Für $A' := \widetilde{h}(A)$ folgt $A' \neq A \wedge AC \equiv A'C \wedge \langle C, A', A\rangle \simeq \langle B, A, C\rangle$. Wegen $k_{C;A} \cap <A, B> = \{A, A'\}$ und (8.11)(2) ist dann $[\{A, C\} \equiv \{B, C\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow B = A' \Leftrightarrow \langle C, B, A\rangle \simeq \langle C, A', A\rangle \Leftrightarrow \langle C, B, A\rangle \simeq \langle B, A, C\rangle]$. $\square$



Figur 11.1

(11.2) Aufgrund von (11.1) und (3.14) ist es naheliegend, die für normale euklidische Ebenen bereits erklärte Kongruenz nun wie folgt auf beliebige euklidische Ebenen zu übertragen:

Die Menge der zweielementigen Teilmengen von $\mathbb{P}$ werde wieder mit $\mathbb{P}_2$ bezeichnet. Sind $\{A, B\}, \{C, D\} \in \mathbb{P}_2$, so nennen wir $\{A, B\}$ und $\{C, D\}$ **kongruent**, in Zeichen: $\{A, B\} \equiv \{C, D\}$, wenn es ein $\tau \in \mathfrak{T}$ mit $\tau(\{A, B\}) = \{C, D\}$ gibt oder wenn $\{B', C, D\}$ für $B' := \tau_{A,C}(B)$ ein Dreieck mit $\langle C, D, B'\rangle \simeq \langle D, B', C\rangle$ ist (vgl. Figur 11.1 b), c), d)).

Die erste Möglichkeit kann sich nur im Falle $<A, B> \parallel <C, D>$ (Figur 11.1 b), c)) und die zweite nur im Falle $<A, B> \nparallel <C, D>$ (Figur 11 .1 d)) ergeben.

Die Relation $\equiv$ wird die zu $\mathbb{E}$ gehörige **Kongruenzrelation** genannt.

Ist $\mathbb{E}' = (\mathbb{P}', \mathbb{G}', \simeq')$ neben $\mathbb{E}$ eine weitere euklidische Ebene mit der zugehörigen Kongruenzrelation $\equiv'$ und ist φ ein Isomorphismus von $\mathbb{E}$ auf $\mathbb{E}'$ im Sinne von (7.3), so ist φ zugleich auch ein Isomorphismus von der Struktur $(\mathbb{P}, \equiv)$ auf die Struktur $(\mathbb{P}', \equiv')$ im Sinne von (2.5), da φ

Download free eBooks at bookboon.com

und φ^{-1} parallelogrammtreu und konformitätstreu sind (vgl. Figur 11.1), d. h. für alle $\{A,B\},\{C,D\} \in \mathbb{P}_2$ gilt

(1) $\{A,B\} \equiv \{C,D\} \;\Leftrightarrow\; \{\varphi(A),\varphi(B)\} \equiv' \{\varphi(C),\varphi(D)\}$.

Bezeichnet $m_{A,B} := \{X \in \mathbb{P} \mid \{A,X\} \equiv \{X,B\}\}$ für $\{A,B\} \in \mathbb{P}_2$ wie in (2.5) die **Mittelsenkrechte** von $\{A,B\}$, so erhalten wir außerdem

(2) $\varphi(m_{A,B}) = m_{\varphi(A),\varphi(B)} \;\; \forall\, \{A,B\} \in \mathbb{P}_2$,

denn für $X \in \mathbb{P}$ ist $[\varphi(X) \in \varphi(m_{A,B}) \Leftrightarrow X \in m_{A,B} \Leftrightarrow \{A,X\} \equiv \{X,B\}$ $\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ $\{\varphi(A),\varphi(X)\} \equiv' \{\varphi(X),\varphi(B)\} \Leftrightarrow \varphi(X) \in m_{\varphi(A),\varphi(B)}]$.

Die Aussagen (1) und (2) sind natürlich insbesondere auch im Falle $\mathbb{E} = \mathbb{E}'$ gültig, wenn also φ ein Automorphismus von $\mathbb{E}$ ist.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

B. Gegensinnige Ähnlichkeiten

Um spezifische Eigenschaften der zu $\mathbb{E}$ gehörigen Relation $\equiv$ anzugeben, wird es vorteilhaft sein, hierfür eine algebraische Darstellung zu entwickeln. Zu diesem Zweck befassen wir uns nun zunächst mit gegensinnigen Ähnlichkeiten:

(11.3) Eine Kollineation φ von $(\mathbb{P},\mathbb{G})$ heißt **gegensinnige Ähnlichkeit** oder **gegensinnige Ähnlichkeitsabbildung** von $\mathbb{E}$, wenn

$(*)\quad (g,h) \simeq (\varphi(h),\varphi(g)) \;\; \forall\, g,h \in \mathbb{G}$

gilt, wenn φ also, wie wir sagen, **gegensinnig winkeltreu** ist.

Wir bezeichnen die Menge aller gegensinnigen Ähnlichkeiten mit $\ddot{\mathbb{A}}^-$ und nennen $\ddot{\mathbb{A}} := \ddot{\mathbb{A}}^+ \cup \ddot{\mathbb{A}}^-$ die Menge der **Ähnlichkeiten** oder die Menge der **Ähnlichkeitsabbildungen**.

Ist $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^-$, so ist auch $\varphi^{-1} \in \ddot{\mathbb{A}}^-$, denn aus $(*)$ folgt
$(g,h) = (\varphi(\varphi^{-1}(g)),\varphi(\varphi^{-1}(h))) \simeq (\varphi^{-1}(h),\varphi^{-1}(g)) \;\; \forall\, g,h \in \mathbb{G}.$
Überdies gilt offenbar

$(\diamond)\quad \varphi\circ\psi \in \ddot{\mathbb{A}}^+ \;\; \forall\, \varphi,\psi \in \ddot{\mathbb{A}}^- \;\text{ und }\; \varphi\circ\psi, \psi\circ\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^- \;\; \forall\,(\varphi,\psi) \in \ddot{\mathbb{A}}^+ \times \ddot{\mathbb{A}}^-,$

und wegen $(g,h) \simeq (k,l) \Leftrightarrow (\varphi(h),\varphi(g)) \simeq (\varphi(l),\varphi(k)) \Leftrightarrow$
$\overset{(8.11)}{\Leftrightarrow} (\varphi(g),\varphi(h)) \simeq (\varphi(k),\varphi(l)) \;\; \forall\, g,h,k,l \in \mathbb{G}, \;\; \forall\, \varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^-$
sowie wegen (9.1) ist $\ddot{\mathbb{A}}$ dann eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathbb{E}$. Insbesondere sind alle Elemente von $\ddot{\mathbb{A}}$ kreistreue Kollineationen (vgl. (9.24)).

Wir zeigen nun

(11.4) **Satz**. *Es existiert genau eine gegensinnige Ähnlichkeit, die die Punkte* 0 *und* 1 *festläßt. Diese wird die* **Konjugation** $\kappa_{\mathbb{L}}$ *von* $\mathbb{L}$ *genannt und ist ein Automorphismus des Körpers* $\mathbb{L}(+,\cdot)$. *Mit der Bezeichnung* $\overline{X} := \kappa_{\mathbb{L}}(X) \;\; \forall\, X \in \mathbb{L}$ *ergeben sich die folgenden Regeln:*

(1) Es gilt $\kappa_{\mathbb{L}}(x+iy) = \overline{x+iy} = x+qy-iy \;\; \forall\, x,y \in \mathbb{K}$
sowie $\kappa_{\mathbb{L}}\circ\kappa_{\mathbb{L}} = id_{\mathbb{L}} \;\wedge\; \kappa_{\mathbb{L}} = \kappa_{\mathbb{L}}^{-1} \;\wedge\; \overline{i} = q-i.$

(2) Es ist $(g,h) \simeq (\kappa_{\mathbb{L}}(h),\kappa_{\mathbb{L}}(g)) \;\; \forall\, g,h \in \mathbb{G}.$

(3) Es ist $\overline{\overline{X}} = X \;\; \forall\, X \in \mathbb{L}.$

(4) Es gilt $\overline{X+Y} = \overline{X}+\overline{Y} \;\wedge\; \overline{X-Y} = \overline{X}-\overline{Y} \;\wedge\; \overline{X\cdot Y} = \overline{X}+\overline{Y}$
$\wedge\; \overline{X/Z} = \overline{X}/\overline{Z} \;\; \forall\, X,Y,Z \in \mathbb{L}$ *mit* $Z \neq 0.$

(5) Es ist $\overline{X} = X \;\; \forall\, X \in \mathbb{K}.$

(6) Es ist $[\, X\cdot\overline{X} = 0 \Leftrightarrow X = 0\,] \;\; \forall\, X \in \mathbb{L}.$

(7) Es gilt $X+\overline{X} \in \mathbb{K} \;\wedge\; X\cdot\overline{X} \in \mathbb{K} \;\; \forall\, X \in \mathbb{L}.$

(8) Es gilt $X^{-1} = \dfrac{\overline{X}}{X\cdot\overline{X}} \;\wedge\; \mathbb{K}X^{-1}Y = \mathbb{K}\overline{X}Y \;\; \forall\, X,Y \in \mathbb{L}^* := \mathbb{L}\backslash\{0\}.$

(9) Die Fixpunktmenge von $\kappa_{\mathbb{L}}$ *ist entweder* $\mathbb{K}$ *oder* $\mathbb{L}$, *nämlich* $\mathbb{K}$ *im Falle* $[\, char\,\mathbb{E} \neq 2 \vee q \neq 0\,]$ *und* $\mathbb{L}$ *im Falle* $[\, char\,\mathbb{E} = 2 \wedge q = 0\,].$

Download free eBooks at bookboon.com

(10) Im Falle $char\,\mathbb{E} \neq 2$ *ist* $\kappa_{\mathbb{L}} \neq id_{\mathbb{L}}$.
(11) Es gilt $[\kappa_{\mathbb{L}} \neq id_{\mathbb{L}} \Leftrightarrow \overline{i} \neq i]$.
(12) Es gilt $[char\,\mathbb{K} = 2 \Leftrightarrow \overline{i} - i = q \in \mathbb{K} \Leftrightarrow \overline{i} - i \in \mathbb{K}]$.
(13) Es gilt $\overline{(x+iy)} - (x+iy) = y\cdot(\overline{i} - i) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{K}$
(14) Es gilt $\overline{X} - X, X - \overline{X} \in \mathbb{K}(\overline{i} - i) \quad \forall\, X \in \mathbb{L}$.
(15) Ist $\overline{i} \neq i$, *so ist* $[Y = \overline{Y} \Leftrightarrow Y \in \mathbb{K}] \quad \forall\, Y \in \mathbb{L}$.
(16) Ist $\overline{i} \neq i$, *so ist* $[Y + \overline{Y} = 0 \Leftrightarrow Y \in \mathbb{K}(\overline{i} - i)] \quad \forall\, Y \in \mathbb{L}$.

Beweis: 1) Wir benutzen die in (9.27) entwickelte Darstellung und setzen
$\kappa_{\mathbb{L}}(x+iy) := x + qy - iy \quad \forall\, x, y \in \mathbb{K}$ (vgl. (9.27)(5),(6)).
Man rechnet leicht nach, daß (1) gültig ist und daß $\kappa_{\mathbb{L}}$ ein Automorphismus von $\mathbb{L}(+,\cdot)$ ist, der die Bedingungen (3) bis (16) erfüllt. Nach (9.24) ist $\kappa_{\mathbb{L}}$ eine Kollineation von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$, und wegen
$\mathbb{K}A^{-1}B \overset{(8)}{=} \mathbb{K}\overline{A}B \overset{(3)}{=} \mathbb{K}\overline{\overline{B}}\,\overline{A} \overset{(8)}{=} \mathbb{K}\overline{B}^{\,-1}\overline{A} \quad \forall\, A, B \in \mathbb{L}^*$ und
$\kappa_{\mathbb{L}}(A' + \mathbb{K}A) = \{\kappa_{\mathbb{L}}(A' + \lambda A) \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \overset{(5)}{=} \overline{A'} + \mathbb{K}\overline{A} \quad \forall\, (A', A) \in \mathbb{L} \times \mathbb{L}^*$
und (9.15) (7) ist auch (2) gültig.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

2) Ist $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^-$ mit $\varphi(0)=0 \wedge \varphi(1)=1$, so ist $\varphi\circ\kappa_{\mathbb{L}} \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\varphi\circ\kappa_{\mathbb{L}}(0)=0 \wedge \varphi\circ\kappa_{\mathbb{L}}(1)=1$. Mit (9.5) folgt $\varphi\circ\kappa_{\mathbb{L}} = id_{\mathbb{L}}$, also $\varphi = \kappa_{\mathbb{L}}^{-1} = \kappa_{\mathbb{L}}$. □

(11.5) **Corollar 1**. $\ddot{\mathbb{A}}^-$ *besteht aus den Abbildungen der Form*

$$\psi : \mathbb{L} \to \mathbb{L} : \boxed{X \to A\cdot\overline{X}+B} \quad \textit{mit } A, B \in \mathbb{L} \wedge A \neq 0.$$

Beweis: 1) Ist $\varphi : \mathbb{L} \to \mathbb{L} : X \to A\cdot X+B$ mit $(A,B) \in \mathbb{L}^* \times \mathbb{L}$, so ist $\psi = \varphi\circ\kappa_{\mathbb{L}}$ nach (9.18) und (11.3)($\diamond$) ein Element von $\ddot{\mathbb{A}}^-$.
2) Ist umgekehrt ein beliebiges $\eta \in \ddot{\mathbb{A}}^-$ vorgegeben, so gilt $\eta\circ\kappa_{\mathbb{L}} \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ gemäß (11.3)($\diamond$), und nach (9.18) gibt es dann ein Paar $(C,D) \in \mathbb{L}^* \times \mathbb{L}$ mit $\eta(X) = \eta\circ\kappa_{\mathbb{L}}(\overline{X}) = C\cdot\overline{X}+D \ \ \forall\ X \in \mathbb{L}$. □

(11.6) **Corollar 2**. *Es ist* $\ddot{\mathbb{A}}^- = \ddot{\mathbb{A}}^+ \circ \kappa_{\mathbb{L}}$, *d. h.* $\ddot{\mathbb{A}}^-$ *ist eine Nebenklasse der Untergruppe* $\ddot{\mathbb{A}}^+$ von $\ddot{\mathbb{A}}(\circ)$. *Im Falle* $\kappa_{\mathbb{L}} \neq id_{\mathbb{L}}$ *ist* $\kappa_{\mathbb{L}} \notin \ddot{\mathbb{A}}^+$. *Damit folgt* $(\kappa_{\mathbb{L}} \neq id_{\mathbb{L}} \Leftrightarrow \ddot{\mathbb{A}}^+ \cap \ddot{\mathbb{A}}^- = \varnothing)$ *und* $(\kappa_{\mathbb{L}} = id_{\mathbb{L}} \Leftrightarrow \ddot{\mathbb{A}}^+ = \ddot{\mathbb{A}}^- = \ddot{\mathbb{A}})$. *Im Falle* $char\,\mathbb{E} \neq 2$ *gilt stets* $\ddot{\mathbb{A}}^+ \cap \ddot{\mathbb{A}}^- = \varnothing$.

Beweis: (9.18), (11.5), (11.4)(9), (11.4)(10). □

(11.7) Die euklidische Ebene $\mathbb{E}$ wird im Falle $\kappa_{\mathbb{L}} \neq id_{\mathbb{L}}$ als **separabel** und im Falle $\kappa_{\mathbb{L}} = id_{\mathbb{L}}$ als **inseparabel** bezeichnet.
Man beachte, daß sich diese Unterscheidung hauptsächlich auf die Fälle der Charakteristik 2 bezieht, denn nach (11. 4)(10) ist $\mathbb{E}$ stets separabel, wenn $char\,\mathbb{E} \neq 2$ ist.
In §8 – §10 haben wir eine Reihe von Sätzen bewiesen, die insbesondere auch in inseparablen Ebenen gültig sind. Im weiteren werden wir diese Ebenen allerdings öfters von der Betrachtung ausschließen, da sie im Hinblick auf die Begriffe „Kongruenz“ und „Bewegung“ hochgradig ausgeartet sind, wie wir sehen werden. Zunächst stellen wir fest:

Die **inseparablen** *Ebenen sind durch die Bedingung*

(1) $(g,h) \simeq (h,g) \ \ \forall\ g,h \in \mathbb{G}$ *gekennzeichnet.*

Denn im Falle $\kappa_{\mathbb{L}} = id_{\mathbb{L}}$ folgt (1) gemäß (9.15)(7) und (11. 4)(8) aus $\mathbb{K}A^{-1}B = \mathbb{K}\overline{A}B = \mathbb{K}\overline{B}A = \mathbb{K}B^{-1}A \ \ \forall\ A,B \in \mathbb{L}^*$.
Im **separablen** Fall führt (11. 4) auf $\mathbb{K}\overline{A}B = \mathbb{K}\overline{B}A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [\exists\,\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\lambda\overline{A}B = \overline{B}A \wedge \lambda\overline{A}B\overline{\lambda\overline{A}B} = \overline{B}A\overline{\overline{B}A} \wedge \lambda^2 = 1]$
$\Leftrightarrow [\overline{A}B = \overline{B}A \vee \overline{A}B = -\overline{B}A] \Leftrightarrow [\overline{A}B \in \mathbb{K} \vee \overline{A}B \in \mathbb{K}(\overline{i}-i)] \ \ \forall\ A,B \in \mathbb{L}^*$,
und gemäß (9.15)(7) und (11. 4) erhalten wir dann

(2) $\overline{i} \neq i \Rightarrow [(g,h) \simeq (h,g) \Leftrightarrow g \parallel h \vee (g,h) \simeq (\mathbb{K}, \mathbb{K}(\overline{i}-i))] \ \ \forall\, g,h \in \mathbb{G}$,

(3) $[char\,\mathbb{K} = 2 \wedge \overline{i} \neq i] \Rightarrow [(g,h) \simeq (h,g) \Leftrightarrow g \parallel h] \ \ \forall\ g,h \in \mathbb{G}$.

Download free eBooks at bookboon.com

Im **inseparablen** Fall ist die Abbildung $N: \mathbb{L} \to \mathbb{K} : X \to X\overline{X}$ wegen

(4) $X\overline{X} = Y\overline{Y} \overset{\overline{i}=i}{\Leftrightarrow} X^2 = Y^2 \overset{2=0}{\Leftrightarrow} (X-Y)^2 = 0 \Leftrightarrow X = Y \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{L}$

eine injektive Abbildung von $\mathbb{L}$ in die echte Teilmenge $\mathbb{K}$ von $\mathbb{L}$, d..h. dann ist $\mathbb{L}$ keine endliche Menge. Demnach gilt

(5) *Alle endlichen euklidischen Ebenen sind separabel.*

Für Leser mit Grundkenntnissen in Algebra zeigen wir

(6) *Zu jeder Charakteristik $a \neq 0$ gibt es unendlich viele nichtisomorphe nichtendliche euklidische Ebenen. Insbesondere gibt es unendlich viele nichtisomorphe inseparable euklidische Ebenen.*

Zum *Beweis* sei $k(+,\cdot)$ der Körper $GF(a^n)$ mit $n \in \mathbb{N}^*$, wobei a eine Primzahl ist (vgl. (9.35)).
Wir betrachten den Polynomring $k[u]$ mit der Unbestimmten u und den zugehörigen Quotientenkörper $\mathbb{K} := \{g/h \mid g, h \in k[u] \wedge h \neq 0\}$. Für $p := u$ folgt $p \neq x^2 \;\forall\, x \in \mathbb{K}$, denn in $k[u]$ ist $u \cdot h^2 \neq g^2 \;\forall\, g, h \in k[u] \setminus \{0\}$, da der Grad von $u \cdot h^2$ ungerade und der von g^2 gerade ist.
Nach (9.28) ist $(\mathbb{L}_{p,0}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ eine quadratische Körpererweiterung, und es ist $char\, \mathbb{L}_{p,0} = char\, \mathbb{K} = char\, k = a$.
Wegen $k^* = \{x \in \mathbb{K}^* \mid \exists\, m \in \mathbb{N}^* : x^m = 1\}$ gehören zu Ausgangskörpern k, k' mit $|k| \neq |k'|$ nichtisomorphe Körper $\mathbb{K}, \mathbb{K}'$, und nach (9.23) sind dann auch die zugehörigen euklidischen Ebenen $\mathbb{E}(\mathbb{L}_{p,0}, \mathbb{K})$, $\mathbb{E}(\mathbb{L}_{p,0}, \mathbb{K}')$ nichtisomorph.
Im Falle $a = 2$ ist $\mathbb{E}(\mathbb{L}_{p,0}, \mathbb{K})$ gemäß (11.4)(9) eine inseparable euklidische Ebene. □

C. Algebraische Beschreibung der Kongruenz

Mit Hilfe von (11.4) wollen wir nun die für $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\mathbb{L}_{p,q}, \mathbb{K})$ erklärte Kongruenzrelation $\equiv$ algebraisch beschreiben. Dazu setzen wir fest:

Das Element $N(X) := X \cdot \overline{X}$, welches nach (11.4)(7) für jedes $X \in \mathbb{L}$ im Grundkörper $\mathbb{K}$ liegt, wird die **Norm** von X genannt. Zunächst folgt

(11.8) **Satz über gleichschenklige Dreiecke**. *Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so ist* $[\, \langle C, B, A\rangle \simeq \langle B, A, C\rangle \;\Leftrightarrow\; N(A-C) = N(B-C)\,]$.

Beweis: Es sei $U := A-C$ und $V := B-C$. Nach (9.15)(7) ist die Winkelbedingung des Satzes genau dann erfüllt, wenn $\mathbb{K}V^{-1}(U-V) = \mathbb{K}(U-V)^{-1}U$ ist, und dies ist nach (11.4)(8) äquivalent zu $(*)$ $\mathbb{K}\overline{V}(U-V) = \mathbb{K}\overline{(U-V)}U$.

Download free eBooks at bookboon.com

Ist $(*)$ gültig, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\lambda\overline{V}(U-V) = (\overline{U}-\overline{V})U$, also mit $(1+\lambda)\overline{V}U = \overline{U}U + \lambda\overline{V}V \in \mathbb{K}$. Da nach (11.4)(8), (9.15)(8) und (8.1) nun aber $\mathbb{K}\overline{V}U = \mathbb{K}V^{-1}U \neq \mathbb{K}$ ist, erhalten wir $1+\lambda = 0$ und damit $\overline{U}U = \overline{V}V$. Umgekehrt führt $\overline{U}U = \overline{V}V$ direkt auf $(*)$. □

Die Kongruenzrelation $\equiv$ läßt sich algebraisch nun wie folgt beschreiben:

(11.9) **Satz**. *Sind* $\{A,B\}, \{C,D\} \in \mathbb{P}_2$, *so gilt*

$(*)$ $\{A,B\} \equiv \{C,D\} \Leftrightarrow N(A-B) = N(C-D)$.

Insbesondere ist $\equiv$ *eine Äquivalenzrelation auf* $\mathbb{P}_2$.

Beweis: 1) Es sei $<A,B> \parallel <C,D>$, d. h. es gebe ein $\lambda \in \mathbb{K}^*$ mit $C-D = \lambda(A-B)$. Dann ist
$N(A-B) = N(C-D) \Leftrightarrow N(A-B) = \lambda^2 N(A-B) \overset{(11.4)(6)}{\Leftrightarrow} \lambda \in \{1,-1\}$
$\Leftrightarrow D = (C-A)+B \vee C = (D-A)+B \overset{(9.18)}{\Leftrightarrow} D = \tau_{A,C}(B) \vee C = \tau_{A,D}(B)$
$\overset{(11.2)}{\Leftrightarrow} \{A,B\} \equiv \{C,D\}$.
2) Es sei $<A,B> \nparallel <C,D>$. Mit (9.18), (11.2) und (11.8) erhalten wir dann $\{A,B\} \equiv \{C,D\} \Leftrightarrow N(C-\tau_{A,C}(B)) = N(C-D)$
$\Leftrightarrow N(C-(C-A+B)) = N(C-D) \Leftrightarrow N(A-B) = N(C-D)$.
3) Die verbleibende Behauptung ergibt sich direkt aus $(*)$. □

(11.10) **Eigenschaften der Norm**. Wegen $XY \cdot \overline{XY} = X\overline{X} \cdot Y\overline{Y}$ für alle $X, Y \in \mathbb{L}$ erfüllt N die sogenannte **Normenregel**

(1) $N(X \cdot Y) = N(X) \cdot N(Y) \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{L}$,

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

und weiter bestätigt man unter Verwendung von (9.27) und (11.4) sofort die Beziehungen

(2) $N(\lambda \cdot X) = \lambda^2 \cdot N(X) \quad \forall\ (\lambda, X) \in \mathbb{K} \times \mathbb{L}$,
(3) $N(X) = N(-X) = N(\overline{X}) \quad \forall\ X \in \mathbb{L}$,
(4) $N(X/Y) = N(X)/N(Y) \quad \forall\ (X, Y) \in \mathbb{L} \times \mathbb{L}^*$,
(5) $N(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0 \quad \forall\ X \in \mathbb{L}$,
(6) $N(x + iy) = x^2 + qxy - py^2 \quad \forall\ x, y \in \mathbb{K}$.

Aufgrund von (11.9) und wegen (2) bis (5) bezeichnen wir das Element $N(A-B)$ von $\mathbb{K}$ als das **Abstandsquadrat** oder als die **Normdistanz** der Punkte A, B von $\mathbb{P}$.
Die Normdistanz von A und B ist genau dann gleich Null, wenn $A = B$ ist. Zwei Elemente $\{R, S\}, \{U, V\}$ von $\mathbb{P}_2$ sind nach (11.9) genau dann kongruent, wenn sie die gleiche Normdistanz haben. Die Norm von $X \in \mathbb{P}$ ist zugleich die Normdistanz der Punkte X und 0.

Man sagt, daß durch die Normdistanz eine **Metrik**, für die euklidische Ebene $\mathbb{E}$ erklärt ist.
Man kann vom Abstandsquadrat zum *Abstand* gelangen, wenn das Wurzelziehen im Grundkörper $\mathbb{K}$ in geeigneter Weise möglich ist. Da sich aber bereits für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ Schwierigkeiten ergeben, verzichten wir vorläufig darauf, Abstände zu erklären. Tatsächlich genügt es für viele Untersuchungen, den Begriff des *Abstandsquadrates* zur Verfügung zu haben.

(11.11) Eng verbunden mit der Norm N ist die als zugehörige **symmetrische Bilinearform** bezeichnete Abbildung

$$f_N : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \to \mathbb{K} : (X, Y) \to N(X+Y) - N(X) - N(Y),$$

die für $W, X, Y, Z \in \mathbb{L}$ und $\lambda, \mu, x, y, u, v \in \mathbb{K}$ die Bedingungen
(1) $N(X+Y) = N(X)+N(Y)+f_N(X, Y)$,
(2) $f_N(X, Y) = X\overline{Y}+\overline{X}Y = f_N(Y, X) \in \mathbb{K}$,
(3) $f_N(X, X) = 2 \cdot N(X)$,
(4) $f_N(X+\lambda Y, W+\mu Z) = f_N(X, W)+\lambda f_N(Y, W)+\mu f_N(X, Z)+\lambda\mu f_N(Y, Z)$,
(5) $f_N((x, y), (u, v)) = 2xu+q(xv + yu)-2pyv$
erfüllt. Aufgrund der Eigenschaften (1), (4) und wegen (11.10)(2),(5) wird N auch eine **euklidische quadratische Form** genannt.

Zwei Elemente $X, Y \in \mathbb{L}$ heißen genau dann **senkrecht** oder **orthogonal** zueinander, in Zeichen: $X \perp Y$, wenn $f_N(X, Y) = 0$ ist. Ferner bezeichnet man zwei Geraden $A+\mathbb{K}B, C+\mathbb{K}D$ mit $A, C \in \mathbb{L} \wedge B, D \in \mathbb{L}^*$ genau dann als **senkrecht** oder **orthogonal** zueinander , in Zeichen: $A+\mathbb{K}B \perp C+\mathbb{K}D$, wenn $B \perp D$ ist.
Wegen (4) ist dieser Orthogonalitätsbegriff für Geraden wohldefiniert, und in (11.13) werden wir sehen, daß dieser Orthogonalitätsbegriff mit dem in (4.1) erklärten übereinstimmt, wenn eine normale euklidische Ebene vorliegt. Für $X, Y \in \mathbb{L}^*$ ist $[\, X \perp Y \Leftrightarrow \mathbb{K}X \perp \mathbb{K}Y\,]$; dies ist der geometrische Hintergrund für die Definition von „$X \perp Y$“.

Download free eBooks at bookboon.com

Ist $char\,\mathbb{K} \neq 2$, so verwendet man anstelle von f_N
oftmals lieber das sog. **Skalarprodukt**

$f := \frac{1}{2} f_N : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \to \mathbb{K} : (X, Y) \to \frac{1}{2} f_N(X, Y)$.

Sind $W, X, Y, Z, X_\mu, Y_\nu \in \mathbb{L} \wedge \lambda, \mu, a_\mu, b_\nu, x, y, u, v \in \mathbb{K} \wedge m, n \in \mathbb{N}^*$, so ergeben sich im Falle $char\,\mathbb{K} \neq 2 \wedge q = 0$ (vgl. A 9.4.) die Regeln

(6) $N(X+Y) = N(X)+N(Y)+2\cdot f(X,Y)$,

(7) $f(X,Y) = \frac{1}{2}(X\overline{Y}+\overline{X}Y) = f(Y,X) \in \mathbb{K}$,

(8) $f(X,X) = N(X)$,

(9) $f(X+\lambda Y, W+\mu Z) = f(X,W)+\lambda f(Y,W)+\mu f(X,Z)+\lambda\mu f(Y,Z)$,

(10) $f(\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu X_\mu, \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu Y_\nu) = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_\mu b_\nu f(X_\mu, Y_\nu)$,

(11) $f((x,y),(u,v)) = xu - pyv$

(12) $X \perp Y \Leftrightarrow f(X,Y) = 0 \Leftrightarrow Y \perp X$.

Die Formen f_N und f sind für uns vor allem deshalb von Bedeutung, weil sie eine einfache algebraische Beschreibung der Orthogonalität gestatten. Später wird (6) als *verallgemeinerter Cosinussatz* interpretiert werden.

(11.12) Wegen (11.7)(1) und (8.1) gibt es in inseparablen euklidischen Ebenen keine gleichschenkligen Dreiecke im Sinne von (4.18), d. h. in solchen Ebenen sind Elemente $\{A,B\}, \{C,D\} \in \mathbb{P}_2$ gemäß (11.2) genau dann kongruent, wenn es ein $\tau \in \mathfrak{T}$ mit $\tau(\{A,B\}) = \{C,D\}$ gibt. Überdies zeigt (11.11)(2), daß *in inseparablen Ebenen* $f_N(X,Y) = 0$ für alle $X, Y \in \mathbb{L}$ gilt, daß hier also die *Orthogonalität total ausgeartet* ist.

Für den separablen Fall erhalten wir dagegen

(11.13) **Satz**. *Ist $\mathbb{E}$ eine separable euklidische Ebene, so sind die Geraden von $\mathbb{E}$ genau die Mittelsenkrechten $m_{A,B}$ von $\mathbb{E}$ mit $\{A,B\} \in \mathbb{P}_2$, und es gilt (vgl. (11.7)(2)):*

(1) $m_{U,\overline{U}} = \mathbb{K} \quad \forall\, U \in \mathbb{L}\setminus\mathbb{K}$,

(2) $(<A,B>, m_{A,B}) \simeq (\mathbb{K}, \mathbb{K}(\overline{i}-i)) \quad \forall\, \{A,B\} \in \mathbb{P}_2$,

(3) $h \perp g \Leftrightarrow g \perp h \Leftrightarrow (g,h) \simeq (\mathbb{K}, \mathbb{K}(\overline{i}-i)) \quad \forall\, g,h \in \mathbb{G}$,

(4) $g \perp \mathbb{K} \Leftrightarrow g \parallel \mathbb{K}(\overline{i}-i) \quad \forall\, g \in \mathbb{G}$,

(5) $g \perp h \Leftrightarrow \exists\, A, B \in g$ *mit* $A \neq B \wedge h = m_{A,B} \quad \forall\, g,h \overset{\in}{\neq} \mathbb{G}$,

(6) $char\,\mathbb{K} = 2 \Leftrightarrow (g \perp h \Leftrightarrow g \parallel h \quad \forall\, g,h \in \mathbb{G})$.

Beweis: a) Ist $U \in \mathbb{L}\setminus\mathbb{K}$, so ist $U \neq \overline{U}$ gemäß (11.4)(9), und für $X \in \mathbb{L}$ führen (11.4)(9) und (11.9) auf $[\,X \in m_{U,\overline{U}} \Leftrightarrow \{U,X\} \equiv \{X,\overline{U}\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow N(U-X) = N(\overline{U}-X) \Leftrightarrow U\overline{U}-U\overline{X}-X\overline{U}+X\overline{X} = U\overline{U}-\overline{U}X-XU+X\overline{X}$
$\Leftrightarrow (\overline{U}-U)(\overline{X}-X) = 0 \Leftrightarrow X = \overline{X} \Leftrightarrow X \in \mathbb{K}\,]$, d. h. es gilt (1).
b) Ist $\{A,B\} \in \mathbb{P}_2$, so gibt es nach (9.5) $\varphi, \psi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\varphi(i) = A \wedge$
$\wedge\, \varphi(\overline{i}) = B \wedge \psi(0) = A \wedge \psi(1) = B$, und mit (1), (8.1), (9.20), (11.2)(2) und (11.4) erhalten wir dann $m_{A,B} = m_{\varphi(i),\varphi(\overline{i})} = \varphi(m_{i,\overline{i}}) = \varphi(\mathbb{K}) \in \mathbb{G}$ sowie $<A,B> = \psi(\mathbb{K}) = \psi(m_{i,\overline{i}}) = m_{\psi(i),\psi(\overline{i})}$ und
$(<A,B>, m_{A,B}) = (\varphi(<i,\overline{i}>), \varphi(\mathbb{K})) \simeq (\mathbb{K}(\overline{i}-i), \mathbb{K}) \simeq (\mathbb{K}, \mathbb{K}(\overline{i}-i))$.
Demnach ist (2) gültig, und es ist $\mathbb{G} = \{m_{A,B} \mid \{A,B\} \in \mathbb{P}_2\}$.

Download free eBooks at bookboon.com

c) Es sei $g := C+\mathbb{K}D \wedge h := E+\mathbb{K}F$ mit $C, E \in \mathbb{L} \wedge D, F \in \mathbb{L}^*$.
Nach (9.20), (11.4)(8), (11.4)(16) und (11.11)(2) ist $[h \perp g \Leftrightarrow g \perp h \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \overline{D}F+D\overline{F}=0 \Leftrightarrow \overline{D}F \in \mathbb{K}(\overline{i}-i) \Leftrightarrow (g,h) \simeq (\mathbb{K}, \mathbb{K}(\overline{i}-i))]$, d. h. es gilt (3), und mit (2), (3), (8.1), (11.4)(12) und (11.7)(3) erhalten wir dann (4), (6) und die Aussage (5) bzgl. „$\Leftarrow$“.
Zum Beweis von (5) bzgl. „$\Rightarrow$“ seien $g, h \overset{\in}{\neq} \mathbb{G}$ mit $g \perp h$ vorgegeben. Wir wählen $A \in g \backslash h$ und $C \in h \backslash g$ und setzen $k := <A, C>$. Nach (8.11) gibt es ein $l \in \mathbb{G}$ mit $l \ni C \wedge (l,g) \simeq (g,k) \not\simeq (g,g)$. Mit (8.1) folgt $l \nparallel g$. Wäre $l = k$, so wäre $(g,k) \overset{(11.7)(2)}{\simeq} (\mathbb{K}, \mathbb{K}(\overline{i}-i)) \overset{(3)}{\simeq} (g,h)$, und mit (8.1) ergäbe sich $k = h$. Für $B := g \cap l$ gilt deshalb $B \neq A$, und mit (11.8), (11.9) folgt $C \in m_{A,B} \cap h$. Wegen $(g,h) \overset{(2),(3)}{\simeq} (g, m_{A,B})$ führt (8.1) nun auf $h = m_{A,B}$. $\square$

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

D. Kennzeichnung normaler euklidischer Ebenen

Mit Hilfe von (11.9) und (11.13) erhalten wir

(11.14) **Kennzeichnung der normalen euklidischen Ebenen**.
Die normalen euklidischen Ebenen sind genau die euklidischen Ebenen mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik.

Beweis: Wegen (7.2), (10.3), (11.4)(10), (11.9) und (11.13) ist nur noch zu zeigen, daß in jeder euklidischen Ebene mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik die Axiome (K) und (Z) aus (2.3) und (2.4) gelten. Da sich (K) direkt aus (11.2), (3.13)(4) und (9.7) ergibt, beweisen wir nun, daß Axiom (Z) erfüllt ist:
Dazu sei $\{M, A\} \in \mathbb{P}_2$ vorgegeben. Wegen $2 \neq 0$ ist $B := M+(M-A) \in$ $\in <M, A>$ mit $B \neq M, A$, denn andernfalls wäre $M-A=0 \vee 2M=2A$ und damit $M=A$. Nach (9.18) und (11.2) ist $\{M, A\} \equiv \tau_{A,M}(\{M, A\}) =$ $= \{M, B\}$. Ist $C \in <M, A> \backslash \{M, A\}$ mit $\{M, A\} \equiv \{M, C\}$, so gibt es nach (11.2) eine Translation $\tau : X \to X+D$ mit $\tau(\{M, A\}) = \{M, C\}$, und es folgt $(M+D = M \wedge A+D = C) \vee (M+D = C \wedge A+D = M)$, also $C = A \vee C = M+(M-A) = B$ und damit $C = B$. □

In Verbindung mit (11.14) ist auch die folgende Aussage von Bedeutung:

(11.15) **Satz**. *Zwei normale euklidische Ebenen sind genau dann vermittels einer Bijektion φ isomorph im Sinne von (2.5), wenn sie vermittels φ isomorph im Sinne von (7.3) sind.*

Beweis: $\mathbb{G}$ bzw. $\mathbb{G}'$ sei die Menge der Geraden von $(\mathbb{P}, \equiv)$ bzw. $(\mathbb{P}', \equiv')$ (vgl. (2.5)), und $\simeq$ bzw. $\simeq'$ sei die gemäß (6.7) zu $(\mathbb{P}, \equiv)$ bzw. $(\mathbb{P}', \equiv')$ gehörige Winkelvergleichung. Ist φ ein Isomorphismus von $(\mathbb{P}, \equiv)$ auf $(\mathbb{P}', \equiv')$ im Sinne von (2.5), so ist φ nach (2.5)(4) und (2.5)(5) eine kreistreue Kollineation und damit nach (9.22) ein Isomorphismus von $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ auf $(\mathbb{P}', \mathbb{G}', \simeq')$ im Sinne von (7.3).
In umgekehrter Richtung folgt der Satz aus (11.2)(1). □

E. Kennzeichnung und Darstellung der Bewegungen

(11.16) $\mathbb{E} = (\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ sei eine beliebige euklidische Ebene. Eine Abbildung φ von $\mathbb{P}$ in sich heißt **distanztreu**, wenn sie die Bedingung

(1) $\{\varphi(X), \varphi(Y)\} \equiv \{X, Y\} \quad \forall\, \{X, Y\} \in \mathbb{P}_2$

erfüllt, und in Übereinstimmung mit (3.5) werden die distanztreuen Bijektionen auch die **Bewegungen** von $\mathbb{E}$ genannt.

Nach (11.9) ist die Bedingung (1) äquivalent zur Bedingung

(2) $N(\varphi(X)-\varphi(Y)) = N(X-Y) \quad \forall\, \{X, Y\} \in \mathbb{P}_2$.

Download free eBooks at bookboon.com

Wir bezeichnen eine Abbildung ψ von $\mathbb{P}$ in sich als **maßstabstreu**, wenn es ein festes Element $\lambda \in \mathbb{K}^*$ mit

(3) $N(\psi(X)-\psi(Y)) = \lambda \cdot N(X-Y) \quad \forall\, \{X,Y\} \in \mathbb{P}_2$

gibt. Das Element λ in (3) wird auch der **Normmaßstab** von ψ genannt.

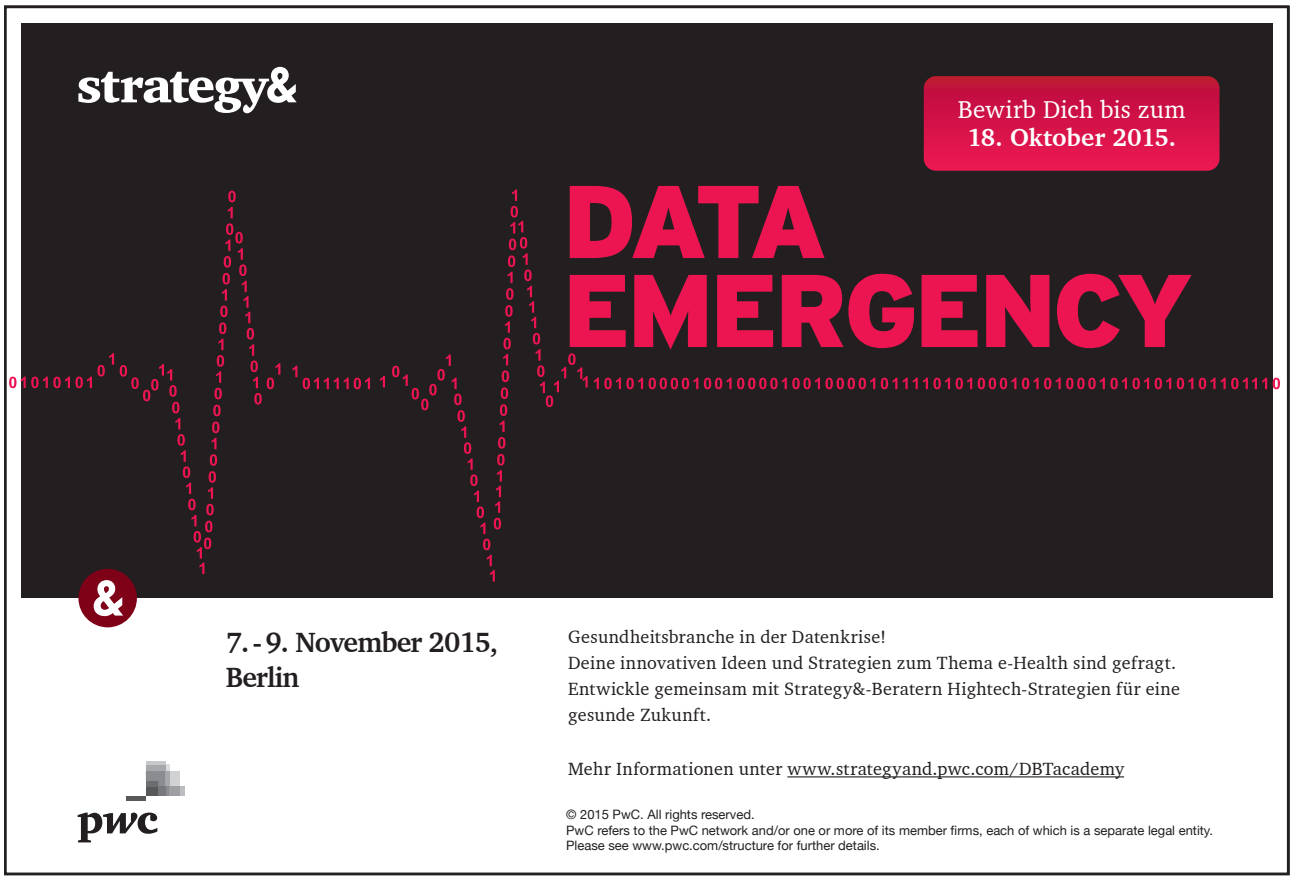
Nach (2) ist eine Abbildung φ von $\mathbb{P}$ in sich genau dann distanztreu, wenn sie maßstabstreu mit dem Normmaßstab 1 ist.

Jede Ähnlichkeitsabbildung ist maßstabstreu. Denn wegen

(4) $N((AX+B)-(AY+B)) = N(A)\cdot N(X-Y) =$
$N((A\overline{X}+B)-(A\overline{Y}+B)) \quad \forall\, A,B,X,Y \in \mathbb{L}$ (vgl. (11.10)(1))

haben die Abbildungen φ, ψ aus (9.18), (11.5) den Normmaßstab $N(A)$. Weiter zeigen wir

(11.17) **Kennzeichnung der Bewegungen und der Ähnlichkeiten.** *Die Menge der maßstabstreuen Abbildungen von $\mathbb{P}$ in sich ist identisch mit der Menge $\ddot{\mathbb{A}}$ der Ähnlichkeiten von $(\mathbb{P},\mathbb{G},\simeq)$. Jede distanztreue Abbildung von $\mathbb{P}$ in sich ist eine Bewegung. Die Bewegungen von $\mathbb{E}$ bilden einen Normalteiler $\mathfrak{B}$ von $\ddot{\mathbb{A}}(\circ)$.*



Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Die Elemente von $\mathfrak{B}^+ := \mathfrak{B} \cap \ddot{\mathbb{A}}^+$ *sind die Abbildungen der Form*
$(*)\quad \varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{P} : \boxed{X \to A \cdot X + B} \quad mit \quad A, B \in \mathbb{P} \wedge \boxed{A\overline{A} = 1}.$
Die Elemente von $\mathfrak{B}^- := \mathfrak{B} \cap \ddot{\mathbb{A}}^-$ *sind die Abbildungen der Form*
$(\diamond)\quad \psi : \mathbb{P} \to \mathbb{P} : \boxed{X \to A \cdot \overline{X} + B} \quad mit \quad A, B \in \mathbb{P} \wedge \boxed{A\overline{A} = 1}.$

Beweis: a) Die angegebenen Abbildungen φ bzw. ψ sind nach (9.18) und (11.5) Elemente von $\ddot{\mathbb{A}}$, und gemäß (11.16)(4) sind sie distanztreu, also Bewegungen. Umgekehrt geht aus (9.18), (11.5) und (11.16)(4) hervor, daß jede distanztreue Ähnlichkeit von der Form φ oder ψ ist.
b) Wir betrachten eine maßstabstreue Abbildung ζ von $\mathbb{P}$ in sich mit dem Normmaßstab λ. Wegen $N(\zeta(1) - \zeta(0)) = \lambda \cdot N(1-0) = \lambda \in \mathbb{K}^*$ ist $A := \zeta(1) - \zeta(0) \neq 0$. Ist ξ die Ähnlichkeit $\mathbb{P} \to \mathbb{P} : X \to A \cdot X + \zeta(0)$, so ist $\eta := \xi^{-1} \circ \zeta$ als Produkt zweier maßstabstreuer Abbildungen ebenfalls maßstabstreu, und es gilt $\eta(0) = 0 \wedge \eta(1) = 1$, d. h. der Normmaßstab μ von η erfüllt die Bedingung $\mu = \mu(1-0) = \eta(1) - \eta(0) = 1$.
Wir setzen $X' := \eta(X) \quad \forall\ X \in \mathbb{P}$, und gemäß (11.16) erhalten wir dann $X'\overline{X'} = X\overline{X} \wedge (X'-1)(\overline{X'}-1) = (X-1)(\overline{X}-1) \quad \forall\ X \in \mathbb{P}$. Dies impliziert $(X'-X)\cdot(X'-\overline{X}) = 0$, und folglich ist $X' \in \{X, \overline{X}\} \quad \forall\ X \in \mathbb{P}$. Insbesondere gilt also $X' = X \quad \forall\ X \in \mathbb{K}$, und im inseparablen Fall ist $\eta = id_{\mathbb{L}}$.
Liegt der separable Fall vor, so ergibt sich $\eta \in \{id_{\mathbb{L}}, \kappa_{\mathbb{L}}\}$, denn andernfalls gäbe es $U, V \in \mathbb{L} \backslash \mathbb{K}$ mit $U' = U \wedge V' = \overline{V}$, und nach (11.16) wäre dann $0 = N(U'-V') - N(U-V) = (U-\overline{U})\cdot(\overline{V}-V)$, also $U = \overline{U} \vee V = \overline{V}$ im Widerspruch zu $U, V \notin \mathbb{K}$ und (11.4)(15).
Aus $\eta \in \{id_{\mathbb{L}}, \kappa_{\mathbb{L}}\}$ folgt nun offenbar $\zeta = \xi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ oder $\zeta = \xi \circ \kappa_{\mathbb{L}} \in \ddot{\mathbb{A}}^-$.
c) Nach a), b) und (11.16) sind alle betrachteten Abbildungen Ähnlichkeiten. Demnach bleibt nur noch die Normalteilereigenschaft von $\mathfrak{B}$ zu zeigen, die sich aber unter Verwendung von (9.18) und (11.5) direkt bestätigen läßt. □

(11.18) *Anmerkungen.* 1) Nach (11.17) sind die Elemente von $\mathfrak{B}^+$ bzw. $\mathfrak{B}^-$ winkeltreu bzw. gegensinnig winkeltreu. In Ubereinstimmung mit (6.10) und (6.21) werden die Elemente von $\mathfrak{B}^+$ deshalb **eigentliche** oder **gerade Bewegungen** und die Elemente von $\mathfrak{B}^-$ **uneigentliche** oder **ungerade Bewegungen** genannt.

2) Als Durchschnitt der Normalteiler $\mathfrak{B}$ und $\ddot{\mathbb{A}}^+$ von $\ddot{\mathbb{A}}$ ist $\mathfrak{B}^+$ ein Normalteiler von $\mathfrak{B}$ und von $\ddot{\mathbb{A}}^+$.
3) Nach (9.1) und (9.18) ist $\mathfrak{T}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{B}^+$ und von $\mathfrak{B}$.

Download free eBooks at bookboon.com

4) Ist $\mathbb{E}$ **inseparabel**, so ist $\boxed{\mathfrak{B} = \mathfrak{T}}$, denn im inseparablen Fall ist $A\overline{A} = 1 \Leftrightarrow AA = 1 \overset{2=0}{\Leftrightarrow} (A-1)(A-1) = 0 \Leftrightarrow A = 1$.

5) Ist $\mathbb{E}$ **separabel**, so existiert zu jeder Geraden $g \in \mathbb{G}$ genau eine Bewegung $\widetilde{g}$ mit g als Fixpunktmenge, genannt **Spiegelung an g**.
Im Falle $g = A+\mathbb{K}B$ mit $A, B \in \mathbb{K} \wedge B \neq 0$ gilt

$$(*) \qquad \boxed{\widetilde{g}(X) = (B/\overline{B})(\overline{X}-\overline{A})+A} \quad \forall\, X \in \mathbb{P}.$$

Denn ist $\widetilde{g}$ durch $(*)$ definiert, so ist $[\, X = \widetilde{g}(X) \Leftrightarrow \overline{B}(X-A) = B\overline{(X-A)} \overset{(11.4)(15)}{\Leftrightarrow} \overline{B}\cdot(X-A) \in \mathbb{K} \Leftrightarrow X-A \in \mathbb{K}\,(B\overline{B})/\overline{B} = \mathbb{K}B \Leftrightarrow X \in A+\mathbb{K}B = g\,]$ $\forall\, X \in \mathbb{P}$, und wegen $(B/\overline{B})\cdot(\overline{B}/B) = 1$ ist $\widetilde{g} \in \mathfrak{B}^-$.

Ist nun $\sigma \in \ddot{\mathbb{A}}$ mit $\sigma(X) = X \;\forall\, X \in g$, so ist auch $(\sigma\circ\widetilde{g})(X) = X \;\forall\, X \in g$, und mit (11.3)$(\diamond)$ folgt $\sigma \in \ddot{\mathbb{A}}^+ \vee \sigma\circ\widetilde{g} \in \ddot{\mathbb{A}}^+$.
Mit (9.5) führt dies auf $\sigma = id_{\mathbb{L}} \vee \sigma\circ\widetilde{g} = id_{\mathbb{L}}$, also auf $\sigma \in \{id_{\mathbb{L}}, \widetilde{g}^{-1}\}$.

Demnach ist $\widetilde{g} = \widetilde{g}^{-1}$ die einzige Ähnlichkeit mit der Fixpunktmenge g.

Unter Verwendung von $(*)$ läßt sich bestätigen, daß die Sätze (5.6), (5.8), (5.9), (5.10), (5.12) und (5.13) bei Zugrundelegung der Definitionen (5.7) und (5.11) nicht nur in den normalen euklidischen Ebenen, sondern in sämtlichen separablen euklidischen Ebenen gültig sind (vgl. [23], [31], [35] und [36]).

6) Nach (9.5) gibt es zu je zwei Geraden g, h ein $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\varphi(g) = h$. Dagegen existiert zu $g, h \in \mathbb{G}$ nicht in jedem Falle ein $\varphi \in \mathfrak{B}$ mit $\varphi(g) = h$ (vgl. (5.23)5)).

Beispiel 1: Läßt man aus der „reellen" Ebene $\mathbb{E}(\mathbb{C}, \mathbb{R}) = \mathbb{E}(\mathbb{L}_{-1,0}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ (vgl. (9.29)) alle Punkte mit nichtrationalen Koordinaten fort, so entsteht die Ebene $\mathbb{E}(\mathbb{L}_{-1,0}(\mathbb{Q}), \mathbb{Q})$ mit $\mathbb{Q}$ als Koordinatenkörper (vgl. (9.33)). Wären die Geraden $<0, 1>$ und $<0, 1+i>$ dieser Ebene kongruent, so gäbe es nach (5.24) einen Kreis k um 0, der beide Geraden trifft, und dann gäbe es nach (11.9) Elemente $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}^*$ mit $N(\lambda) = N(\mu(1+i))$, also mit $(\lambda/\mu)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ im Widerspruch zu $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Mithin sind die Geraden $<0, 1>$ und $<0, 1+i>$ von $\mathbb{E}(\mathbb{L}_{-1,0}(\mathbb{Q}), \mathbb{Q})$ nicht kongruent.

Beispiel 2: Ist $char\,\mathbb{E} \neq 2$ und ist $|\mathbb{P}| = n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$, so hat der Kreis k um 0 durch 1 genau $n+1$ Punkte (vgl. (4.12)(3)), und wegen Axiom (Z) gehen durch 0 dann genau $(n+1)/2$ Geraden, die k nicht treffen und die somit gemäß (5.24) nicht kongruent zu $<0, 1>$ sind.

Download free eBooks at bookboon.com

F. Weitere Sätze über Ähnlichkeiten

Mit Hilfe der gewonnenen Darstellungen können wir die Ähnlichkeitssätze (9.5), (10.8) und (10.9) nun durch weitere Transitivitätssätze ergänzen.

Wir nennen Punktetripel (A, B, C), (A', B', C') **ähnlich, gegensinnig ähnlich, kongruent, gleichsinnig kongruent, gegensinnig kongruent**, wenn die Abbildung φ aus (10.7) vom entsprechenden Typ ist. Zunächst zeigen wir

(11.19) **Transitivität der gegensinnigen Ähnlichkeiten**.
Sind $A, B, C, D \in \mathbb{L}$ mit $A \neq B$ und $C \neq D$, so gibt es genau ein $\psi \in \ddot{\mathbb{A}}^-$ mit $\psi(A) = C \wedge \psi(B) = D$.

Beweis: Nach (9.5) gibt es $\varphi, \xi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\varphi(A) = 0 \wedge \varphi(B) = 1 \wedge \xi(0) = C \wedge \wedge\ \xi(1) = D$, und dann ist $\psi := \xi \circ \kappa_{\mathbb{L}} \circ \varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^-$ mit $\psi(A) = C \wedge \psi(B) = D$. Ist außerdem $\eta \in \ddot{\mathbb{A}}^-$ mit $\eta(A) = C \wedge \eta(B) = D$, so ist $\psi^{-1} \circ \eta$ ein Element von $\ddot{\mathbb{A}}^+$ mit den Fixpunkten A, B, und nach (9.5) gilt dann $\psi^{-1} \circ \eta = id_{\mathbb{P}}$, also $\eta = \psi$. □

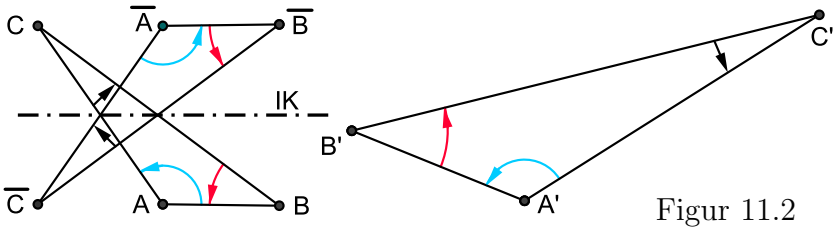
Mit (9.5) und (11.19) folgt nun (vgl. Figur 11.2)

(11.20) **Dritter Ähnlichkeitssatz**. *Sind (A, B, C) und (A', B', C') geordnete Dreiecke, so sind äquivalent:*

(1) *(A, B, C) und (A', B', C') sind gegensinnig ähnlich.*

(2) *Die Teilverhältnisse $\frac{\overline{A} - \overline{C}}{\overline{B} - \overline{C}}$ und $\frac{A' - C'}{B' - C'}$ sind gleich.*

(3) *Es gelten wenigstens zwei der Aussagen $\langle B, A, C\rangle \simeq \langle C', A', B'\rangle$, $\langle C, B, A\rangle \simeq \langle A', B', C'\rangle$, $\langle A, C, B\rangle \simeq \langle B', C', A'\rangle$.*



Figur 11.2

Beweis: Wegen $\ddot{\mathbb{A}}^- = \ddot{\mathbb{A}}^+ \circ \kappa_{\mathbb{L}}$ (vgl. (9.18) und (11.5)) gilt (1) genau dann, wenn $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ und (A', B', C') gleichsinnig ähnlich sind. Deshalb folgt die Behauptung aus (8.11), (10.8) und (10.9). □

Download free eBooks at bookboon.com

Als Verallgemeinerung von (5.22) zeigen wir

(11.21) **Vierter Ähnlichkeitssatz.**
Sind $\Delta=(A,B,C)$ *und* $\Delta'=(A',B',C')$ *geordnete Dreiecke und ist* $\lambda:=\dfrac{N(A'-B')}{N(A-B)}$, $\mu:=\dfrac{N(B'-C')}{N(B-C)}$ *und* $\nu:=\dfrac{N(A'-C')}{N(A-C)}$, *so gilt:*

(1) Δ *und* Δ' *sind genau dann ähnlich, wenn* $\lambda=\mu=\nu$ *ist.*

(2) Δ *und* Δ' *sind genau dann kongruent, wenn* $\lambda=\mu=\nu=1$ *ist.*

(3) Sind Δ *und* Δ' *ähnlich, so sind sind* Δ *und* Δ' *kongruent, wenn* $\lambda=1\vee\mu=1\vee\nu=1$ *gilt.*

Beweis: a) Es gelte $\lambda=\mu=\nu$.
Nach (9.5) gibt es $\varphi,\psi\in\ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\varphi(C)=\psi(C')=0\ \wedge\ \varphi(B)=\psi(B')=1$, und für $D:=\varphi(A)$ und $E:=\psi(A')$ folgt $D=\dfrac{A-C}{B-C}$ sowie $E=\dfrac{A'-C'}{B'-C'}$ gemäß (10.8). Dann gilt $N(D)=\dfrac{N(A-C)}{N(B-C)}=\dfrac{N(A'-C')}{N(B'-C')}=N(E)$ sowie $N(D-1)=\dfrac{N(A-B)}{N(B-C)}=\dfrac{N(A'-B')}{N(B'-C')}=N(E-1)$, und hieraus ergibt sich $(E-D)(E-\overline{D})=0$, also $E\in\{D,\overline{D}\}$, d.h. (A,B,C) und (A',B',C') sind ähnlich vermittels $\psi^{-1}\circ\varphi$ im Falle $E=D$ und ähnlich vermittels $\psi^{-1}\circ\kappa_{\mathbb{L}}\circ\varphi$ im Falle $E=\overline{D}$. b) Zusammen mit (11.17) führt a) auf (1), und offenbar ergeben sich (2) und (3) direkt aus (1). □

Deloitte.

Calling for Berlin
Technology Advisory kennenlernen

Consulting hautnah erleben
5.–7. November 2015
www.deloitte.com/de/calling-for-berlin

© 2015 Deloitte Consulting GmbH

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

G. Arithmetische Winkelmessung

(11.22) Die in (6.29) für normale euklidische Ebenen eingeführte geometrische Winkelmessung läßt sich algebraisch nun für beliebige euklidische Ebenen entwickeln.

Zu diesem Zweck betrachten wir die Menge $\mathbb{G}_0 := \{g \in \mathbb{G} \mid g \ni 0\}$ aller Geraden durch 0 und bezeichnen die Elemente von $\mathbb{G}_0$ als **Meßnadeln** oder als **Öffnungen** (vgl. (6.29)). Die spezielle Meßnadel $\mathbb{K}$ wird im weiteren auch **0°-Öffnung** genannt.
Ist (g,h) ein $\mathbb{G}$-Winkel, so gibt es nach Axiom (W) genau ein $m \in \mathbb{G}_0$ mit $(g,h) \simeq (\mathbb{K}, m)$. Wir notieren m als $\measuredangle(g,h)$ und nennen $\measuredangle(g,h)$ die **Meßnadel** oder die **Öffnung** oder das (geometrische) **Winkelmaß** von (g,h). Da $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist, folgt

(1) $(g,h) \simeq (k,l) \;\Leftrightarrow\; \measuredangle(g,h) = \measuredangle(k,l) \quad \forall\, (g,h),(k,l) \in \mathbb{G}\times\mathbb{G},$

und nach (9.15)(7) gilt

(2) $\boxed{\measuredangle(A'+\mathbb{K}A, B'+\mathbb{K}B) = \mathbb{K}A^{-1}B = \mathbb{K}\overline{A}B} \quad \forall\, (A',A),(B',B) \in \mathbb{L}\times\mathbb{L}^*.$

Offenbar ist $\mathbb{K}$ die Meßnadel der Nullwinkel, d.h. es gilt

(3) $g \parallel h \;\Leftrightarrow\; \measuredangle(g,h) = \mathbb{K} \quad \forall\, g,h \in \mathbb{G}.$

Im separablen Fall führt (11.13)(4) auf

(4) $g \perp h \;\Leftrightarrow\; \measuredangle(g,h) = \mathbb{K}(\overline{i}-i) \quad \forall\, g,h \in \mathbb{G},$

und deshalb wird $\mathbb{K}(\overline{i}-i)$ im separablen Fall als die **90°-Öffnung** bezeichnet.

Auf $\mathbb{G}_0$ soll nun eine Addition engeführt werden, die das Aneinandersetzen von Winkeln beschreibt. Für $g,h \in \mathbb{G}_0$ soll $g \oplus h$ diejenige Meßnadel $m \in \mathbb{G}_0$ sein, die entsteht, wenn man ausgehend von g den Winkel $(\mathbb{K}, h)$ „abträgt“, d.h. es soll $(\mathbb{K}, h) \simeq (g, m)$ sein.
Ist $g = \mathbb{K}A$, $h = \mathbb{K}B$ und $m = \mathbb{K}C$ mit $A,B,C \in \mathbb{L}^*$, so führt (9.15)(7) auf $\mathbb{K}B = \mathbb{K}A^{-1}C$ und damit auf $\mathbb{K}C = \mathbb{K}A{\cdot}B$. Deshalb setzen wir

(5) $\boxed{\mathbb{K}A \oplus \mathbb{K}B := \mathbb{K}A{\cdot}B \quad \forall\, A,B \in \mathbb{L}^*}.$

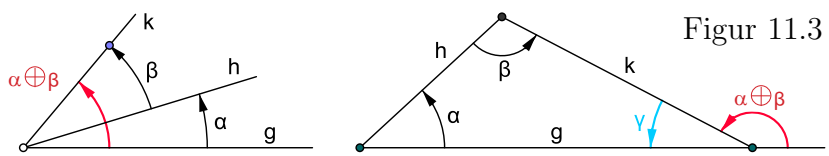
Damit ergibt sich, wie man direkt bestätigt, die Aussage

(6) $\mathbb{G}_0(\oplus)$ *ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element* $\mathbb{K}$.
Das „Negative“ von $\mathbb{K}A$ *ist* $\boxed{\ominus\,\mathbb{K}A := \mathbb{K}A^{-1} = \mathbb{K}\overline{A}} \quad \forall\, A \in \mathbb{L}^*.$

Weiter zeigen wir (vgl. Figur 11.3)

(11.23) **Additivität des Winkelmaßes**. *Sind* $g,h,k \in \mathbb{G}$, *so gilt*

$$\boxed{\measuredangle(g,h) \oplus \measuredangle(h,k) = \measuredangle(g,k)} \text{ und } \boxed{\measuredangle(h,g) = \ominus\measuredangle(g,h)}.$$



Figur 11.3

Download free eBooks at bookboon.com

Beweis: Ist $g \parallel \mathbb{K}A$, $h \parallel \mathbb{K}B$, $k \parallel \mathbb{K}C$ mit $A, B, C \in \mathbb{L}^*$, so ist $\measuredangle(g,h) \oplus \measuredangle(h,k) = \mathbb{K}\,A^{-1}B \oplus \mathbb{K}B^{-1}C = \mathbb{K}A^{-1}C = \measuredangle(g,k)$ und $\ominus\measuredangle(g,h) = \mathbb{K}\overline{A}B = \mathbb{K}\overline{B}A = \measuredangle(h,g)$. □

Als *Corollar* zu (11.22)(6) und (11.23) erhalten wir (vgl. Figur 11.3)

(11.24) **Satz über die Winkelsumme im Dreieck.**
Für $g, h, k \in \mathbb{G}$ gilt stets $\measuredangle(g,h) \oplus \measuredangle(h,k) \oplus \measuredangle(k,g) = \mathbb{K}$.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Wegen (11.24) darf man $\mathbb{K}$ zugleich auch als Öffnung der *„gestreckten" Winkel* und damit als 180°-**Öffnung** bezeichnen.

(11.25) Ein Dreieck $\Delta := \{A, B, C\}$ von $\mathbb{E}$ heißt **gleichseitig**, wenn $\{A, B\} \equiv \{B, C\} \equiv \{C, A\}$ ist. Nach (11.8) und (11.9) ist Δ genau dann gleichseitig, wenn $\langle A, C, B\rangle \simeq \langle C, B, A\rangle \simeq \langle B, A, C\rangle$ gilt, d.h. wenn Δ **gleichwinklig** ist. Hierzu bemerken wir folgendes:

1) Wenn ein gleichseitiges Dreieck existiert, dann existiert nach (9.5) auch ein gleichseitiges Dreieck mit den Ecken $0, 1$, und nach (9.27) dürfen wir uns i als dritte Ecke gewählt denken. Dann ist $N(i) = N(1-i) = N(1)$, und mit (11.10)(6) folgt $-p = 1 - q - p = 1$, also $-p = 1 = q$ und damit $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\mathbb{L}_{-1,1}, \mathbb{K})$. Hier ist $i^2 = -1+i$, $\overline{i} = 1-i$, $i \cdot \overline{i} = 1$ und $i^3 = -1$.

2) Mit den Ecken $0, 1$ gibt es in dieser Ebene noch genau ein weiteres gleichseitiges Dreieck, nämlich $\{0, 1, \overline{i}\}$, denn ist {0,1,X} gleichseitig, so ist $X\overline{X} = X\overline{X} - X - \overline{X} + 1 = 1$, und dann ist $0 = X^2 - X + 1 = (X-i)(X-\overline{i})$, also $X \in \{i, \overline{i}\}$. Wegen $\overline{i} = 1-i$ ist $(0, i, 1, \overline{i})$ eine Raute, und deshalb werden $\mathbb{K}i$ und $\mathbb{K}\overline{i}$ als die $\pm 60°$-**Öffnungen** dieser Ebene bezeichnet.

3) Ist $char\,\mathbb{K} \neq 2$ und läßt sich i so wählen, daß $\{-1, 1, i\}$ ein gleichseitiges Dreieck ist, so folgt analog 1) die Aussage $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\mathbb{L}_{-3,0}, \mathbb{K})$. Zusammen mit 1) bedeutet dies, daß es zu vorgegebenem Koordinatenkörper $\mathbb{K}$ (bis auf Isomorphie) höchstens eine euklidische Ebene gibt, in der gleichseitige Dreiecke existieren, daß eine solche Ebene isomorph ist zu $\mathbb{E}(\mathbb{L}_{-1,1}, \mathbb{K})$ und daß sie im Falle $char\,\mathbb{K} \neq 2$ auch zu $\mathbb{E}(\mathbb{L}_{-3,0}, \mathbb{K})$ isomorph ist (vgl. A 9.4.).

4) Ausgehend vom Körper $\mathbb{K}$ gewinnt man im Falle $char\,\mathbb{K} \neq 2$ nach (9.28) genau dann den Erweiterungskörper $\mathbb{L}_{-3,0}$, wenn $-3 \neq x^2 \ \forall\, x \in \mathbb{K}$ ist. Insbesondere ist somit vorauszusetzen, daß $char\,\mathbb{K} \neq 3$ ist.

Da -3 kein Quadrat einer rationalen Zahl ist, gibt es unter den unendlich vielen nichtisomorphen euklidischen Ebenen mit Koordinatenkörper $\mathbb{Q}$ (vgl. (9.31)) genau eine, die gleichseitige Dreiecke enthält.

5) Wenn in der Ebene $\mathbb{E}$ eine $\pm 60°$-Öffnung ω existiert, so führt (11.24) auf $\omega \oplus \omega \oplus \omega = \mathbb{K}$, und mit (11.22) folgt $\omega \oplus \omega = \ominus\omega$, d.h. $\{\mathbb{K}, \omega, \ominus\omega\}$ ist eine dreielementige Untergruppe von $\mathbb{G}_0(\oplus)$. Wenn jetzt $|\mathbb{K}| = n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist, dann bedeutet dies nach dem Satz von Lagrange aus der Gruppentheorie, daß 3 ein Teiler von $|\mathbb{G}_0| = n+1$ ist (vgl. (4.17)). Diese Bedingung ist nach [12] auch hinreichend für die Existenz gleichseitiger Dreiecke, und gemäß (9.35) bedeutet dies, daß endliche euklidische Ebenen mit solchen Dreiecken existieren, wenn $n \in \{2, 5, 8, 11, 17, 23, 29, 32, 41, ...\}$ ist.

Download free eBooks at bookboon.com

H. Sätze von Pythagoras und Euklid

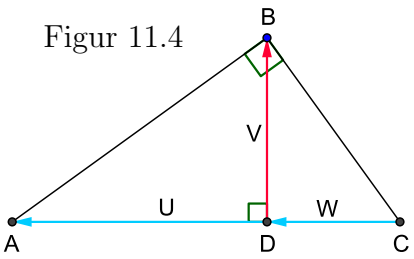
Die folgende Aussage schlägt eine Brücke zwischen Abstandsmessung und Orthogonalität und unterstreicht noch einmal, daß die Normdistanz als Abstandsquadrat zu interpretieren ist (vgl. Figur 11.4):

(11.26) **Satz des Pythagoras**. *Ist A,B,C ein beliebiges Dreieck, so ist*
$<A,B>\perp<B,C> \;\Leftrightarrow\; N(A-B)+N(B-C)=N(A-C)$.

Beweis: Für $X:=A-B$ und $Y:=B-C$ ist $B+\mathbb{K}X\perp B+\mathbb{K}Y \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 0=f_N(X,Y)=N(X+Y)-N(X)-N(Y)$ (vgl. (11.11)). □

Im Zusammenhang mit (11.26) werden immer auch der Höhensatz und der Kathetensatz von EUKLID genannt. In diesen Sätzen ist bei üblicher Formulierung das Produkt zweier Streckenlängen zu bilden. Obwohl der Begriff der Streckenlänge noch nicht zur Verfügung steht, haben wir dennoch die Möglichkeit, ein solches Produkt als Element von $\mathbb{K}$ auszudrücken. Wir werden später sehen, daß die hier angegebene Darstellung bei geeignetem Grundkörper (z. B. im Falle $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) mit der üblichen Darstellung identisch ist:

Figur 11.4



(11.27) **Sätze des Euklid**. *Es sei* $\mathrm{char}\,\mathbb{E}\neq 2$. *Ist* $\{A,B,C\}$ *ein Dreieck und ist* D *der Fußpunkt des Lotes von* B *auf* $<A,C>$*,so gilt*

(1) Erster Höhensatz. $<A,B>\perp<B,C> \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(A-D,D-C)=N(B-D) \Leftrightarrow (A-D)\cdot\overline{(D-C)}=N(B-D)$.

(2) Zweiter Höhensatz. $<A,B>\perp<B,C> \Rightarrow$
$\Rightarrow N(A-B)^{-1}+N(B-C)^{-1}=N(B-D)^{-1}$.

(3) Erster Kathetensatz. $<A,B>\perp<B,C> \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(A-C,A-D)=N(A-B) \Leftrightarrow (A-C)\cdot\overline{(A-D)}=N(A-B)$.

(4) Zweiter Kathetensatz. $<A,B>\perp<B,C> \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(A-C,D-C)=N(B-C) \Leftrightarrow (A-C)\cdot\overline{(D-C)}=N(B-C)$.

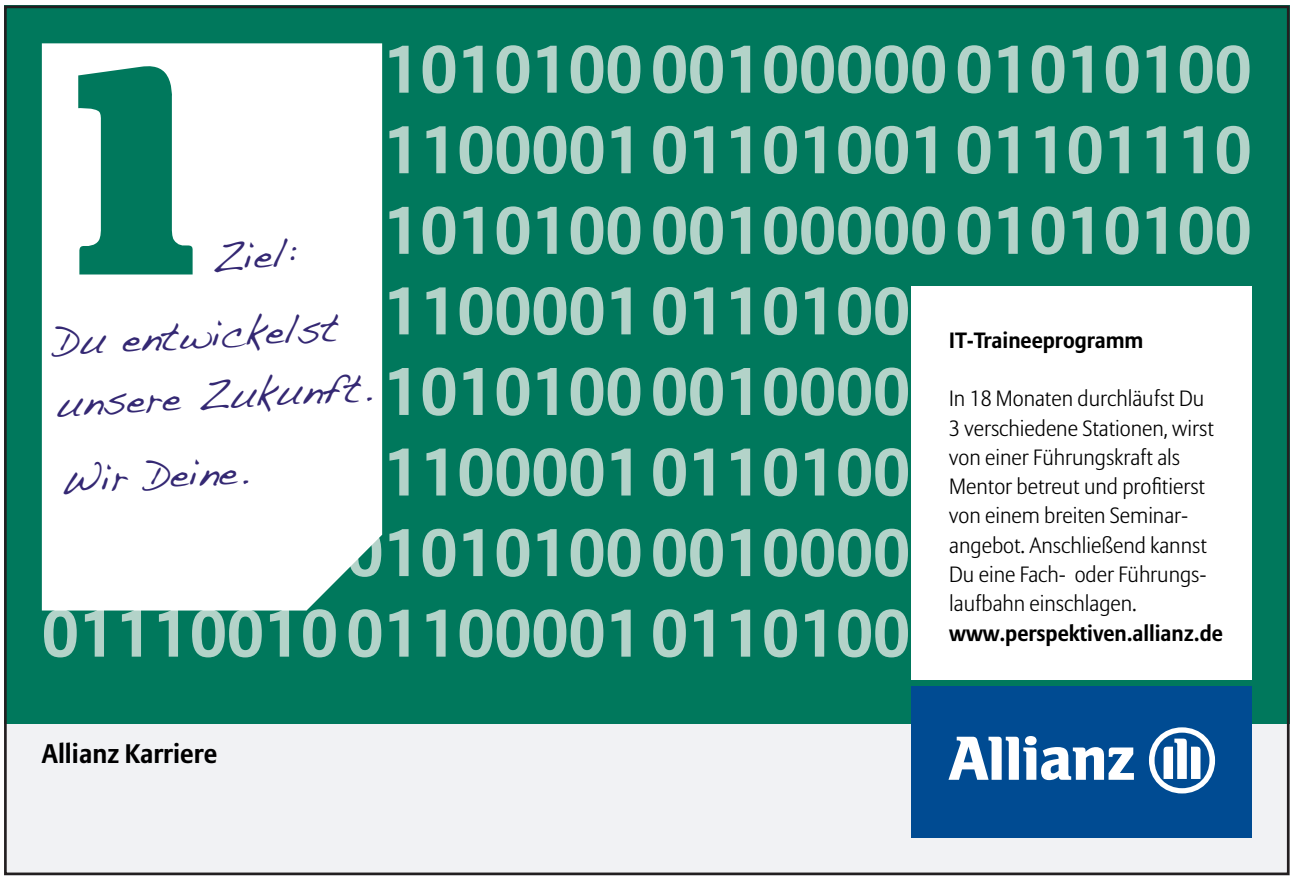
Beweis: Für $U:=A-D$, $V:=B-D$ und $W:=D-C$ führen die Voraussetzungen in Verbindung mit (11.11) auf $f(U,V)=f(V,W)=0$, und dann ist $<A,B>\perp<B,C> \Leftrightarrow f(A-B,B-C)=f(U-V,V+W)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(U,W)=f(V,V)=N(V) \Leftrightarrow f(U+W,U)=f(U,U)+f(W,U)=$
$=N(U)+N(V)=N(U-V)$. Demnach sind (1) und (3) gültig, denn nach (11.11) und (11.22) ist $f(U,W)=U\overline{W}=\overline{U}W \wedge f(U+W,U)=(U+W)\cdot\overline{U}$.

Download free eBooks at bookboon.com

Aus (3) folgt (4) durch Vertauschen von A und C. Mit (1) und (11.26) ergibt sich $N(V)^2 = U\overline{U}\cdot W\overline{W} = (N(A-B)-N(V))\cdot(N(B-C)-N(V))$, und durch Umformung führt dies auf (2). □

I. Sekantensatz und Büschelsätze

Der folgende Satz, in dem ebenso wie in (11.27) Produkte von Strecken zu bilden sind, liefert das Fundament für die Theorie der Kreisbüschel und der (hier nicht behandelten) Inversionsabbildungen. Er eröffnet damit den Zugang zur sogenannten Möbiusgeometrie und zu einer kreisgeometrischen Behandlung der elliptischen und der hyperbolischen Geometrie im Sinne von POINCARÉ (vgl. [39]). Unsere Formulierung schließt den Fall der Charakteristik 2 mit ein:



Download free eBooks at bookboon.com

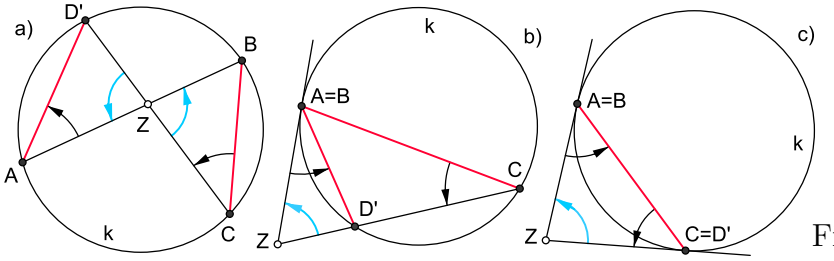
Click on the ad to read more

(11.28) **Sekantensatz** *(Figur 11.5). Sind A, C, Z drei nichtkollineare Punkte von $\mathbb{E}$ und ist $B \in <Z, A>$ sowie $D \in <Z, C>$, so gilt*

(1) $(A-Z)\cdot\overline{(B-Z)} = \overline{(C-Z)}\cdot(D-Z)$
genau dann, wenn ein Kreis k mit

(2) $k \cap <Z, A> = \{A, B\} \wedge k \cap <Z, C> = \{C, D\}$
existiert. Im Falle $char\,\mathbb{K} \neq 2$ ist (1) äquivalent zu

(3) $f(A-Z, B-Z) = f(C-Z, D-Z)$.



Figur 11.5

Beweis: Da die Behauptung im Falle $B = Z \vee D = Z$ auf der Hand liegt, gehen wir von $B, D \neq Z$ aus. Ist k der nach (8.2) und (8.8) eindeutig bestimmte Kreis durch A, B, C mit $k \cap <Z, A> = \{A, B\}$ und ist $D' \in \mathbb{L}$ festgelegt durch $k \cap <Z, C> = \{C, D'\}$, so führt (8.7) auf $\langle B, C, Z\rangle \simeq \langle Z, A, D'\rangle$, und wegen $\langle C, Z, B\rangle \simeq \langle D', Z, A\rangle$ sind (B, C, Z) und (D', A, Z) gemäß (11.20) dann gegensinnig ähnlich. Mit (11.20) führt dies auf $(*)$ $(A-Z)\cdot\overline{(B-Z)} = \overline{(C-Z)}\cdot(D'-Z)$. Es folgt $[(1) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} D = D' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k \cap <Z, C> = \{C, D\}]$, wie behauptet. Nach (11.11) und (11.22) ist (1) $\Leftrightarrow$ (3), falls $char\,\mathbb{K} \neq 2$ ist. $\square$

Download free eBooks at bookboon.com

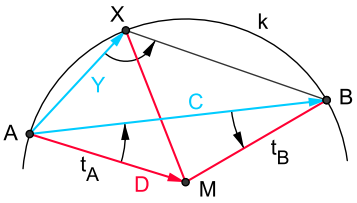
Die Figuren 11.5 b), c) zeigen, daß (11.28) auch dann gültig ist, wenn die Geraden durch Z den betrachteten Kreis berühren.

In diesem Zusammenhang wollen wir auf die merkwürdige Lage der Tangenten von Kreisen im Falle der Charakteristik 2 eingehen.
Zunächst folgt aus (8.4), daß im **inseparablen** Fall die Tangenten eines Kreises stets paarweise parallel sind, denn sonst gäbe es nach (11.8) und (11.28) gleichschenklige Dreiecke entgegen (11.12). Weiter erhalten wir

(11.29) **Satz**. *Ist* $\mathbb{E}$ *eine* **separable** *euklidische Ebene mit* $\boxed{\mathit{char}\,\mathbb{E}=2}$ *und ist* $k_{M;A}:=\{X\in\mathbb{P}\,|\,\{M,X\}\equiv\{M,A\}\}\ \forall\,\{M,A\}\in\mathbb{P}_2$, *so gilt:*

(1) Ist $k\in\mathfrak{K}$, *so haben die sämtlichen Tangenten von* k *einen Punkt* $M\in\mathbb{P}\setminus k$ *gemeinsam, und es gilt* $k=k_{M;A}\ \ \forall\ A\in k$.
Wir nennen M *den* **Mittelpunkt** *des Kreises* k.

(2) Es ist $\mathfrak{K}=\{k_{M;A}\,|\,\{M,A\}\in\mathbb{P}_2\}$.



Figur 11.6

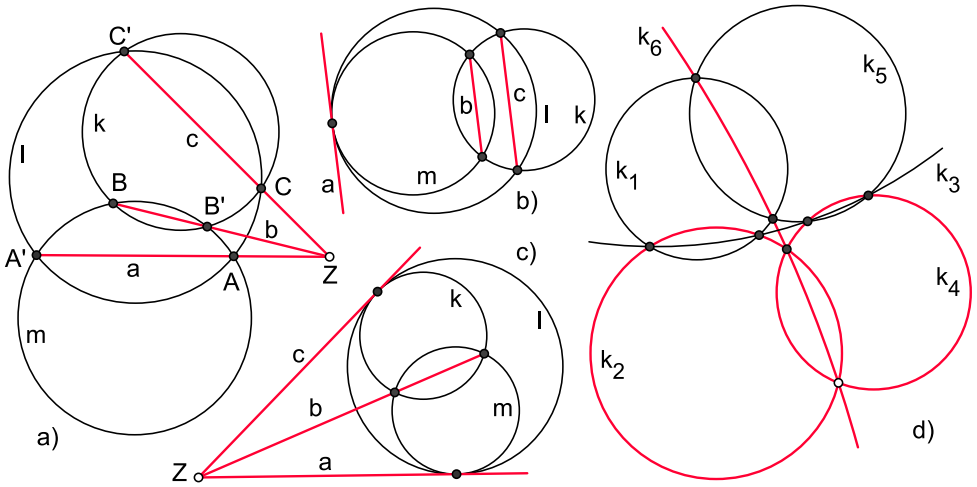
Beweis: a) Es seien $k\in\mathfrak{K}$, $A,B\overset{\in}{\neq}k$ und $X\in\mathbb{P}\setminus\{A,B\}$. Für die Tangenten t_A,t_B von k in A bzw. B gilt $t_A\nparallel t_B$, denn sonst wäre $\measuredangle(t_A,<A,B>)=\measuredangle(<A,B>,t_A)=\mathbb{K}$ gemäß (8.1), (8.4) und (11.7)(3). Nun sei $M:=t_A\cap t_B$, $C:=B-A$, $D:=M-A$ und $Y:=X-A$ (Figur 11.6). Nach (8.4) und (11.8) ist $N(D)=N(B-M)=$ $=N(C-D)$, d.h. es gilt $(*)\ \ D\overline{C}+\overline{D}C=C\overline{C}$.
Dann ist $[\,X\in k\overset{(8.7),(11.22)(2)}{\Leftrightarrow}\mathbb{K}\overline{Y}(Y-C)=\mathbb{K}\overline{D}C\Leftrightarrow\overline{Y}(Y-C)/\overline{D}C\in\mathbb{K}\Leftrightarrow$ $\overset{sep.}{\Leftrightarrow}\overline{Y}(Y-C)/\overline{D}C=\overline{Y(Y-C)}/D\overline{C}\overset{2=0}{\Leftrightarrow}Y\overline{Y}(D\overline{C}+\overline{D}C)=C\overline{C}(D\overline{Y}+\overline{D}Y)$
$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}Y\overline{Y}=D\overline{Y}+\overline{D}Y\overset{2=0}{\Leftrightarrow}N(Y-D)=N(D)\Leftrightarrow N(X-M)=N(A-M)\,]$.
Demnach ist $k=k_{M;A}$, und mit (11.28) folgt $<X,M>\cap k=\{X\}\ \forall\,X\in k$, d.h. (1) ist gültig.
b) Nun sei $\{M,A\}\in\mathbb{P}_2$. Wir betrachten eine Gerade g durch M mit $g\not\ni A$ und setzen $\widetilde{g}(A)=:B$ (vgl. (11.18) 5)). Dann ist $B\in k_{M;A}\setminus\{A\}$, und nach (11.28) existiert ein Kreis $l\in\mathfrak{K}$ mit $l\cap<M,A>=A\wedge l\cap<M,B>=B$. Mit (1) folgt $k_{M,A}=l\in\mathfrak{K}$, und mithin ist auch (2) gültig. □

Wir beweisen nun mit Hilfe des Sekantensatzes die Aussage

(11.30) **Erster Büschelsatz**. *Sind* k,l,m *drei verschiedene Kreise mit paarweise nichtleerem Durchschnitt, so liegen die durch*
$a\cap l=m\cap l\ \wedge\ b\cap m=k\cap m\ \wedge\ c\cap k=l\cap k$
festgelegten Geraden a,b,c *im Büschel (Figur 11.7 a), b), c)).*

Download free eBooks at bookboon.com

Beweis: Im Falle $a \parallel b \parallel c \vee |\{a,b,c\}| < 3$ ist nichts zu zeigen. Deshalb setzen wir $|\{a,b,c\}| = 3$ voraus und gehen (gegebenenfalls nach einer Umbenennung) davon aus, daß es ein $Z \in \mathbb{P}$ mit $a \cap b = Z$ gibt.
Für $\{A, A'\} := l \cap m$, $\{B, B'\} := m \cap k$ und $\{C, C'\} := k \cap l$ erhalten wir mit (8.13) die Beziehungen $\{A, A'\} = a \cap l = a \cap m$, $\{B, B'\} = b \cap m = b \cap k$ und $\{C, C'\} = c \cap k = c \cap l$ (Figur 11.7 a),c)). Wir gehen von $Z \notin k \cup l \cup m$ aus, denn im Falle $Z \in k \cup l \cup m$ führt $Z \in a \cap b$ auf $Z \in k \cap l \cap m \subseteq c$.
Ist nun $D \in k$ mit $\overline{<Z,C>} \cap k = \{C, D\}$, so ergibt sich mit (11.28) die Beziehung $(A-Z)\overline{(A'-Z)} = (B-Z)\overline{(B'-Z)} = (C-Z)\overline{(D-Z)}$, und nach (11.28) existiert dann ein $n \in \mathfrak{K}$ mit $a \cap n = \{A, A'\} \wedge <Z, C> \cap n = \{C, D\}$. Gemäß (8.2) ,(8.8) und (8.13) ist nun $n = l$ und $n \cap k = \{C, D\}$, also $D = C'$ und damit $<Z, C> = c$. □



Figur 11.7

Wir sagen, daß drei Kreise l_1, l_2, l_3 sich **büschelartig treffen**, wenn eine Gerade g mit $g \cap l_1 = g \cap l_2 = g \cap l_3 \neq \varnothing$ existiert.
Mit dieser Bezeichnung folgt unter Verwendung von (11.30):

(11.31) **Zweiter Büschelsatz**. *Sind sechs verschiedene Kreise $k_l, ..., k_6$ mit $k_1 \cap k_3 \cap k_5 = \varnothing$ und $k_2 \cap k_4 \cap k_6 \neq \varnothing$ vorgegeben, so gilt: Treffen sich k_l, k_2, k_3 und k_3, k_4, k_5 und k_5, k_6, k_1 jeweils büschelartig, so gilt dies auch für k_2, k_4, k_6 (Figur 11.7 d)).*

Beweis: Für $\mu, \nu \overset{\in}{\neq} \{1, ..., 6\}$ mit $k_\mu \cap k_\nu \neq \varnothing$ sei $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ die durch $g_{\mu\nu} \cap k_\mu = k_\mu \cap k_\nu = g_{\mu\nu} \cap k_\nu$ festgelegte Gerade (vgl. (8.13)).

Download free eBooks at bookboon.com

1) Es ist $|\{g_{13}, g_{35}, g_{51}\}| = 3$, denn sonst wäre $k_l \cap k_3 \cap k_5 \neq \varnothing$.
2) Nach (11.30), bezogen auf k_l, k_3, k_5 bzw. k_2, k_3, k_4 bzw. k_4, k_5, k_6, liegen g_{13}, g_{35}, g_{51} bzw. $g_{23}, g_{34}, \underline{g_{24}}$ bzw. $g_{45}, g_{56}, \underline{g_{46}}$ jeweils im Büschel. Voraussetzungsgemäß ist $g_{23} = g_{13} \wedge g_{34} = g_{35} = g_{45} \wedge g_{56} = g_{51}$, und nach 1) liegen $\underline{g_{24}}$ und $\underline{g_{46}}$ dann mit g_{13}, g_{35}, g_{51} im Büschel.
3) Wegen $(k_2 \cap k_4) \cap (k_4 \cap k_6) \neq \varnothing$ gibt es ein $A \in \underline{g_{24}} \cap \underline{g_{46}} \cap k_2 \cap k_4 \cap k_6$. Wäre $A \in g_{13} \cap g_{35}$, so wäre $A \in g_{13} \cap k_2 = k_1 \cap k_3 \wedge A \in g_{35} \cap k_4 = k_3 \cap k_5$ entgegen $k_l \cap k_3 \cap k_5 = \varnothing$. Demnach ist $A \notin g_{13} \cap g_{35}$, und da $\underline{g_{24}}, \underline{g_{46}}, g_{13}, g_{35}$ im Büschel liegen, folgt $\underline{g_{24}} = \underline{g_{46}}$. Mit (8.13) führt dies auf $\varnothing \neq \underline{g_{24}} \cap k_2 = k_2 \cap k_4 = \underline{g_{24}} \cap k_4 = \underline{g_{46}} \cap k_4 = k_4 \cap k_6 = \underline{g_{46}} \cap k_6 = \underline{g_{24}} \cap k_6$. □

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

J. Schwerpunkt und Eulergerade eines Dreiecks

Im folgenden sei $\{A, B, C\}$ ein Dreieck einer normalen euklidischen Ebene $\mathbb{E}$. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus (4.13).

(11.32) Nach (10.6)(4) sind die Seitenmitten von $\{A, B, C\}$ gegeben durch $M_a = (B+C)/2,\ M_b = (C+A)/2$ und $M_c = (A+B)/2$.

Die sogenannte **Hauptstreckung** $\boxed{\sigma : \mathbb{L} \to \mathbb{L} : X \to -2X+A+B+C}$ ist offenbar eine Dilatation, die (M_a, M_b, M_c) auf (A, B, C) abbildet. Wegen $\sigma \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ werden Kreise durch σ mittelpunktstreu auf Kreise abgebildet (vgl. (2.5)(5), (11.3), (11.15)).
Deshalb bildet σ den Mittelpunkt F des Feuerbachkreises $k(M_a, M_b, M_c)$ von $\{A, B, C\}$ auf den Mittelpunkt M des Umkreises von $\{A, B, C\}$ ab, der zugleich der Mittelsenkrechtenschnittpunkt von $\{A, B, C\}$ ist (vgl. (4.6)). Damit ist M aber auch der Höhenschnittpunkt von $\{M_a, M_b, M_c\}$, und dieser wird durch σ auf den Höhenschnittpunkt H von $\{A, B, C\}$ abgebildet, da σ orthogonalitätstreu ist. Es folgt $H-M = \sigma(M)-\sigma(F) = = -2M+2F$, also $(H+M)/2 = F$, und mithin gilt

(1) *F ist die Mitte von $\{H, M\}$.*

Nach (4.14) ist F auch die Mitte von $\{A^*, M_a\}$, $\{B^*, M_b\}$ und $\{C^*, M_c\}$, wobei A^*, B^*, C^* die oberen Höhenmitten von $\{A, B, C\}$ sind, d.h. die Punktspiegelung an F bildet (A^*, B^*, C^*, H) auf (M_a, M_b, M_c, M) ab. Demnach gilt

(2) *Die Vierecke (A^*, B^*, C^*, H) und (M_a, M_b, M_c, M) sind kongruent.*

Download free eBooks at bookboon.com

Im weiteren werden die Geraden $s_a{:=}<A, M_a>$, $s_b{:=}<B, M_b>$ und $s_c{:=}<C, M_c>$ als die **Seitenhalbierenden** von $\{A, B, C\}$ bezeichnet.

(11.33) Es sei **char** $\mathbb{K} = \mathbf{3}$, also $2 = -1$ und $-2 = 1$.

Dann ist $A+B+C \neq 0$, denn sonst wäre $2C = -C = A+B$ und damit $C = (A+B)/2 \in <A, B>$. Demnach gilt im Falle $char\,\mathbb{K} = 3$:

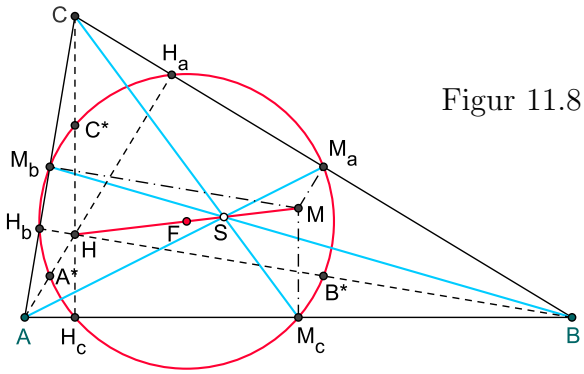
(1) *Die Hauptstreckung σ ist eine Translation $\neq id_{\mathbb{P}}$.*
(2) *Es ist $A-M_a = B-M_b = C-M_c = M-F = H-M \neq 0$.*
(3) *Die Geraden s_a, s_b, s_c und $<M, H>$ sind paarweise parallel.*

(11.34) Es sei **char** $\mathbb{K} \neq \mathbf{3}$, also $-2 \neq 1$.

Dann ist σ eine zentrische Streckung $\neq id_{\mathbb{P}}$ mit dem einzigen Fixpunkt $S := (A+B+C)/3$. Man bezeichnet S (aus physikalisch nachvollziebaren Gründen) als den **Schwerpunkt** des Dreiecks $\{A, B, C\}$.
Nach (9.2) sind die Fixgeraden von σ die Geraden durch den Punkt S, und deshalb führt (11.32) auf

(1) *Es ist $S = s_a \cap s_b \cap s_c$.*
(2) $\sigma(X)-S = -2(X-S) \quad \forall\ X \in \mathbb{L}$.

Wir zeigen nun



Figur 11.8

(11.35) **Satz über die Eulergerade.**

Ist $char\,\mathbb{K} \neq 3$ und ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck von $\mathbb{E}$, so gilt:

(1) Ist $\{A, B, C\}$ gleichseitig, so ist $M = H = S = F$.

(2) Ist $\{A, B, C\}$ nicht gleichseitig, so sind M, H, S, F vier verschiedene Punkte einer Geraden, der sog. **Eulergeraden**, *und es gilt $F = \frac{1}{2}(H+M)$ sowie $\frac{H-S}{M-S} = \frac{M-S}{F-S} = -2$ und $\frac{M-H}{F-H} = 2$.*

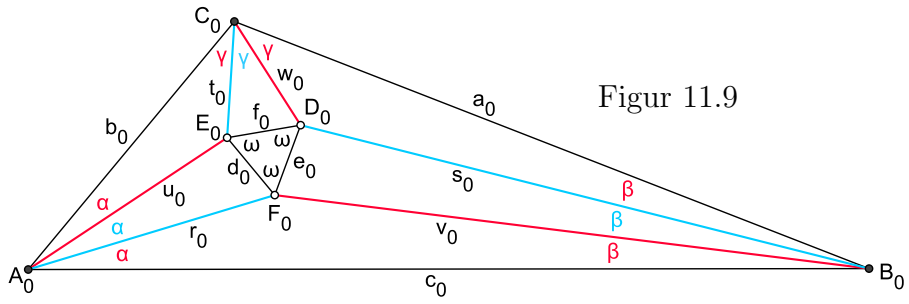
Beweis: Nach (11.34)(2) ist $M-S = -2(F-S)$ und $H-S = -2(M-S)$. Nach (11.32)(1) gilt $2F = H+M$ und damit $M-H = 2(F-H)$.

Download free eBooks at bookboon.com

Wegen $M = S - 2(F-S) \wedge H = S + 4(F-S)$ gilt entweder $F = S = M = H$ oder $M, H \in <F, S>$ mit $|\{M, H, F, S\}| = 4$. Hierbei ist $[H = M \Leftrightarrow A \in h_a = = m_{B,C} \wedge B \in h_b = m_{C,A} \Leftrightarrow \{A, B\} \equiv \{A, C\} \wedge \{B, C\} \equiv \{B, A\}]$. □

K. Ein Satz von Morley

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir einen bemerkenswerten Satz von MORLEY beweisen. Dazu sei $\mathbb{E}$ eine euklidische Ebene, und die Möglichkeit $char\,\mathbb{E} = 2$ sei zugelassen.
Wir vereinbaren, die Seitengeraden eines Dreiecks $\{X, Y, Z\}$ mit x, y, z zu bezeichnen, wobei $x = <Y, Z> \wedge y = <Z, X> \wedge z = <X, Y>$ ist.
Wir sagen, daß ein Dreieck $\{X, Y, Z\}$ in X einen **dreiteilbaren Winkel** besitzt, wenn in X ein sogenanntes **Dreiteilendenpaar** $(r, u) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G}$ mit $r \cap u = X \wedge (z, r) \simeq (r, u) \simeq (u, y)$ existiert. Für $\delta \in \mathbb{G}_0$ setzen wir $3{*}\delta := \delta \oplus \delta \oplus \delta$. Mit diesen Bezeichnungen folgt



Figur 11.9

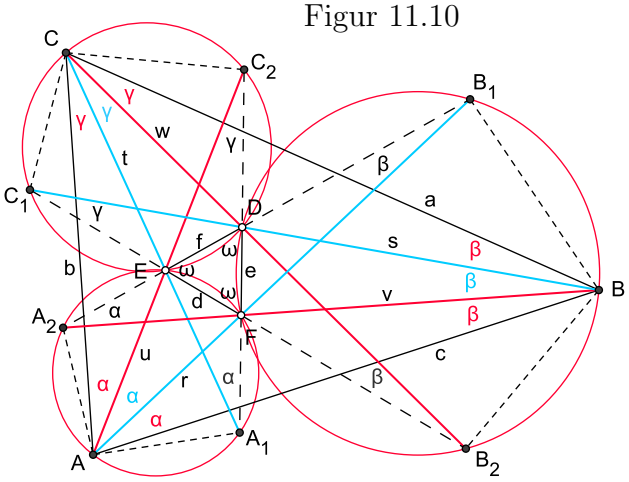
(11.36) **Satz von Morley**.
In $\mathbb{E}$ existiere ein gleichseitiges Dreieck $\{D, E, F\}$, und es sei $\omega := \measuredangle(f, e) := \measuredangle(e, d) := \measuredangle(d, f)$. Ist $\{A_0, B_0, C_0\}$ ein Dreieck, das in A_0 ein Dreiteilendenpaar (r_0, u_0) und in B_0 ein Dreiteilendenpaar (s_0, v_0) besitzt und ist $\alpha := \measuredangle(r_0, u_0)$ sowie $\beta := \measuredangle(s_0, v_0)$ und $\gamma := \omega \ominus \alpha \ominus \beta$, so gibt es in C_0 genau ein Dreiteilendenpaar (t_0, w_0) mit $\gamma = \measuredangle(t_0, w_0)$, und überdies existiert ein gleichseitiges Dreieck $\{D_0, E_0, F_0\}$ mit $D_0 = s_0 \cap w_0 \wedge E_0 = t_0 \cap u_0 \wedge F_0 = r_0 \cap v_0$ und mit $\measuredangle(a_0, d_0) = \beta \ominus \gamma \wedge \measuredangle(b_0, e_0) = \gamma \ominus \alpha \wedge \measuredangle(c_0, f_0) = \alpha \ominus \beta$.

Beweis: Wegen $3{*}\alpha = \measuredangle(c_0, b_0) \wedge 3{*}\beta = \measuredangle(a_0, c_0) \wedge 3{*}\gamma = \ominus 3{*}\alpha \ominus 3{*}\beta = = \measuredangle(b_0, a_0)$ gilt $(*)$ $\alpha, \beta, \gamma, \omega \ominus \alpha, \omega \ominus \beta, \omega \ominus \gamma \notin \{\mathbb{K}, \omega, \ominus\omega\}$ (vgl. (11.25)). Die Geraden t_0, w_0 sind durch $t_0, w_0 \ni C \wedge \measuredangle(b_0, t_0) = \gamma = \measuredangle(w_0, a_0)$ festgelegt. Wir führen den Beweis, indem wir ausgehend von $\{D, E, F\}$

Download free eBooks at bookboon.com

ein zu $\{A_0, B_0, C_0\}$ ähnliches Dreieck $\{A, B, C\}$ konstruieren, das alle gewünschten Bedingungen erfüllt und dessen Eigenschaften sich dann mit Hilfe einer gleichsinnigen Ähnlichkeit auf $\{A_0, B_0, C_0\}$ übertragen lassen. Dazu wählen wir Geraden $r, s, t, u, v, w \in \mathbb{G}$ (vgl. Axiom (W) und (8.11)(2)) mit $D \in s, w \wedge$ $\wedge E \in t, u \ \wedge \ F \in r, v \ \wedge$ $\wedge \ \measuredangle(e,t) = \alpha = \measuredangle(v,f)$ $\wedge \ \measuredangle(f,r) = \beta = \measuredangle(w,d)$ $\wedge \ \measuredangle(d,s) = \gamma = \measuredangle(u,e)$ (vgl. Figur 11.10).

Figur 11.10



Wir erhalten $\measuredangle(r,u) = \measuredangle(r,f) \oplus \measuredangle(f,e) \oplus \measuredangle(e,u)$ $= \omega \ominus \beta \ominus \gamma = \alpha$, und analog folgt $\measuredangle(s,v) = \beta$ und $\measuredangle(t,w) = \gamma$. Wir setzen $A := r \cap u$, $B := s \cap v$, $C := t \cap w$, $A_1 := e \cap t$, $A_2 := f \cap v$, $B_1 := f \cap r$,

JETZT BEWERBUNG AUFPOLIEREN.

Bereiten Sie sich optimal auf den Bewerbungsprozess vor und geben Sie Ihrem Profil den letzten Schliff. Nutzen Sie unsere Tipps, Persönlichkeitstests und kostenlosen E-Books zu Studium, Business und Karriere.

rwe.com/Bewerberakademie

VORWEG GEHEN

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

$B_2 := d \cap w$, $C_1 := d \cap s$ und $C_2 := e \cap u$. Wegen $(*)$ sind die Mengen $\{A, A_1, A_2, E, F\}$, $\{B, B_1, B_2, F, D\}$, $\{C, C_1, C_2, D, E\}$ jeweils fünfelementig, und nach (8.7) sind sie jeweils konzyklisch. Mit (8.7) folgt nun $\measuredangle(r, <A, A_2>) = \omega = \measuredangle(<B_1, B>, v)$, damit dann $B \in k(A_2, A, B_1)$ und schließlich $\measuredangle(c, r) = \measuredangle(v, f) = \alpha$ sowie $\measuredangle(v, c) = \measuredangle(f, r) = \beta$. Mit entsprechender Argumentation für die verbleibenden Fälle erkennt man jetzt, daß (r, u), (s, v), (t, w) Dreiteilendenpaare von $\{A, B, C\}$ sind.
Dann ist $\measuredangle(c, b) = \measuredangle(c, r) + \measuredangle(r, u) + \measuredangle(u, b) = \measuredangle(c_0, b_0)$ und analog auch $\measuredangle(b, a) = \measuredangle(b_0, a_0)$, und gemäß (10.9) existiert nun eine gleichsinnige Ähnlichkeit $\varphi \in \mathbb{Ä}^+$, welche die Objekte X, x unserer Konfiguration auf entsprechende Objekte X_0, x_0 der vorgegebenen Konfiguration abbildet. Da $\measuredangle(a_0, d_0) = \measuredangle(a, d) = \measuredangle(a, s) + \measuredangle(s, d) = \beta \ominus \gamma$ ist und da die restlichen Aussagen entsprechend folgen, ist (11.36) gültig. □

(11.37) *Anmerkungen.*
1) Das gleichseitige Dreieck $\{D_0, E_0, F_0\}$ aus (11.36) wird als ein **Morley-Dreieck** des Dreiecks $\{A_0, B_0, C_0\}$ bezeichnet.
2) Betrachtet man in (11.36) anstelle des Dreiecks $\{D, E, F\}$ das Dreieck $\{D', E', F'\}$ mit $(D', E', F') := (E, D, F)$ und setzt man $\gamma' := \ominus\omega \ominus \alpha \ominus \beta$, so ist $\gamma' \neq \gamma$ gemäß (11.25), und anstelle des Dreiteilendenpaares (t_0, w_0) ergibt sich ein neues Dreiteilendenpaar (t_0', w_0'), das mit (11.36) zu einem neuen MORLEY-Dreieck $\{D_0', E_0', F_0'\}$ führt.
3) Neben dem Dreiteilendenpaar (r_0, u_0) in (11.36) gibt es zur Ecke A_0 des Dreiecks $\{A_0, B_0, C_0\}$ zwei weitere Dreiteilendenpaare (r_1, u_1) und (r_2, u_2). Diese sind durch

$$A_0 \in r_1 \cap u_1 \cap r_2 \cap u_2 \ \wedge \ \measuredangle(r_1, u_1) = \alpha \oplus \omega \ \wedge \ \measuredangle(r_2, u_2) = \alpha \ominus \omega$$

festgelegt. Demnach hat man in A_0 und entsprechend in B_0 jeweils drei Dreiteilendenpaare, und eine Anwendung von (11.36) und 2) auf die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten dieser Dreiteilendenpaare liefert dann insgesamt 18 verschiedene gleichseitige MORLEY-Dreiecke zum Ausgangsdreieck $\{A_0, B_0, C_0\}$.
Eine genauere Analyse der Zusammenhänge zeigt, daß von den zu diesen 18 MORLEY-Dreiecken gehörigen 54 Ecken jeweils zwei zusammenfallen und daß die dadurch entstehenden 27 Punkte das Schnittgebilde von neun Geraden sind, die jeweils zu dreien parallel sind und die die sämtlichen Seitengeraden der 18 MORLEY-Dreiecke bilden (vgl. [12]).

Download free eBooks at bookboon.com

L. Aufgaben

Im folgenden sei $\mathbb{E} = (\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq) = \mathbb{E}(\mathbb{L}_{p,0}, \mathbb{K})$ (vgl. A 9.4.) eine normale euklidische Ebene. Man zeige:

A 11.1. Jede Ähnlichkeit, die keine Bewegung ist, besitzt genau einen Fixpunkt.

A 11.2. Ist $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, so ist Ä die Automorphismengruppe von $\mathbb{E}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$.

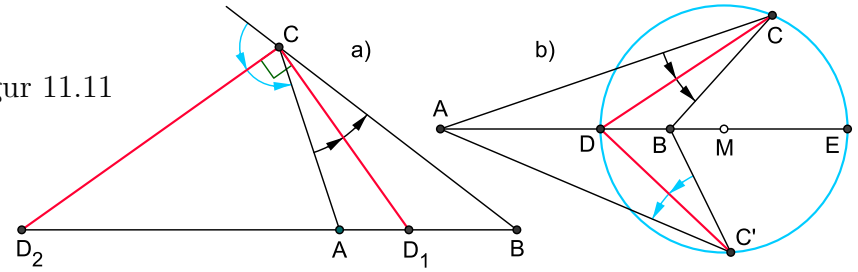
A 11.3. Die Geraden von $\mathbb{E}$ sind die Mengen der Form
$\{ (x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mid ax+by+c = 0 \}$ mit $a, b, c \in \mathbb{K} \wedge (a, b) \neq (0, 0)$.

A 11.4. Sind M, A zwei verschiedene Punkte, so läßt sich der Kreis $k_{M;A}$ um M durch A in der Form $k_{M;A} = \{X \in \mathbb{L} \mid N(X-M) = N(A-M)\}$ und in der Form $k_{M;A} = \{(x, y) \in \mathbb{K} \mid x^2-py^2+ax+by+c = 0\}$ mit $a, b, c \in \mathbb{K}$ darstellen. Man nennt $N(A-M)$ den **Normradius** von $k_{M;A}$.

A 11.5. **Winkelhalbierendensatz**. Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so gilt:
a) Ist $D \in <A, B> \backslash \{A, B\}$, so ist $<C, D>$ genau dann eine Winkelhalbierende von $\{A, B, C\}$ in C, wenn
$N(A-C)/N(B-C) = N(A-D)/N(B-D)$ ist (Figur 11.11 a)).
b) Treffen die Winkelhalbierenden von $\{A, B, C\}$ durch C die Gerade $<A, B>$ in D_1 bzw. D_2, so ist $(A-D_1)/(B-D_1) = -(A-D_2)/(B-D_2)$.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Figur 11.11



A 11.6. **Der Kreis des Apollonius**.
Sind A, B, D, E vier verschiedene kollineare Punkte mit
$\lambda := (A-D)/(B-D) \ \wedge \ -\lambda = (A-E)/(B-E)$,
so ist $\lambda^2 \neq 1$, und $k := \{X \in \mathbb{L} \,|\, N(A-X) = \lambda^2 \cdot N(B-X)\}$ ist der THALESkreis über $\{D, E\}$ mit dem Mittelpunkt $M = (A-\lambda^2 B)/(1-\lambda^2)$. Zugleich ist $k \backslash <A, B>$ die Menge aller Punkte $C \in \mathbb{L} \backslash <A, B>$ mit der Eigenschaft, daß $<C, D>$ den Winkel $\langle A, C, B\rangle$ halbiert (Figur 11.11 b)).

A 11.7. Ist $char\,\mathbb{E} \neq 3$, so ist der Schwerpunkt eines Dreiecks stets mit dem des zugehörigen Seitenmittendreiecks identisch.

A 11.8. Ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\{A, B, C\}$ und ist $H \notin \{A, B, C\}$, so ist A bzw. B bzw. C der Höhenschnittpunkt von $\{H, B, C\}$ bzw. $\{A, H, C\}$ bzw. $\{A, B, H\}$. Die FEUERBACH-Kreise von $\{A, B, C\}, \{H, B, C\}, \{A, H, C\}$ und $\{A, B, H\}$ sind identisch.

A 11.9. Ist $\{A, B, C\}$ ein nichtgleichseitiges Dreieck, so ist die EULER-Gerade von $\{A, B, C\}$ zugleich die EULER-Gerade von $\{M_a, M_b, M_c\}$.

A 11.10. Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck und sind W, W', W'' drei verschiedene Berührkreismittelpunkte (Figur 5.9), so ist der Umkreis von $\{A, B, C\}$ zugleich der FEUERBACH-Kreis von $\{W, W', W''\}$.

A 11.11. Spiegelt man den Höhenschnittpunkt an einer Seitengeraden eines Dreiecks, so liegt der Bildpunkt auf dem Umkreis des Dreiecks.

A 11.12. Ist $\{A, B, C\}$ ein nichtrechtwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H, so sind die Geraden $<H, A>, <H, B>, <H, C>$ Winkelhalbierende des Höhenfußpunktdreiecks $\{H_a, H_b, H_c\}$.

A 11.13. Die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks bilden, falls sie nicht kollinear sind, ein Parallelogramm, genannt VARIGNON-Parallelogramm.

A 11.14. **Pythagoreïsche Zahlentripel**. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q} \wedge p = -1$, also $\mathbb{L} := \mathbb{L}_{-1,0} \subset \mathbb{C}$. Ferner sei $k_E := \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ der sogenannte **Einheitskreis** von $\mathbb{E}(\mathbb{L}, \mathbb{Q})$.

Download free eBooks at bookboon.com

a) Man zeige, daß $k_E \backslash \{(0,1)\} = \{(\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}, \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}) \,|\, \lambda \in \mathbb{Q}\}$ ist. (Hinweis: Man bestimme $g_\lambda \cap k_E$, wobei $g_\lambda := \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \,|\, y = \lambda x - 1\}$ mit $\lambda \in \mathbb{Q}$ ist.)
b) Ein Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen ≥ 1 heißt **pythagoreïsch**, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ ist. Man zeige für $a,b,c \in \mathbb{N}^*$:
α) (a,b,c) ist genau dann pythagoreïsch, wenn $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) \in k_E$ ist.
β) Ist (a,b,c) pythagoreïsch, so ist a oder b eine gerade Zahl.
c) Unter Verwendung von a) und b) zeige man, daß

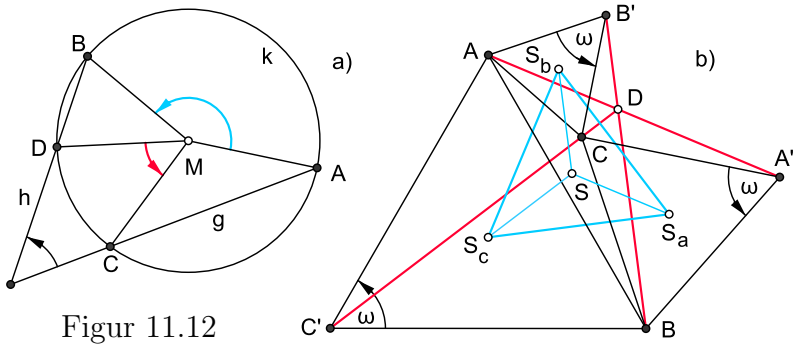
$$\{(2rst, (r^2-s^2)t, (r^2+s^2)t) \,|\, r,s,t \in \mathbb{N}^* \wedge s<r \wedge \ r,s \text{ teilerfremd}\}$$

die Menge aller pythagoreïschen Zahlentripel mit gerader erster Komponente ist. (Hinweis: Man verbinde a) mit b)α) und wähle $r,s,t,u \in \mathbb{N}^*$ mit $\lambda = r/s \wedge c/(r^2+s^2) = t/u$, wobei r,s bzw. t,u teilerfremd sind. Ein Widerspruchsbeweis zeigt dann: Keine Primzahl teilt u, d. h. es ist $u = 1$.)

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

A 11.15. **Erweiterter Mittenwinkelsatz**.
Ist k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und sind g, h Geraden und A, B, C, D Punkte mit $g \cap k = \{A, C\} \wedge h \cap k = \{B, D\}$, so ist
$\measuredangle(g,h) \oplus \measuredangle(g,h) = \measuredangle\langle A, M, B\rangle \ominus \langle D, M, C\rangle$ (Figur 11.12 a)).



Figur 11.12

A 11.16. **Satz von Fermat-Napoleon**.
In $\mathbb{E}$ existiere eine $\pm 60°$-Öffnung ω (vgl. (11.25)). Zu $A, B, C \overset{\in}{\neq} \mathbb{P}$ gibt es genau drei Punkte $A', B', C' \in \mathbb{P}$, so daß $\{C, A', B\}, \{B, C', A\}, \{A, B', C\}$ gleichseitige Dreiecke mit $\omega = \measuredangle\langle C, A', B\rangle = \measuredangle\langle B, C', A\rangle = \measuredangle\langle A, B', C\rangle$ sind. Die Schwerpunkte S_a, S_b, S_c dieser Dreiecke bilden, sofern sie nicht mit $S := (A+B+C)/3$ zusammenfallen, ein gleichseitiges Dreieck, dessen Schwerpunkt gerade S ist, und die Umkreise dieser Dreiecke haben einen sogenannten FERMAT-Punkt D gemeinsam.
Es ist $3\cdot(S_a - S) = A' - A \wedge 3\cdot(S_b - S) = B' - B \wedge 3\cdot(S_c - S) = C' - C$.
Im Falle $A = A'$ ist $(A, B, C) = (A', B', C')$ ein gleichseitiges Dreieck.
Im Falle $A \neq A'$ gilt $B \neq B' \wedge C \neq C' \wedge \{A', A\} \equiv \{B', B\} \equiv \{C', C\}$ sowie

Download free eBooks at bookboon.com

$<A, A' \parallel <S, S_a>$, $<B, B'> \parallel <S, S_b>$, $<C, C'> \parallel <S, S_c>$, und je zwei der Geraden $<A, A'>, <B, B'>, <C, C'>$ bilden einen $\pm 60°$-Winkel mit D als Scheitel (Figur 11.12 b)).

A 11.17. Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, das einen Berührkreis k besitzt (vgl. (5.29)) und ist $A' := k \cap <B, C> \wedge B' := k \cap <C, A> \wedge C' := k \cap <A, B>$, so liegen die Geraden $<A, A'>, <B, B'>, <C, C'>$ im Büschel. Wenn ein Schnittpunkt existiert, dann wird dieser als der GERGONNE-Punkt von k bzgl. $\{A, B, C\}$ bezeichnet. (Hinweis: Man verwende (5.27) und (10.13).)

A 11.18. Gegeben seien Kreise k, l, m und Punkte $P, A, B, C \overset{\in}{\neq} \mathbb{P}$ mit $k \cap l = \{P, A\} \wedge l \cap m = \{P, B\} \wedge m \cap k = \{P, C\}$. Wenn k, l, m den gleichen Normradius s haben, dann liegen A, B, C auf einem Kreis n mit Normradius s.

A 11.19. Sind $A, B, B', C, C' \overset{\in}{\neq} \mathbb{P}$ und sind die Tripel (A, B, C), (A, B', C') gleichsinnig ähnlich, so sind auch die Tripel (A, B, B'), (A, C, C') gleichsinnig ähnlich.

A 11.20. **Relation von Stewart**.
Sind A, B, C drei verschiedene kollineare Punkte, so ist

$$\frac{N(X-A)}{(B-A)\cdot\overline{(C-A)}} + \frac{N(X-B)}{(C-B)\cdot\overline{(A-B)}} + \frac{N(X-C)}{(A-C)\cdot\overline{(B-C)}} = 1 \quad \forall\, X \in \mathbb{P}.$$

A 11.21. Ist (A, B, C, D) ein Rechteck, so ist

$$N(X-A) + N(X-C) = N(X-B) + N(X-D) \quad \forall\, X \in \mathbb{P}.$$

A 11.22. $\{A, B, C\}$ sei ein Dreieck, und es sei $A' \in <B, C>$, $B' \in <C, A>$, $C' \in <A, B>$, $l_A := (A' \perp <B, C>)$, $l_B := (B' \perp <C, A>)$, $l_C := (C' \perp <A, B>)$. Genau dann sind l_A, l_B, l_C kopunktal, wenn die Bedingung

$$N(A-B')+N(B-C')+N(C-A') = N(A-C')+N(B-A')+N(C-B')$$

erfüllt ist.

A 11.23. Zwei Kreise mit gleichem Mittelpunkt sind entweder identisch oder disjunkt. Zwei Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten sind stets verschieden.

A 11.24. Ist $|\mathbb{K}| = n \in \mathbb{N}$, so gilt auch im Falle $char\mathbb{K} = 2$:
a) Es ist $|\mathbb{L}^*| = n^2-1$ und $|k| = n+1 \quad \forall\, k \in \mathfrak{K}$ (vgl. A 9.5.).
b) Es gibt genau $n-1$ Kreise mit Mittelpunkt 0.
c) Es ist $N(\mathbb{L}) = \mathbb{K}$.
d) Es ist $|\mathfrak{K}| = n^3-n^2$.

Download free eBooks at bookboon.com

Teil III

KLASSISCHE EUKLIDISCHE EBENEN

12 Anordnung und Metrik

Die vorangegangenen Paragraphen zeigen, daß man weite Bereiche der euklidischen Geometrie behandeln kann, ohne etwas über Inneres und Äußeres von Figuren zu wissen, ohne also auf „Anordnung“ einzugehen.

Im folgenden sollen diese Begriffsbildungen aber nun eingeführt werden, und insbesondere soll dargelegt werden, wie sich das für die normalen euklidischen Ebenen angegebene Axiomensystem zu einem vollständigen Axiomensystem der Anschauungsebene ausbauen läßt (vgl. [8], [17], [42]).

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

A. Die Anschauungsebene

(12.1) Im Paragraphen 2 haben wir unter Berücksichtigung unserer mathematisch-physikalischen Vorstellungen den Begriff der normalen euklidischen Ebene entwickelt, um damit Grundtatsachen der anschaulichen ebenen Geometrie zu erfassen. Um jetzt zu einer vollständigen Beschreibung der Anschauungsebene zu gelangen, fassen wir die Erörterungen aus §2 zusammen und ergänzen diese dann geeignet:

Wir betrachten also eine Menge $\mathbb{P}$ mit $|\mathbb{P}| \geq 2$, auch Menge der **Punkte** genannt, und denken uns auf dem System $\mathbb{P}_2 := \{\, \{A, B\} \mid A, B \subsetneq \mathbb{P}\}$ aller zweielementigen Teilmengen von $\mathbb{P}$ eine abstrakte Äquivalenzrelation $\equiv$ gegeben, die im weiteren auch als **Kongruenzrelation** bezeichnet wird.

Um eine anschaulich einleuchtende Formulierung der Axiome zu erhalten, geben wir zunächst einige Definitionen an:

(D1) Sind $A, B \subsetneq \mathbb{P}$, so wird die Menge $m_{A,B} := \{X \in \mathbb{P} \mid \{A, X\} \equiv \{X, B\}\}$ als **Symmetrieachse** oder **Mittelsenkrechte** von $\{A, B\}$ oder einfach als **Gerade** bezeichnet. Es sei $\mathbb{G}$ die Menge aller so definierten Geraden.

(D2) Sind $M, R \subsetneq \mathbb{P}$, so wird die Menge $k_{M;R} := \{X \in \mathbb{P} \mid \{M, X\} \equiv \{M, R\}\}$ der **Kreis** um M durch R mit M als **Mittelpunkt** genannt. Es sei $\mathfrak{K}$ die Menge aller so definierten Kreise.

(D3) Punkte $A, B, C, \ldots \in \mathbb{P}$ heißen genau dann **kollinear**, wenn es ein $g \in \mathbb{G}$ mit $g \ni A, B, C, \ldots$ gibt.
Zwei Geraden $g, h \in \mathbb{G}$ werden genau dann als **parallel** bezeichnet, in Zeichen: $g \parallel h$, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben oder wenn sie gleich sind. Die Negation von $g \parallel h$ notieren wir als $g \nparallel h$.
Sind A, B, C, D nichtkollineare Punkte und gibt es Geraden $g, h, k, l \in \mathbb{G}$ mit $A \in g \cap h \ \wedge\ B \in h \cap k \ \wedge\ C \in k \cap l \ \wedge\ D \in l \cap g \ \wedge\ g \parallel k \ \wedge\ h \parallel l$, so heißt (A, B, C, D) ein **Parallelogramm**, in Zeichen: $\#(A, B, C, D)$.
(D4) Ist g eine Gerade und ist k ein Kreis, so wird g genau dann eine **Tangente** von k genannt, wenn $|g \cap k| = 1$ ist.
Ist k ein Kreis und ist X ein Punkt, so heißt X genau dann ein **innerer Punkt** von k, wenn X keiner Tangente von k angehört.
Ist k ein Kreis, so wird die Vereinigung von k mit der Menge aller inneren Punkte von k als **Kreisscheibe** $\overline{k}$ bezeichnet. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Kreisscheiben heißt **konzentrisch**, wenn es einen Punkt $M \in \mathbb{P}$ und eine nichtleere Teilmenge $\mathfrak{R}$ von $\mathbb{P} \setminus \{M\}$ gibt mit $\mathfrak{M} = \{\, \overline{k_{M;R}} \mid R \in \mathfrak{R}\}$.

Download free eBooks at bookboon.com

Unter Verwendung dieser Definitionen setzen wir fest:

Die **Anschauungsebene** ist ein Paar $(\mathbb{P}, \equiv)$, bestehend aus einer wenigstens zweielementigen Menge $\mathbb{P}$ und einer auf $\mathbb{P}_2$ erklärten Äquivalenzrelation $\equiv$ („*kongruent*"), so daß die folgenden sechs Axiome erfüllt sind:

(V) **Verbindungsaxiom**. Sind A, B zwei verschiedene Punkte, so gibt es genau eine Gerade g mit $g \ni A, B$.

(P) **Parallelenaxiom**. Ist A ein Punkt und ist g eine Gerade mit $g \not\ni A$, so gibt es genau eine Gerade h mit $h \ni A$ und $h \cap g = \varnothing$.

(K) **Kongruenzaxiom**. Ist (A,B,C,D) ein Parallelogramm, so ist $\{A, B\} \equiv \{C, D\}$.

(Z) **Zirkelaxiom**. Sind M, A zwei verschiedene Punkte einer Geraden g, so trifft der Kreis $k_{M;A}$ die Gerade g in genau zwei Punkten.

(A) **Anordnungsaxiom**. Jede Gerade durch einen inneren Punkt eines Kreises trifft diesen Kreis.

(S) **Vollständigkeitsaxiom**. Der Durchschnitt einer Menge konzentrischer Kreisscheiben ist stets eine Kreisscheibe oder einelementig.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

(12.2) Wir wissen bereits, daß $(\mathbb{P}, \equiv)$ unter den genannten Grundvoraussetzungen genau dann eine normale euklidische Ebene ist, wenn die Axiome (V), (P), (K) und (Z) erfüllt sind. Nach der hier gegebenen Definition ist die Anschauungsebene also eine normale euklidische Ebene, in der zusätzlich die Axiome (A) und (S) gelten.

Wir werden zeigen, daß es bis auf Isomorphie, also bis auf die Möglichkeit der Existenz isomorpher Modelle, nur *ein* Modell der Anschauungsebene gibt. Entscheidend für diese Eindeutigkeit ist das Vollständigkeitsaxiom (S), das, wie wir zeigen werden, dem Prinzip der unteren Grenze im Bereich der positiven reellen Zahlen entspricht.

Dieses Axiom wird erst dann benötigt, wenn die Grenzwerttheorie der Analysis verwendet werden soll. Um zu berücksichtigen, daß sich weite Bereiche der euklidischen Geometrie selbst bei Einbeziehung von Anordnung ohne Hilfsmittel der Analysis entwickeln lassen, legen wir fest:

Ein Paar $(\mathbb{P}, \equiv)$, bestehend aus einer Menge $\mathbb{P}$ mit $|\mathbb{P}| \geq 2$ und einer auf $\mathbb{P}_2$ erklärten Äquivalenzrelation $\equiv$ heißt **klassische euklidische Ebene**, wenn die fünf Axiome (V), (P), (K), (Z) und (A) gelten. Wenn zusätzlich noch das Axiom (S) erfüllt ist, dann ist $(\mathbb{P}, \equiv)$ die Anschauungsebene; diese wird auch als **vollständige euklidische Ebene** bezeichnet.

Demnach ist eine klassische euklidische Ebene eine normale euklidische Ebene, in der zusätzlich das Axiom (A) gilt, und alles, was für klassische euklidische Ebenen gezeigt wird, ist insbesondere auch in der Anschauungsebene gültig.

Sind $(\mathbb{P}, \equiv)$ und $(\mathbb{P}', \equiv')$ zwei normale euklidische Ebenen und ist φ ein Isomorphismus von $(\mathbb{P}, \equiv)$ auf $(\mathbb{P}', \equiv')$ im Sinne von (2.5), so bilden φ und φ^{-1} offenbar Tangenten bzw. innere Punkte eines Kreises auf Tangenten bzw. innere Punkte eines Kreises ab, und deshalb bilden sie auch stets Kreisscheiben auf Kreisscheiben ab.
Dies bedeutet nun, daß $(\mathbb{P}, \equiv)$ im Falle $(\mathbb{P}, \equiv) \cong (\mathbb{P}', \equiv')$ genau dann klassisch bzw. vollständig ist, wenn dies für $(\mathbb{P}', \equiv')$ zutrifft.

B. Euklidische Körper

Der Koordinatenkörper einer klassischen euklidischen Ebene steht in vieler Hinsicht den reellen Zahlen nahe, wie wir sehen werden.
Um dies genau zu erörtern, verwenden wir die folgende Begriffsbildung:

Download free eBooks at bookboon.com

(12.3) Ein Körper $\mathbb{K}(+,\cdot)$ heißt **euklidischer Körper**, wenn für die Menge $\mathbb{K}^{(2)} := \{\, x^2 \mid x \in \mathbb{K} \,\}$ aller Quadrate von $\mathbb{K}$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(E1) *Es gilt* $x + y \in \mathbb{K}^{(2)} \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{K}^{(2)}$.

(E2) *Ist* $x \in \mathbb{K}^* := \mathbb{K}\backslash\{0\}$, *so gilt entweder* $x \in \mathbb{K}^{(2)}$ *oder* $-x \in \mathbb{K}^{(2)}$.

Da die angegebenen Eigenschaften (E1) und (E2) durch Isomorphismen offenbar übertragen werden, ist jedes isomorphe Bild eines euklidischen Körpers ein euklidischer Körper.
Während $\mathbb{R}$ ein euklidischer Körper ist, sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$ keine euklidischen Körper, wie man anhand bekannter Eigenschaften erkennt.

Ein von $\mathbb{R}$ verschiedenes Beispiel eines euklidischen Körpers erhält man, wenn man die Menge $\widehat{\mathbb{Q}}$ aller algebraischen reellen Zahlen bildet. Dazu merken wir an: Eine reelle Zahl α liegt definitionsgemäß genau dann in $\widehat{\mathbb{Q}}$, wenn man zur Zahl α ein $r \in \mathbb{N}^*$ und Elemente $a_0, ..., a_r \in \mathbb{Q}$ mit $a_r = 1 \wedge \sum_{\nu=0}^{r} a_\nu \alpha^\nu = 0$ finden kann. Beispielsweise ist $\sqrt[r]{a} \in \widehat{\mathbb{Q}} \;\; \forall\, a \in \mathbb{Q}_+, \forall\, r \in \mathbb{N}^*$, denn es ist $-a + (\sqrt[r]{a})^r = 0$, und wegen $-b + b\,1 = 0 \;\; \forall\, b \in \mathbb{Q}$ ist $\mathbb{Q} \subset \widehat{\mathbb{Q}}$. Ist $\alpha \in \widehat{\mathbb{Q}}$ mit $\alpha > 0$ und hat α die obige Darstellung, so ist $\sum_{\nu=0}^{r} a_\nu (\sqrt{\alpha})^{2\nu} = 0$, d. h. es ist $\sqrt{\alpha} \in \widehat{\mathbb{Q}}$.

In der Algebra wird bewiesen, daß $\widehat{\mathbb{Q}}(+,\cdot)$ ein abzählbarer und damit echter Teilkörper von $\mathbb{R}(+,\cdot)$ ist und daß $\widehat{\mathbb{Q}}(+,\cdot)$ euklidisch ist.
(Die Elemente der überabzählbaren Menge $\mathbb{R}\backslash\widehat{\mathbb{Q}}$ sind die sogenannten *transzendenten* reellen Zahlen, zu denen z. B. die Kreiszahl π und die EULERsche Zahl e gehören.)

Der Durchschnitt $[\mathbb{Q}]$ aller euklidischen Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist ebenfalls ein euklidischer Körper. Er ist eine echte Teilmenge von $\widehat{\mathbb{Q}}$ und besteht aus denjenigen reellen Zahlen, die sich ausgehend von $0, 1$ in $\mathbb{C}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen.

Eine Fülle von Beispielen euklidischer Körper liefert die in der Algebra behandelte *Theorie der formal-reellen Körper* (vgl. [44]). Hier werden unter anderem die reell abgeschlossenen Körper betrachtet, welche sämtlich euklidische Körper sind. Die Theorie zeigt, daß es zu jedem euklidischen Körper $\mathbb{K}$ einen euklidischen Erweiterungskörper $\mathbb{K}'$ mit $\mathbb{K} \ncong \mathbb{K}'$ gibt, daß $\mathbb{R}$ unendlich viele nichtisomorphe abzählbare euklidische Teilkörper enthält und daß es unendlich viele nichtisomorphe euklidische Körper gibt, die zu keinem Teilkörper von $\mathbb{R}$ isomorph sind.

Download free eBooks at bookboon.com

In der folgenden Aussage sind einige Eigenschaften euklidischer Körper zusammengestellt, die wir im weiteren benutzen werden:

(12.4) **Satz**. *Ist* $\mathbb{K}(+,\cdot)$ *ein euklidischer Körper, so gelten die folgenden Aussagen:*

(1) Setzen wir $x \le y :\Leftrightarrow y \ge x :\Leftrightarrow y-x \in \mathbb{K}^{(2)}$, *so ist* $\mathbb{K}(\le)$ *eine Kette, d. h. es gilt* $x \le x \wedge (x \le y \vee y \le x) \wedge (x \le y \wedge y \le x \Rightarrow x = y)$ $\wedge\, (x \le y \wedge y \le z \Rightarrow x \le z) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{K}$.

(2) $\mathbb{K}(+,\cdot,\le)$ *ist ein angeordneter Körper mit* $\mathbb{K}_+ := \{x \in \mathbb{K} \mid 0 \le x\} = \mathbb{K}^{(2)}$, *d. h. mit* $x < y :\Leftrightarrow y > x :\Leftrightarrow (x \le y \wedge x \ne y)$ *ergibt sich* $(0 < x \wedge 0 < y \Rightarrow 0 < x+y \wedge 0 < x\cdot y) \wedge (x < y \Rightarrow x+z < y+z)$ $\wedge\, (x < y \wedge 0 < z \Rightarrow x\cdot z < y\cdot z) \wedge (x < y \wedge z < 0 \Rightarrow x\cdot z > y\cdot z)$ $\wedge\, (0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{K}$.

(3) Es ist $char\,\mathbb{K} = 0$, *und* $\mathbb{K}$ *enthält einen zu* $\mathbb{Q}$ *algebraisch und anordnungsmäßig isomorphen Teilkörper. Diesen denken wir uns im weiteren mit* $\mathbb{Q}$ *identifiziert, d. h. wir gehen von* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ *aus.*
Die Ordnungsrelation $\le$ *von* $\mathbb{K}$ *ist auf* $\mathbb{Q}$ *mit der natürlichen Anordnung von* $\mathbb{Q}$ *identisch.*

Beweis: (1) Die ersten drei Aussagen ergeben sich aus $0 \in \mathbb{K}^{(2)}$ und aus (E2). Die Transitivität folgt mit (E1) aus $z-x = (z-y)+(y-x) \ge 0$.
(2) Offenbar ist $\mathbb{K}_+ = \mathbb{K}^{(2)}$. Sind $x,y \in \mathbb{K}^{(2)}\backslash\{0\}$, so ist $x \ne -y$ gemäß (E2), und mit (E1) folgt $x+y > 0$. Zu $x,y \in \mathbb{K}^{(2)}\backslash\{0\}$ gibt es $u,v \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ mit $u^2 = x \wedge v^2 = y$, und dann ist $x\cdot y = (uv)^2 \in \mathbb{K}^{(2)}\backslash\{0\}$.
Für $x,y,z \in \mathbb{K}$ mit $x < y$ führt $(y+z)-(x+z) = y-x > 0$ auf $x+z < y+z$, und im Falle $z > 0$ ist $x(-z)-y(-z) = yz-xz = (y-x)z > 0$, also $xz < yz$ und $x(-z) > y(-z)$. Sind $x,y \in \mathbb{K}$ mit $0 < x < y$, so gilt $0 < y\cdot(y^{-1})^2 = y^{-1}$ $\wedge\; x^{-1}-y^{-1} = (y-x)(xy)^{-1} = (y-x)\cdot xy\cdot((xy)^{-1})^2 > 0$, also $0 < y^{-1} < x^{-1}$.
(3) Bezeichnen wir das Einselement von $\mathbb{K}$ der Deutlichkeit halber mit $1_{\mathbb{K}}$, so führt $(1_{\mathbb{K}})^2 = 1_{\mathbb{K}}$ auf $0 < 1_{\mathbb{K}}$, und aus $0 < n\cdot 1_{\mathbb{K}}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ folgt $1_{\mathbb{K}} < n\cdot 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}$, also $0 < (n+1)\cdot 1_{\mathbb{K}}$, d. h. es ist $0 < n \cdot 1_{\mathbb{K}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ und damit $char\,\mathbb{K} = 0$.
Weiter kann man nun durch vollständige Induktion bestätigen, daß $\sigma : \mathbb{Z}(+,\cdot) \to \mathbb{K}(+,\cdot)$ mit $\sigma(n) = n \cdot 1_{\mathbb{K}} \wedge \sigma(-n) = -(n \cdot 1_{\mathbb{K}}) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ ein ordnungstreuer injektiver Ringhomomorphismus ist, und es zeigt sich, daß $\tau : \mathbb{Q}(+,\cdot,\le) \to \mathbb{K}(+,\cdot,\le)$ mit $\tau(m\cdot n^{-1}) := (m\cdot 1_{\mathbb{K}})\cdot(n\cdot 1_{\mathbb{K}})^{-1}$ für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ eine wohldefinierte ordnungstreue Fortsetzung von σ zu einem Körpermonomorphismus von $\mathbb{Q}(+,\cdot,\le)$ in $\mathbb{K}(+,\cdot,\le)$ ist. $\square$

Download free eBooks at bookboon.com

(12.5) Die euklidischen Körper zeichnen sich vor anderen Körpern insbesondere dadurch aus, daß in ihnen das **Quadratwurzelziehen** in vernünftiger Weise erklärt werden kann.
Ist nämlich $\mathbb{K}(+,\cdot)$ euklidisch und ist $x \in \mathbb{K}^{(2)} \setminus \{0\} =: \mathbb{K}_+^*$, so gibt es nach der Definition von $\mathbb{K}^{(2)}$ ein $u \in \mathbb{K}^*$ mit $u^2 = x$, und zugleich ist dann auch $(-u)^2 = x$. Da nach (E2) aber entweder $u \in \mathbb{K}_+^*$ oder $-u \in \mathbb{K}_+^*$ gilt und da $u^2 = v^2$ auf $(u-v)(u+v) = 0$, also auf $v \in \{u, -u\}$ führt, gibt es genau ein v in $\mathbb{K}_+^*$ mit $v^2 = x$. Dieses v wird mit $\sqrt{x}$ bezeichnet.
Setzen wir noch $\sqrt{0} := 0$, so ist nun jedem Element x aus $\mathbb{K}_+ = \mathbb{K}^{(2)}$ ein eindeutig bestimmtes Element $\sqrt{x} \in \mathbb{K}_+$ mit $(\sqrt{x})^2 = x$ zugeordnet, und man bestätigt sofort die Beziehung

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

(1) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{K}_+$.

Für $a, b \in \mathbb{K}_+$ gilt $(a < b \Rightarrow aa \leq ab < bb) \wedge (b < a \Rightarrow bb \leq ba < aa)$, also

(2) $a < b \;\Leftrightarrow\; a^2 < b^2 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{K}_+$

und damit auch

(3) $\sqrt{a} < \sqrt{b} \;\Leftrightarrow\; a < b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{K}_+$,

d. h. Quadrieren und Wurzelziehen sind monotone Funktionen auf $\mathbb{K}_+$.

C. Darstellung klassischer euklidischer Ebenen

Im folgenden sei $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\mathbb{L}(+,\cdot), \mathbb{K}) = (\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq)$ eine euklidische Ebene. Als Erweiterung von (11.14) zeigen wir

(12.6) **Hauptsatz** *über die algebraische Darstellung klassischer euklidischer Ebenen.*

(1) Die euklidische Ebene $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\mathbb{L}(+,\cdot), \mathbb{K})$ ist genau dann klassisch, wenn $\mathbb{K}(+,\cdot)$ ein euklidischer Körper ist.

(2) Ist $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\mathbb{L}(+,\cdot), \mathbb{K})$ klassisch, so ist $\mathbb{L}(+,\cdot) \cong \mathbb{L}_{-1,0}(\mathbb{K})(+,\cdot)$, und es gilt $N(\mathbb{L}) = \mathbb{K}^{(2)}$.

(3) Ist $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\mathbb{L}(+,\cdot), \mathbb{K})$ klassisch und sind $M, A \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$, so ist

$$k^{\circ}_{M;A} := \{X \in \mathbb{P} \mid N(X-M) < N(A-M)\}$$

die Menge der inneren Punkte des Kreises $k_{M;A}$.

Beweis: I) $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\mathbb{L}(+,\cdot), \mathbb{K})$ sei eine klassische euklidische Ebene. Dann ist $\mathbb{E}$ eine normale euklidische Ebene, und nach (11.14) ist $char\, \mathbb{K} \neq 2$.
a) Sind $M, A \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$, so führt Axiom (Z) auf $|{<}X, M{>} \cap k_{M;A}| = 2 \;\forall X \in k_{M;A}$, d.h. M ist ein innerer Punkt von $k_{M;A}$.

Download free eBooks at bookboon.com

b) Für $g := (0 \perp \mathbb{K})$ gilt $g \neq \mathbb{K} \wedge \kappa_{\mathbb{L}}(g) = g$, und nach a) und Axiom (A) gibt es ein $i \in g \cap k_{0;1}$. Es folgt $N(i) = 1 \wedge g \cap k_{0;1} = \{i, -i\} \wedge \bar{i} = -i$, also $i^2 = -1$, d.h. bei dieser Wahl von i, bei der wir im weiteren bleiben, ist $\mathbb{L}(+,\cdot) = \mathbb{L}_{-1,0}(\mathbb{K})(+,\cdot)$ (vgl. (9.27), (9.28)).

c) Sind $x, y \in \mathbb{K}$ und ist $A := x+iy \neq 0$, so gibt es nach a) ein $r \in \mathbb{K} \cap k_{0;A}$, und dann ist $x^2+y^2 = N(x+iy) = N(A) = N(r) = r^2$ (vgl. (11.9)).

d) Es sei $u \in \mathbb{K}\backslash\{0,1\}$, und es sei k der Thaleskreis $k_{Th}\{u,1\}$ (vgl.(4.10)). Wenn $g := (0 \perp \mathbb{K})$ den Kreis k in einem Punkt iv mit $v \in \mathbb{K}$ trifft, dann führen (4.10) und (11.27)(1) auf $(u-0)\cdot\overline{(0-1)} = N(iv-0)$, d.h. es ist $-u = v^2$. Wenn g den Kreis k nicht trifft, dann liegt 0 nicht im Inneren von k, und dann gibt es einen Punkt $A \in k$, so daß $<0, A>$ eine Tangente von k ist. Mit (11.28) folgt jetzt $(A-0)\overline{(A-0)} = (u-0)\overline{(1-0)}$ und damit $u = N(A) \in \mathbb{K}^{(2)}$ gemäß c). Demnach gilt $u \in \mathbb{K}^{(2)} \vee -u \in \mathbb{K}^{(2)}$.

e) $\mathbb{K}(+,\cdot)$ ist ein euklidischer Körper, denn gemäß c) ist (E1) gültig, und aus d) folgt (E2), denn wenn $u \in \mathbb{K}$ ist mit $u = r^2 \wedge -u = s^2$ für gewisse $r, s \in \mathbb{K}$, so folgt $N(r+is) = r^2+s^2 = 0$, also $u = r = s = 0$ gemäß (11.10)(5). Aus b), c) und $[N(\sqrt{u}) = u \,\forall\, u \in \mathbb{K}^{(2)}]$ ergibt sich Aussage (2).

II) Vorausgesetzt sei jetzt, daß $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\mathbb{L}(+,\cdot), \mathbb{K})$ eine euklidische Ebene mit euklidischem Koordinatenkörper $\mathbb{K}(+,\cdot,\leq)$ ist. Dann ist $\mathbb{E}$ wegen $char\,\mathbb{K} = 0$ gemäß (11.14) eine normale euklidische Ebene.

a) Es sei $g := (0 \perp \mathbb{K})$. Dann ist $g \neq \mathbb{K} \wedge g \oplus g = \mathbb{K}$, und zu $i_0 \in g\backslash\{0\}$ gibt es ein $p \in \mathbb{K}$ mit $i_0^2 = p$ (vgl. (11.22)(5)). Nach (9.27)(7) ist $p \notin \mathbb{K}^{(2)}$, und somit gibt es ein $r \in \mathbb{K}^*$ mit $r^2 = -p$. Für $i := i_0/r$ folgt nun $i^2 = -1$, d.h. wir dürfen uns $\mathbb{L}(+,\cdot)$ in der Form $\mathbb{L}_{-1,0}(\mathbb{K})(+,\cdot)$ gegeben denken.

b) Für $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $N(x+iy) = x^2+y^2 \in \mathbb{K}^{(2)}$, d.h. es ist $N(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{K}^{(2)}$.

c) Es seien $M, A \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$, $k := k_{M;A}$ und $X \in \mathbb{L}$. Wegen b) gibt es $r, d \in \mathbb{K}_+$ mit $r^2 = N(A-M)$ und $d^2 = N(X-M)$. α) Es sei $r^2 < d^2$. Dann gibt es ein $s \in \mathbb{K}_+$ mit $r^2+s^2 = d^2$, und für $Y := X+(M-X)\cdot(s+ir)\cdot s/d^2$ folgt $N(Y-X) = s^2 \wedge N(Y-M) = r^2$, wie man durch Nachrechnen bestätigt. Dann ist $Y \in k$, und mit (11.26) folgt $<X,Y> \perp <Y,M>$, d.h. $<X,Y>$ ist eine Tangente von k, und X ist kein innerer Punkt von k.

β) Es sei $d^2 < r^2$, und es sei $h \in \mathbb{G}$ mit $h \ni X$. Ist B der Fußpunkt des Lotes von M auf h, so führt (11.26) auf $N(B-M) \leq d^2 < r^2$. Ist nun $h = B+\mathbb{K}C$ mit $C \in \mathbb{L}^*$, so hat die Gleichung $N((B+\lambda C)-M) = r^2$ für $\lambda \in \mathbb{K}$ wegen $N(B-M+\lambda C) \overset{(11.26)}{=} N(B-M)+\lambda^2 N(C)$ genau zwei Lösungen, d.h. es ist $|h \cap k| = 2$. γ) Aus α), β) und I) folgen die Aussagen (1) und (3). $\square$

Download free eBooks at bookboon.com

(12.7) **Corollar 1**. *Ist $\mathbb{K}(+,\cdot)$ ein euklidischer Körper, so gibt es bis auf Isomorphie genau eine klassische euklidische Ebene mit $\mathbb{K}(+,\cdot)$ als Koordinatenkörper, nämlich $\mathbb{E}(\mathbb{L}_{-1,0}(\mathbb{K}),\mathbb{K})$.*

Beweis: Wegen $-1 \neq x^2 \ \forall\, x \in \mathbb{K}$ ist $\mathbb{E}(\mathbb{L}_{-1,0}(\mathbb{K}),\mathbb{K})$ definiert, und daraus folgt mit (9.23) und (12.6) die Behauptung. □

(12.8) **Corollar 2**. *Zwei klassische euklidische Ebenen sind genau dann (geometrisch) isomorph, wenn ihre Koordinatenkörper (algebraisch) isomorph sind.*

Beweis: (9.23), (11.15), (12.7). □

(12.9) **Corollar 3**. *In einer klassischen euklidischen Ebene trifft jede Gerade durch den Mittelpunkt eines Kreises diesen Kreis in genau zwei Punkten. In einer klassischen euklidischen Ebene sind je zwei Geraden kongruent.*

Beweis: (12.6), (11.9), (3.15), (5.24). □

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

D. Abstandsmessung

(12.10) Aufgrund der Sätze (12.6) bis (12.8) denken wir uns im weiteren stets eine klassische euklidische Ebene $\mathbb{E}$ in der Form $(\mathbb{P},\equiv)=(\mathbb{P},\mathbb{G},\simeq)$ $=\mathbb{E}(\mathbb{L}_{-1,0}(\mathbb{K}),\mathbb{K})$ vorgegeben, wobei $\mathbb{K}$ ein euklidischer Körper ist.

Die Elemente von $\mathbb{P}$ lassen sich dann in der Form $x+iy$ mit $x,y\in\mathbb{K}$ darstellen, wobei $\boxed{i^2=-1\wedge\overline{i}=-i}$ ist, so daß also
(1) $(x+iy)\cdot(u+iv)=xu-yv+i\cdot(xv+yu)$,
(2) $\overline{x+iy}=x-iy$,
(3) $N(x+iy)=x^2+y^2\in\mathbb{K}^{(2)}=\mathbb{K}_+$
für $x,y,u,v\in\mathbb{K}$ gilt, wie wir es von den komplexen Zahlen her gewohnt sind. Die in (11.4) und (11.11) angegebenen Regeln bleiben mit $p=-1\wedge q=0$ weiterhin gültig. Nach (11.10)(1) und (12.6)(2) ist N jetzt ein surjektiver Homomorphismus von $\mathbb{P}(\cdot)$ auf $\mathbb{K}_+(\cdot)$, und im Hinblick auf (11.9) und (12.5) bietet es sich an, für $X,A,B\in\mathbb{P}$ das Element
$|X|:=\sqrt{N(X)}=\sqrt{X\cdot\overline{X}}\in\mathbb{K}_+$
als den **Absolutbetrag** von X und das Element
$|A-B|:=\sqrt{N(A-B)}\in\mathbb{K}_+$
als den (euklidischen) **Abstand** oder als die (euklidische) **Distanz** der Punkte A,B zu bezeichnen.

Statt $f(X,Y)$ schreiben wir im weiteren auch $X\circ Y$, d. h. wir setzen
$X\circ Y:=\frac{1}{2}(X\overline{Y}+\overline{X}Y)=f(X,Y)\ \ \forall\ X,Y\in\mathbb{P}$ (vgl. (11.11)).
Mit (11.9) und (12.5) ergibt sich
(4) $\{A,B\}\equiv\{C,D\}\ \Leftrightarrow\ |A-B|=|C-D|\ \ \forall\ \{A,B\},\{C,D\}\in\mathbb{P}_2$,
und nach (11.10)(5) gilt
(5) $|A-B|=0\ \Leftrightarrow\ A=B\ \ \forall\ A,B\in\mathbb{P}$.
Mit den Definitionen und der Normenregel folgt
(6) $|X|^2=N(X)=X\cdot\overline{X}=X\circ X\ \ \forall\ X\in\mathbb{P}$,
(7) $|X|=|-X|=|\overline{X}|\ \ \forall\ X\in\mathbb{P}$,
(8) $|X\cdot Y|=|X|\cdot|Y|\ \ \forall\ X,Y\in\mathbb{P}$,
(9) $(\lambda=|\lambda|\ \forall\ \lambda\in\mathbb{K}_+)\wedge(\lambda=-|\lambda|\ \forall\ \lambda\in\mathbb{K}\backslash\mathbb{K}_+)\wedge(\lambda\leq|\lambda|\ \forall\ \lambda\in\mathbb{K})$.
Ferner erhalten wir die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**
(10) $X\circ Y\leq|X\circ Y|=\frac{1}{2}|X\overline{Y}+\overline{X}Y|\leq|X|\cdot|Y|\ \ \forall\ X,Y\in\mathbb{P}$,
denn nach (11.4)(14) ist $X\overline{Y}-\overline{X}Y\in\mathbb{K}i$, also $(X\overline{Y}-\overline{X}Y)^2\leq 0$, und somit ist $4\cdot(X\circ Y)^2=(X\overline{Y}-\overline{X}Y)^2+4\cdot X\overline{Y}\cdot\overline{X}Y\leq 4\cdot X\overline{X}\cdot Y\overline{Y}=4\cdot(|X|\cdot|Y|)^2$.

Download free eBooks at bookboon.com

Für beliebige Punkte $A, B, C \in \mathbb{P}$ gilt die **Dreiecksungleichung**

(11) $|A-C| \leq |A-B| + |B-C|$,

die auch in der „vektoriellen Form“

(12) $|X+Y| \leq |X| + |Y| \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{P}$

notiert werden kann und die direkt aus

$|X+Y|^2 \overset{(6)}{=} (X+Y)\circ(X+Y) = |X|^2 + 2X\circ Y + |Y|^2 \overset{(10)}{\leq} (|X|+|Y|)^2$

folgt.

Im Beweis von (10) lassen sich die $\leq$-Zeichen genau dann durch ein Gleichheitszeichen ersetzen, wenn $X\overline{Y} = \overline{X}Y$ ist, d. h. wir erhalten

(13) $|X\circ Y| = |X|\cdot|Y| \Leftrightarrow X\overline{Y} = \overline{X}Y \Leftrightarrow \overline{X}Y \in \mathbb{K} \Leftrightarrow Y \in \mathbb{K}X \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{L}^*$.

Mit (10), (13) und dem Beweis von (12) ergibt sich jetzt außerdem

(14) $|X+Y| = |X| + |Y| \;\Leftrightarrow\; X\overline{Y} = \overline{X}Y \geq 0 \;\Leftrightarrow\; Y \in \mathbb{K}_+ X \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{L}^*$.

Für $A, B, C \overset{\in}{\neq} \mathbb{P}$ erhalten wir mit (14) schließlich die Aussage

(15) $|A-C| = |A-B| + |B-C| \;\Leftrightarrow\; B \in <A, C> \;\wedge\; \dfrac{A-B}{C-B} < 0$.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Als Ergänzung zu (13) und (14) notieren wir
(16) $\lambda \in \mathbb{K}_+ \wedge Y = \lambda X \;\Rightarrow\; X\overline{Y} = \overline{X}Y = |X|\cdot|Y| \;\; \forall\, X \in \mathbb{L}$ und
(17) $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\mathbb{K}_+ \wedge Y = \lambda X \;\Rightarrow\; X\overline{Y} = \overline{X}Y = -|X|\cdot|Y| \;\; \forall\, X \in \mathbb{L}$.

Wenn man in (11.27)(1),(3),(4) die Produkte des Typs $X\cdot\overline{Y}$ ersetzt durch $|X|\cdot|Y|$, so kann man dort aufgrund der fehlenden Vorzeicheninformation nur noch „$\Rightarrow$“ anstelle von „$\Leftrightarrow$“ beweisen, wie Gegenbeispiele zeigen (vgl. auch A 12.9.). Entsprechendes gilt für den Sekantensatz (11.28).

(12.11) Ist $\{M, A\} \in \mathbb{P}_2$, so wird $r := |A-M| \in \mathbb{K}_+\backslash\{0\}$ der **Radius** des Kreises $k_{M;A}$ und der **Radius** der Kreisscheibe $\overline{k_{M;A}}$ genannt. Wir schreiben auch $k_{M,r}$ statt $k_{M;A}$, da der Kreis $k_{M;A}$ wegen
(1) $k_{M;A} = \{X \in \mathbb{P} \,|\, \{M, X\} \equiv \{M, A\}\} = \{X \in \mathbb{P} \,|\, |X-M| = r\}$
(vgl. (12.10)(4)) vollständig durch Mittelpunkt und Radius festgelegt ist. Verwenden wir die Gleichung
(2) $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{K}$,
die sich aus (12.10)(3) ergibt, und ist $M = m_1 + im_2$ mit $m_1, m_2 \in \mathbb{K}$, so erhalten wir mit $k_{M,r} = \{x+iy \,|\, x, y \in \mathbb{K} \wedge (x-m_1)^2 + (y-m_2)^2 = r^2\}$ die bekannte Gleichungsdarstellung für den Kreis $k_{M,r}$.
Nach (12.5) gilt außerdem
(4) $k^\circ_{M,r} = \{X \in \mathbb{P} \,|\, |X-M| < r\}$ und
(5) $\overline{k_{M,r}} = \{X \in \mathbb{P} \,|\, |X-M| \leq r\}$.
Hierbei wird $k^\circ_{M,r}$ auch die **offene Kreisscheibe** mit **Mittelpunkt** M und **Radius** r genannt.

E. Strecken, Strahlen und Speere

(12.12) Es sei $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$. Wir bezeichnen $[A, B] := <A, B> \cap \overline{k_{A;B}} \cap \overline{k_{B;A}}$ als eine **Strecke** und genauer als die **Verbindungsstrecke** von A und B. Ferner nennen wir $]A, B[:= [A, B]\backslash\{A, B\}$ eine **offene Strecke** und genauer die **offene Verbindungsstrecke** von A und B.
Strecken (bzw. offene Strecken) werden auch als **abgeschlossene** (bzw. **offene**) **Intervalle** bezeichnet. Offenbar gilt $[A, B] = [B, A]$ und $]A, B[=]B, A[$. Wir setzen $[A, A] := \{A\}$ (Figur 12.1 a)).

Wir sagen, daß ein Punkt Z **zwischen** A und B liegt, wenn $Z \in]A, B[$ ist (Figur 12.1 a)).

Download free eBooks at bookboon.com

Figur 12.1

Strecke $[A,B]$ Strahl $[A,B>$ Speer $A^{\rightarrow}B$

Die Menge $[A,B> := [A,B] \cup \{X \in \mathbb{P}\setminus\{A\} \mid]A,X[\ni B\}$ wird die **Halbgerade** aus A durch B oder der **Strahl** aus A durch B mit A als **Scheitel** und $<A,B>$ als **Trägergerade** genannt (Figur 12.1 b)).

Wir bezeichnen eine Teilmenge $\mathbb{M}$ von $\mathbb{P}$ als **konvex**, wenn sie mit je zwei Punkten stets auch deren Verbindungsstrecke enthält.

Für $(A,g) \in \mathbb{P} \times \mathbb{G}$ mit $A \notin g$ heißt $H_A(g) := \{X \in \mathbb{P} \mid [A,X] \cap g = \varnothing\}$ die **(offene) Halbebene** und $\overline{H_A(g)} := H_A(g) \cup g$ die **(abgeschlossene) Halbebene** durch A mit dem **Rand** g.

In Verbindung mit (2.5) und (12.1) folgt unmittelbar, daß Strecken, offene Strecken, Strahlen, konvexe Mengen und Halbebenen durch Isomorphismen stets auf Mengen gleichen Typs abgebildet werden.

Strecken und Strahlen lassen sich algebraisch wie folgt beschreiben:

(12.13) **Satz**. *Ist* $\{A,B\} \in \mathbb{P}_2$*, so gilt mit* $\mathbb{K}^*_- := \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_+$:

(1) $[A,B] = \{A+\lambda(B-A) \mid \lambda \in \mathbb{K} \wedge 0 \le \lambda \le 1\}$,

(2) $[A,B] = \{X \in \mathbb{P} \mid |A-X|+|X-B| = |A-B|\}$.

(3) $]A,B[= \{A+\lambda(B-A) \mid \lambda \in \mathbb{K} \wedge 0 < \lambda < 1\}$,

(4) $(X \in]A,B[\Leftrightarrow \dfrac{A-X}{B-X} \in \mathbb{K}^*_-) \ \forall\, X \in \mathbb{L} \setminus \{A,B\}$.

(5) $[A,B> = \{A+\lambda(B-A) \mid \lambda \in \mathbb{K}_+\} =: A+\mathbb{K}_+(B-A) \subset <A,B>$,

(6) $[A,B> \cap [B,A> = [A,B] \wedge [A,B> \cup [B,A> = <A,B>$.

Beweis: (1): Ist $X \in <A,B>$, so gibt es gemäß (9.15)(4) ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $X = A+\lambda(B-A)$, und gemäß (12.11)(5) ist dann
$X \in \overline{k_{A;B}} \cap \overline{k_{B;A}} \Leftrightarrow |X-A| \le |B-A| \wedge |X-B| \le |A-B|$
$\Leftrightarrow |\lambda(B-A)| \le |B-A| \wedge |(1-\lambda)(A-B)| \le |A-B|$
$\Leftrightarrow \lambda \le |\lambda| \le 1 \wedge 1-\lambda \le |1-\lambda| \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \lambda \le 1$.
(4): Für $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0,1\}$ ist $[X = A+\lambda(B-A) \Leftrightarrow \dfrac{X-A}{B-A} = \lambda \overset{(10,4)(1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{A-X}{B-X} = \mu]$ mit $\mu := (1-\lambda^{-1})^{-1}$, also $[0 < \lambda < 1 \Leftrightarrow \lambda^{-1} > 1 \Leftrightarrow 1-\lambda^{-1} < 0 \Leftrightarrow \mu < 0]$.
(2) folgt gemäß (12.10)(15) aus (4), und (1) impliziert (3). Für $X \in \mathbb{P}\setminus\{A\}$ ist $B \in]A,X[\overset{(1)}{\Leftrightarrow} B = A+\rho(X-A) \Leftrightarrow X = A+\rho^{-1}(B-A)$ mit $\rho \in]0,1[$ und $\rho^{-1} \in \mathbb{K}_+\setminus[0,1]$. Mit (1) führt dies auf (5), und (5) impliziert (6). □

Download free eBooks at bookboon.com

(12.14) Ist $g \in \mathbb{G}$ und sind $A, B \overset{\in}{\neq} g$, so kann man für die Punkte von g eine Ordnungsrelation $\leq$ erklären, indem man
(1) $A+\lambda(B-A) \leq A+\mu(B-A) :\Leftrightarrow \lambda \leq \mu$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
setzt. Man bezeichnet die geordnete Menge $A^{\rightarrow}B = g(\leq)$ als **Speer** mit der **Trägergeraden** g und nennt $\leq$ auch eine **Durchlaufung** von g mit A **vor** B oder mit B **nach** A (Figur 12.1 c)).
Sind $C, D \overset{\in}{\neq} g$ und ist $C^{\rightarrow}D = g(\leq')$, so gilt
(2) $X \leq Y \Leftrightarrow X \leq' Y \quad \forall\, X, Y \in g$ im Falle $C < D$ und
(3) $X \leq Y \Leftrightarrow Y \leq' X \quad \forall\, X, Y \in g$ im Falle $D < C$,
d.h. es gibt für g genau zwei Durchlaufungen, und diese bezeichnen wir als **entgegengesetzt**. Demnach gehören zu jeder Geraden genau zwei Speere.
Um dies einzusehen, seien $\gamma, \delta, \lambda', \mu' \in \mathbb{K}$ mit $\gamma \neq \delta$, und es sei
$C = A+\gamma(B-A)$, $D = A+\delta(B-A)$, $X = C+\lambda'(D-C)$, $Y = C+\mu'(D-C)$.
Dann ist $X = A+\lambda(B-A)$ und $Y = A+\mu(B-A)$ mit $\lambda = \gamma+\lambda'(\delta-\gamma)$ und $\mu = \gamma+\mu'(\delta-\gamma)$, also mit $\mu-\lambda = (\mu'-\lambda')(\delta-\gamma)$, d.h. im Falle $\gamma < \delta$ ist $[\,\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \lambda' \leq \mu'\,]$, und im Falle $\delta < \gamma$ ist $[\,\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \mu' \leq \lambda'\,]$.

Die Anordnungseigenschaften von $\mathbb{K}(\leq)$ spiegeln sich in entsprechenden Eigenschaften von $A^{\rightarrow}B$ wider. Da es in $]0,1[$, in $\mathbb{K}\backslash\mathbb{K}_+$ und in $\mathbb{K}_+\backslash[0,1]$ unendlich viele Elemente gibt, nämlich z. B. unendlich viele rationale Zahlen, enthalten auch $]A,B[, <A,B>\backslash[A,B>$ und $[A,B>\backslash[A,B]$ unendlich viele Elemente.
Weiter ergeben sich für $A^{\rightarrow}B = g(\leq)$ und $X, Y \in g$ die Regeln
(4) *Es ist* $(\, X \in [A,B] \Leftrightarrow A \leq X \leq B\,)$.
(5) *Es ist* $(\, X \in [A,B> \Leftrightarrow A \leq X\,) \;\wedge\; (\, X \in [B,A> \Leftrightarrow X \leq B\,)$.

Die folgenden Aussagen lassen sich unter Verwendung der schon notierten Aussagen und mit (12.13) für $A, B, X, Y \in g$ direkt bestätigen:
(6) *Jedes Element von* $]A,B[$ *liegt zwischen zwei Elementen von* $]A,B[$.
(7) *Es ist genau dann* $[X,Y] = [A,B]$, *wenn* $\{X,Y\} = \{A,B\}$ *ist.*
(8) *Im Falle* $X \in <A,B>\backslash\{A,B\}$ *ist genau eine der Beziehungen* $X \in]A,B[,\ B \in]A,X[,\ A \in]X,B[$ *erfüllt.*
(9) *Es gilt* $\frac{1}{2}(A+B) \in]A,B[\wedge A \in]B, \widetilde{A}(B)[\wedge \widetilde{A}(B) \in g\backslash[A,B>$.
(10) *Es ist* $[X,Y> = [A,B> \Leftrightarrow (X = A \wedge Y \in [A,B>\backslash\{A\})$.
(11) *Ist* $X \in]A,B[$, *so ist* $[X,B> \subset [A,B>$.
(12) $<A,B>$, $[A,B]$, $]A,B[$ *und* $[A,B>$ *sind konvexe Mengen.*

Download free eBooks at bookboon.com

Man bezeichnet A und B auch als die **Endpunkte** und $|A-B|$ als die **Länge** der Strecken $[A, B]$ und $]A, B[$.
Nach (12.13)(2) und (12.10) (11) gelangt man nur dann „ohne Umweg“ von A über X nach B, wenn $X \in [A, B]$ ist. In diesem Sinne darf die Strecke als die „kürzeste Verbindung“ zwischen zwei Punkten betrachtet werden.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

F. Ebene Anordnungseigenschaften

Nachdem die Anordnungseigenschaften einer einzelnen Geraden nun hinreichend entwickelt sind, wollen wir uns jetzt mit Anordnungseigenschaften der Ebene befassen. Dazu zeigen wir zunächst

(12.15) **Satz von Pasch**. *Sind $A, B, C \overset{\in}{\neq} \mathbb{P}$ und ist g eine Gerade mit $g \not\ni A, B, C$, so trifft g keine oder genau zwei der offenen Strecken $]A, B[$, $]B, C[$, $]C, A[$.*

Beweis: Nach (12.14) dürfen wir o.B.d.A. voraussetzen, daß A, B, C nichtkollinear sind. a) Trifft g jede der Seitengeraden von $\{A, B, C\}$, so folgt die Behauptung gemäß (12.13)(4) aus dem Satz von MENELAOS (10.12) in Verbindung mit der Tatsache, daß ein Produkt von drei Elementen aus $\mathbb{K}^*$ genau dann positiv ist, wenn null oder zwei dieser Elemente negativ sind.
b) Ist $g \parallel <A, B>$, so betrachten wir die Parallelprojektion von $<A, C>$ auf $<B, C>$ in Richtung g. Diese führt A in B und C in C über und bildet nach (10.11) und (12.13)(4) die Strecke $]A, C[$ auf die Strecke $]B, C[$ ab, d. h. die Behauptung ist gültig. In den verbleibenden Fällen argumentiert man analog. □

Weiter zeigen wir

(12.16) **Satz über Halbebenen**. *Zu jeder Geraden g gehören genau zwei offene Halbebenen $H(g)$ und $H'(g)$, die auch die beiden* **Seiten** *der Geraden g genannt werden. Für diese gilt:*

(1) Es ist $H(g) = H_A(g)\ \forall A \in H(g) \wedge H'(g) = H_B(g)\ \forall B \in H'(g)$.
(2) Sind $A \in H(g)$ und $B \in H'(g)$, so ist $]A, B[\cap g \neq \varnothing$.
(3) $\mathbb{P}$ ist die disjunkte Vereinigung von g, $H(g)$ und $H'(g)$.
(4) Es ist $\widetilde{g}(H(g)) = H'(g)$ und $\widetilde{g}(H'(g)) = H(g)$.
(5) Sind $A \in H(g)$ und $C \in g$, so ist $[C, A> \subset \overline{H(g)}$.
(6) $H(g), H'(g), \overline{H(g)}$ und $\overline{H'(g)}$ sind konvexe Mengen.

Download free eBooks at bookboon.com

Beweis: Die durch $X \sim Y :\Leftrightarrow [X,Y] \cap g = \varnothing$ auf $\mathbb{P}\backslash g$ erklärte Relation $\sim$ ist offenbar reflexiv und symmetrisch, und nach (12.15) ist sie auch transitiv. Folglich wird $\mathbb{P}\backslash g$ durch $\sim$ in disjunkte Äquivalenzklassen eingeteilt. Es seien nun $A_0 \in \mathbb{P}\backslash g$ und $C \in g$. Dann liegen A_0 und $\widetilde{C}(A_0)$ nach (12.14)(9) in verschiedenen Klassen bezüglich $\sim$, und für $Y \in \mathbb{P}\backslash g$ mit $Y \not\sim A_0$ führt (12.15) auf $Y \sim \widetilde{C}(A_0)$. Demnach wird $P\backslash g$ durch $\sim$ in genau zwei Klassen $H(g)$ und $H'(g)$ eingeteilt, und wir erhalten (1) – (6). □

(12.17) Auch $\varnothing$, $\mathbb{P}$ und $\{A\}\ \forall\, A \in \mathbb{P}$ sind konvexe Mengen, und es gilt:

Der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ einer Menge $\mathfrak{M}$ konvexer Mengen ist stets konvex.

Denn sind $X, Y \in \mathfrak{D}$ mit $X \neq Y$, so gilt $X, Y \in M\ \forall\, M \in \mathfrak{M}$, also $[X,Y] \subseteq M\ \forall\, M \in \mathfrak{M}$, da jedes $M \in \mathfrak{M}$ konvex ist. Dies bedeutet aber $[X,Y] \subseteq \mathfrak{D}$.

Nach dem gerade Bewiesenen gibt es zu jeder beliebigen Teilmenge $\mathbb{X}$ von $\mathbb{P}$ eine kleinste konvexe Menge $[\mathbb{X}]$, die $\mathbb{X}$ umfaßt; man definiere nämlich $[\mathbb{X}]$ als den Durchschnitt aller konvexer Mengen, die $\mathbb{X}$ umfassen.

Man nennt $[\mathbb{X}]$ die **konvexe Hülle** von $\mathbb{X}$.

Offenbar ist $\mathbb{X}$ genau dann konvex, wenn $\mathbb{X} = [\mathbb{X}]$ ist, und es gilt

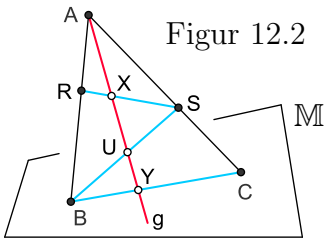
(1) $[A,B] = [\{A,B\}]\ \ \forall\, A, B \in \mathbb{P}$,

(2) $\mathbb{X} \subseteq [\mathbb{X}] = [[\mathbb{X}]]\ \ \forall\, \mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}$,

(3) $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y} \Rightarrow [\mathbb{X}] \subseteq [\mathbb{Y}]\ \ \forall\, \mathbb{X}, \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}$.

Weiter beweisen wir nun

(12.18) **Satz**. *Ist $\mathbb{M}$ eine nichtleere konvexe Teilmenge von $\mathbb{P}$ und ist $A \in \mathbb{P}$, so ist* $[\{A\} \cup \mathbb{M}] = \bigcup \{[A,Y] \mid Y \in \mathbb{M}\}$.



Figur 12.2

Beweis: 1) Ist $\mathbb{M} = \{B\}$, so ist $[\{A\} \cup \mathbb{M}] = [A,B]$. 2) Es sei $|\mathbb{M}| \geq 2$. Definitionsgemäß gilt für $\mathbb{M}' := \bigcup \{[A,Y] \mid Y \in \mathbb{M}\}$ die Aussage $\{A\} \cup \mathbb{M} \subseteq \mathbb{M}' \subseteq [\{A\} \cup \mathbb{M}]$. Deshalb ist es hinreichend zu zeigen, daß die Menge $\mathbb{M}'$ konvex ist. Dazu seien $R, S \overset{\in}{\neq} \mathbb{M}'$ und $X \in]R,S[$. Es gibt dann $B, C \in \mathbb{M}$ mit $R \in [A,B]$ und mit $S \in [A,C]$, und es ist ein $Y \in \mathbb{M}$ zu bestimmen mit $X \in [A,Y]$ (Figur 12.2). Es gelte $B \neq C \wedge A \notin \mathbb{M} \cup <B,C> \cup \{R,S\} \wedge (R \neq B \vee S \neq C)$, denn sonst gilt die Behauptung. Nach (12.15) bzgl. R, S, B bzw. bzgl. S, B, C oder trivialerweise gibt es $U, Y \in g := <A,X>$ mit $U \in [B,S] \wedge Y \in [B,C]$. Nach (12.15) bzgl. A, B, U bzw. bzgl. A, C, Y oder trivialerweise folgt $X \in [A,U] \wedge U \in [A,Y]$, also $X \in [A,Y]$ mit $Y \in [B,C] \subseteq \mathbb{M}$. □

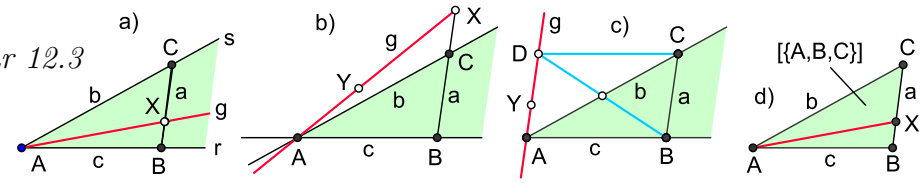
Download free eBooks at bookboon.com

(12.19) **Satz**. *Ist* $\{A, B, C\}$ *ein Dreieck und ist* $a := <B, C>, b := <C, A>,$ $c := <A, B>, r := [A, B>$ *und* $s := [A, C>$, *so gilt*

(1) $\overline{H_B(b)} \cap \overline{H_C(c)} = [r \cup s] = \bigcup \{[A, X> \mid X \in [B, C]\}$ *(Figur 12.3 a)),*

(2) $\overline{H_A(a)} \cap \overline{H_B(b)} \cap \overline{H_C(c)} = [\{A, B, C\}]$ *(Figur 12.3 d)).*

Figur 12.3



Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Beweis: a)Nach (12.16)(5) und (12.17) ist $[r \cup s] \subseteq \mathbb{M} := H_B(b) \cap H_C(c)$. b) Es sei $g \in \mathbb{G}$ mit $g \ni A$. Wenn es ein $X \in g \cap [B,C]$ gibt, dann ist $[A, X> \subseteq [r \cup s]$, wie man durch Anwendung von Dilatationen mit Zentrum A auf $[B,C]$ erkennt, und zugleich folgt $(<A,X> \setminus [A,X>) \cap \mathbb{M} = \varnothing$ gemäß (12.16). Wenn es dagegen ein $X \in g$ mit $X \in a \setminus [B,C]$ (Fig. 12.3 b)) oder mit $X = D := A - B + C$ (Figur 12.3 c)) gibt, dann führen (12.16)(5) und (10.5) auf $X \notin \overline{H_B(b)} \,\dot\vee\, X \notin \overline{H_C(c)}$. Für $Y \in g \setminus \{A\}$ gilt dann entweder $Y \notin \overline{H_B(b)}$ oder $Y \notin \overline{H_C(c)}$, also $Y \notin \mathbb{M}$. Damit ist (1) gezeigt.
Aus (1) ergibt sich $\overline{H_A(a)} \cap \mathbb{M} = \bigcup \{[A,X] \mid X \in [B,C]\} = [\{A,B,C\}]$ gemäß (12.16)(2) und (12.18), d.h. es gilt (2). □

(12.20) **Darstellungssatz**. *Sind* $A_1, ..., A_n \in \mathbb{P}$ *mit* $n \in \mathbb{N}^*$, *so ist*

$$[\{A_1, ..., A_n\}] = \{\lambda_1 A_1 + ... + \lambda_n A_n \mid \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}_+ \wedge \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1\}.$$

Beweis durch Induktion: Für $n = 1$ ist der Satz offenbar gültig. Er sei für $n = r$ mit $r \in \mathbb{N}^*$ bewiesen, und es sei $n = r+1$. Ist $X \in \mathbb{M}' := [\{A_1, ..., A_n\}]$, so gibt es nach (12.18) ein $V \in \mathbb{M} := [\{A_1, ..., A_r\}]$ mit $X \in [V, A_n]$ und ein $\lambda_n \in [0,1]$ mit $X = V + \lambda_n(A_n - V) = (1-\lambda_n)V + \lambda_n A_n$. Weiter gibt es Elemente $\mu_1, ..., \mu_r \in \mathbb{K}_+$ mit $\mu_1 + ... + \mu_r = 1 \wedge V = \mu_1 A_1 + ... + \mu_r A_r$. Setzen wir $\lambda_k := (1-\lambda_n)\mu_k$ für $k = 1, ..., r$, so sind $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}_+$ mit $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$, und X hat die Darstellung $X = \lambda_1 A_1 + ... + \lambda_n A_n$. Ist umgekehrt ein $X \in \mathbb{P}$ mit dieser Darstellung vorgelegt, so ist $[\lambda_n = 1 \Leftrightarrow X = A_n]$, und im Falle $\lambda_n \neq 1$ folgt $X \in [A_n, W]$ für $W := (1-\lambda_n)^{-1}(\lambda_1 A_1 + ... + \lambda_r A_r) \in \mathbb{M}$. □

(12.21) **Corollar**. *Ist* $\Delta := \{A,B,C\}$ *ein Dreieck, so hat* Δ *die konvexe Hülle* $[\Delta] = \{\alpha A + \beta B + \gamma C \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}_+ \wedge \alpha + \beta + \gamma = 1\}$. *Hierbei ist* $\alpha A + \beta B + \gamma C \in Rd(\Delta) := [A,B] \cup [B,C] \cup [C,A] \Leftrightarrow 0 \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$. *Man nennt* $Rd(\Delta)$ *den* **Rand** *und* $\Delta^\circ := [\Delta] \setminus Rd(\Delta)$ *das* **Innere** *von* Δ. *Z.B. liegt der Schwerpunkt* $S := \frac{1}{3}(A+B+C)$ *in* Δ°.

Download free eBooks at bookboon.com

(12.22) **Satz**. *Ist k ein Kreis und ist $U \in k^\circ$, so gilt:*
(1) Sind $X, Y \in k$ mit $X \neq Y$, so ist
$]X,Y[= <X,Y> \cap k^\circ$ *und* $[X,Y] = <X,Y> \cap \overline{k}$.
(2) k° und $\overline{k}$ sind konvex.
(3) Jeder Strahl aus U trifft k in genau einem Punkt.

Beweis: (1) Es sei M der Mittelpunkt von k und $L = \frac{1}{2}(X+Y)$ der Fußpunkt des Lotes von M auf $<X,Y>$. Ist $Z = L + \lambda(X-L) \in <X,Y>$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$, so führt (11.26) einerseits auf $|X-M|^2 = |X-L|^2 + |M-L|^2$ und andererseits auf $|Z-M|^2 = |Z-L|^2 + |M-L|^2 = \lambda^2 |X-L|^2 + |M-L|^2$. Demnach ist $|Z-M|^2 < |X-M|^2 \Leftrightarrow \lambda^2 |X-L|^2 < |X-L|^2 \Leftrightarrow \lambda^2 < 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lambda \in]-1,1[\Leftrightarrow Z \in]X,Y[$, also $]X,Y[= <X,Y> \cap k^\circ$, und damit folgt zugleich $[X,Y] = <X,Y> \cap \overline{k}$. (2) Sind $U, V \overset{\in}{\neq} k^\circ$, so treffen sich $<U,V>$ und k in zwei verschiedenen Punkten X, Y, und nach (1) gilt $U, V \in]X,Y[$. Mit (1) und (12.14)(12) erhalten wir dann $[U,V] \subseteq]X,Y[\subseteq k^\circ$. Die Konvexität von $\overline{k}$ ergibt sich analog. (3) Ist s ein Strahl aus U mit g als Trägergerade, so treffen sich g und k in zwei verschiedenen Punkten X, Y, und nach (1) ist $U \in]X,Y[$. Gemäß (12.14)(4),(5) gilt dann entweder $s \cap k = \{X\}$ oder $s \cap k = \{Y\}$. □

G. Vollständige euklidische Ebenen

Die Bedeutung des Vollständigkeitsaxioms (S) wird ersichtlich aus

(12.23) **Hauptsatz über vollständige euklidische Ebenen**. *Bis auf Isomorphie ist $\mathbb{E}(\mathbb{C}(+,\cdot),\mathbb{R})$ die einzige vollständige euklidische Ebene.*

Beweis: 1) Wir setzen voraus, daß in der gemäß (12.10) vorgegebenen klassischen euklidischen Ebene $\mathbb{E}$ nun auch das Axiom (S) erfüllt ist und beweisen $\mathbb{K}(+,\cdot) \cong \mathbb{R}(+,\cdot)$:
a) Dazu betrachten wir eine nichtleere Teilmenge $\mathfrak{R}$ von $\mathbb{K}_+ \backslash \{0\}$. Ist $\mathfrak{M} := \{\overline{k_{0,r}} \mid r \in \mathfrak{R}\}$, so führt (S) mit der Notation $\overline{k_{M,0}} := \{M\}$ auf $\bigcap \mathfrak{M} = \overline{k_{M,u}}$ für ein $M \in \mathbb{P}$ und ein $u \in \mathbb{K}_+$. Es folgt $M = 0$, denn jede Gerade durch 0 ist Symmetrieachse von $\overline{k_{0,r}} \ \forall\ r \in \mathfrak{R}$ und damit Symmetrieachse von $\bigcap \mathfrak{M} = \overline{k_{M,u}}$ (vgl.(5.23)3)). Mit (12.11)(5) ergibt sich nun $u \leq r\ \forall\, r \in \mathfrak{R}$. Im Falle $u \in \mathfrak{R}$ ist $u = \min \mathfrak{R}$. Ist $u \notin \mathfrak{R}$ und ist $v \in \mathbb{K}_+$ mit $u < v$, so existiert nach (12.11)(5) ein $z \in \mathfrak{R}$ mit $z < v$, denn andernfalls wäre $\overline{k_{0,u}} \subseteq \overline{k_{0,v}} \subseteq \bigcap \mathfrak{M}$ mit $v \in \overline{k_{0,v}} \setminus \overline{k_{0,u}}$, d.h. es wäre $\overline{k_{0,u}} \neq \bigcap \mathfrak{M}$. Demnach hat $\mathfrak{R}$ in $\mathbb{K}_+$ das Infimum u.

Download free eBooks at bookboon.com

b) Für $z := \inf\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ gilt $z = 0$. Denn sonst wäre $0 < z < 2z$, und nach der Definition von z gäbe es dann ein $m \in \mathbb{N}^*$ mit $1/m < 2z$. Damit wäre aber $1/(2m) < z$ im Widerspruch zur Definition von z.
c) Ist $a \in \mathbb{K}_+^*$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}^*$ mit $a \leq m$, denn sonst ergäbe sich $0 < 1/a < 1/n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ im Widerspruch zu b).
d) Ist $b \in \mathbb{K}_+^*$ und ist $n \in \mathbb{N}^*$, so gibt es ein $r_n \in \mathbb{Q}$ mit $r_n \leq b < r_n + 1/n$. Denn nach c) gibt es ein $m \in \mathbb{N}^*$ mit $b \cdot n \leq m$, und in der endlichen Menge $\{0, ..., m\}$ gibt es folglich ein größtes Element k mit $k \leq b \cdot n$. Dann ist $b \cdot n < k+1$, und für $r_n := k/n$ folgt die Behauptung.
e) Ist $\varnothing \neq \mathfrak{R} \subseteq \mathbb{K}$ und ist $c \in \mathbb{K}$ untere Schranke von $\mathfrak{R}$, so hat $\{r - c \mid r \in \mathfrak{R}\}$ nach a) in $\mathbb{K}_+$ ein Infimum d, und dann ist $c + d$ Infimum von $\mathfrak{R}$.
f) Ist $\varnothing \neq \mathfrak{R} \subseteq \mathbb{K}$ und ist $c \in \mathbb{K}$ obere Schranke von $\mathfrak{R}$, so hat $\{-r \mid r \in \mathfrak{R}\}$ nach e) in $\mathbb{K}$ ein Infimum d, und dann ist $-d$ Supremum von $\mathfrak{R}$.
g) Wegen b) – f) ist $\mathbb{K}(+, \cdot) \cong \mathbb{R}(+, \cdot)$.

2) Nach 1), (12.6) und (12.7) ist nun noch zu zeigen, daß in $\mathbb{E}(\mathbb{C}(+, \cdot), \mathbb{R})$ das Axiom (S) erfüllt ist. Dazu sei $M \in \mathbb{P}$, und $\mathfrak{R}$ sei eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{P} \backslash \{M\}$. Für $r = \inf\{|X - M| \in \mathbb{R}_+ \mid X \in \mathfrak{R}\}$ führt (12.11)(5) auf $\bigcap\{\overline{k_{M;X}} \mid X \in \mathfrak{R}\} = \overline{k_{M,r}}$, und mithin ist (S) gültig. □

(12.24) **Corollar**. *Die Anschauungsebene ist durch die Axiome (V), (P), (K), (Z), (A), (S) bis auf Isomorphie vollständig gekennzeichnet. Sie läßt sich algebraisch in der Form* $\mathbb{E}(\mathbb{C}(+, \cdot), \mathbb{R})$ *darstellen.*

Der Beweis ergibt sich aus (12.23) in Verbindung mit unserer Definition der Anschauungsebene. □

Schlußbemerkung. Wegen (12.7) und (12.24) wird die Anschauungsebene auch als die **reelle euklidische Ebene** bezeichnet.

Download free eBooks at bookboon.com

H. Aufgaben

Im folgenden sei $\mathbb{E} = (\mathbb{P}, \equiv) = \mathbb{E}(\mathbb{L}_{-1,0}, \mathbb{K})$ eine klassische euklidische Ebene mit euklidischem Koordinatenkörper $\mathbb{K}$. Man zeige:

A 12.1. Für $A, B, C, X \in \mathbb{P}$ gilt: a) Es ist $||A-B|-|B-C|| \leq |A-C|$.
b) Ist $A \neq C$, so ist $X \in <A, C> \backslash]A, C[\Leftrightarrow ||A-X|-|X-C|| = |A-C|$.

A 12.2. Sind $A_1, ..., A_n \in \mathbb{P}$, so ist $|A_1+...+A_n| \leq |A_1|+...+|A_n|$.
Es gilt $|A_1+...+A_n| = |A_1|+...+|A_n|$ genau dann, wenn ein Strahl s aus 0 mit $A_1, ..., A_n \in s$ existiert.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

A 12.3. Drei Elemente $a, b, c \in \mathbb{K}_+^*$ sind genau dann die Seitenlängen eines Dreiecks von $\mathbb{E}$, wenn $|a-b| < c < a+b$ gilt. Diese Bedingung ist äquivalent zu $a^4+b^4+c^4 < 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$.

A 12.4. Sind $A, B, C \in \mathbb{P}$ mit $A \neq B$ und sind $r, s \in \mathbb{K}_+^*$, so gilt
a) $|k_{A,r} \cap k_{B,s}| = 2 \Leftrightarrow |r-s| < |A-B| < r+s$,
b) $|k_{A,r} \cap k_{B,s}| = 1 \Leftrightarrow |r-s| = |A-B| \vee r+s = |A-B|$,
c) $\overline{k_{A,r}} \subseteq \overline{k_{C,s}} \Leftrightarrow |A-C| \leq s-r \Leftrightarrow k_{A,r}^\circ \subseteq k_{C,s}^\circ$,
d) $k_{A,r}^\circ \cap k_{C,s}^\circ = \varnothing \Leftrightarrow r+s \leq |A-C|$.

A 12.5. Sind zwei Kreise $k_{A,r}$ und $k_{B,s}$ gegeben, so gibt es genau zwei Dilatationen, die $k_{A,r}$ auf $k_{B,s}$ abbilden, nämlich
$\varphi^+ : X \to \frac{s}{r}(X-A)+B$ und $\varphi^- : X \to -\frac{s}{r}(X-A)+B$.
Der Fixpunkt $Z^- := (sA+rB)/(s+r)$ von φ^- heißt der **innere Ähnlichkeitspunkt** dieser Kreise, und im Falle $r \neq s$ heißt der Fixpunkt $Z^+ := (sA-rB)/(s-r)$ von φ^+ der **äußere Ähnlichkeitspunkt** dieser Kreise. Für $r \neq s \wedge A \neq B$ folgt $-(A-Z^-)/(B-Z^-) = (A-Z^+)/(B-Z^+)$. Ist $r = s$, so ist $\varphi^+ = \tau_{A,B}$. Für jede gemeinsame Tangente t von $k_{A,r}$ und $k_{B,s}$ gilt $\varphi^+(t) = t \vee \varphi^-(t) = t$. Im ersten Fall heißt t eine **äußere**, im zweiten eine **innere Tangente** von $k_{A,r}$ und $k_{B,s}$. Ist $\varphi \in \{\varphi^+, \varphi^-\}$ und ist u Tangente von $k_{A,r}$ mit $\varphi(u) = u$, so ist u auch Tangente von $k_{B,s}$.

A 12.6. Zwei verschiedene Kreise $k_{A,r}$, $k_{B,s}$ haben genau dann keine bzw. eine bzw. zwei bzw. drei bzw. vier Tangenten gemeinsam, wenn $|A-B| < |r-s|$ bzw. $|A-B| = |r-s|$ bzw. $|r-s| < |A-B| < r+s$ bzw. $r+s = |A-B|$ bzw. $r+s < |A-B|$ ist.

A 12.7. Sind k_1, k_2, k_3 drei Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 und den Radien r_1, r_2, r_3 und ist $Z_{\lambda\mu}^- = Z_{\mu\lambda}^-$ der innere und $Z_{\lambda\mu}^+ = Z_{\mu\lambda}^+$ im Falle $r_\lambda \neq r_\mu$ der äußere Ähnlichkeitspunkt von k_λ und k_μ für $\lambda \neq \mu$, so gilt für $\{\lambda, \mu, \nu\} = \{1, 2, 3\}$ die folgende Aussage von MONGE:
a) Ist $r_\lambda \neq r_\mu$, so sind $Z_{\lambda\mu}^+, Z_{\mu\nu}^-, Z_{\nu\lambda}^-$ kollinear.
b) Ist $r_\lambda = r_\mu$, so gibt es $g, h \in \mathbb{G}$ mit $g \parallel h \wedge Z_{\lambda\mu}^- , M_\lambda, M_\mu \in g \wedge Z_{\mu\nu}^-, Z_{\nu\lambda}^- \in h$.
c) Sind r_l, r_2, r_3 paarweise verschieden, so sind $Z_{12}^+, Z_{23}^+, Z_{31}^+$ kollinear.

A 12.8. Ist $A \in \mathbb{P}$, $g \in \mathbb{G}$ und $L := (A \perp g) \cap g$, so gilt $|A-L| \leq |A-X|$ $\forall\, X \in g$. Man nennt $|A-L|$ den **Abstand** von A und g.

A 12.9. *Umkehrung des 2. Höhensatzes von* EUKLID. $\{A, B, C\}$ sei ein Dreieck, und es gebe ein $D \in]A, C[$ mit $|A-B|^{-2}+|B-C|^{-2} = |B-D|^{-2}$ und mit $<A, C> \perp <B, D>$. Dann ist $<A, B> \perp <B, C>$ (vgl. (11.27)).

Download free eBooks at bookboon.com

13 Flächenmessung und Orientierung

Für die nachfolgenden Erörterungen denken wir uns eine klassische euklidische Ebene $\mathbb{E} = (\mathbb{P}, \equiv) = (\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq) = \mathbb{E}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{-1,0}(\mathbb{K})$ vorgegeben, wobei $\mathbb{K}$ ein ($\mathbb{Q}$ umfassender) euklidischer Körper ist (vgl. §12 und insbesondere (12.10)).

Obwohl wir intuitiv eine recht deutliche Vorstellung von dem haben, was „Fläche“ bedeutet, existieren zur Flächenmessung umfangreiche und schwierige Untersuchungen. Wir wollen im folgenden lediglich einen Ansatz erörtern, bei dem sich mit wenig Aufwand brauchbare Ergebnisse erzielen lassen und bei dem wir zugleich auch einiges über Orientierung erfahren.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

A. Determinanten

(13.1) Als erstes betrachten wir den auf G.W. Leibniz (1646–1716) zurückgehenden Begriff der *Determinante*. Dabei handelt es sich um Elemente von $\mathbb{K}$, die man Paaren aus Elementen von $\mathbb{L}$ zuordnet und die nun nicht einen „Abstand“, sondern eine *Parallelogrammfläche* beschreiben, wie wir später sehen werden. Wir definieren:

Für $a,b,c,d \in \mathbb{K}$ heißt $\det(a{+}ib, c{+}id) := ad{-}bc =: \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ die **Determinante** von $(a{+}ib, c{+}id)$.

Für $a,b,c,d \in \mathbb{K}$ und $A,B,C,D \in \mathbb{L}$ gilt:

(1) $\det(1, a{+}ib) = b =: Im(a{+}ib) :=$ **Imaginärteil** von $a{+}ib$
und $\det(a{+}ib, c{+}id) = ad{-}bc = \det(a{+}ic, b{+}id)$.

(2) $\det(A,B) = \dfrac{\overline{A}B - A\overline{B}}{2i} = -\det(B,A) = -\det(\overline{A},\overline{B})$.

(3) $\det(C{\cdot}A, C{\cdot}B) = C\overline{C}\cdot\det(A,B) = |C|^2\cdot\det(A,B)$.

(4) $\det(a{\cdot}A, B) = a\cdot\det(A,B) = \det(A, a{\cdot}B)$.

(5) $\det(A{+}B, C{+}D) = \det(A,C){+}\det(A,D){+}\det(B,C){+}\det(B,D)$.

(6) $\det(a\cdot A, b\cdot A) = 0$.

(7) $\det(A,B)\cdot C + \det(B,C)\cdot A + \det(C,A)\cdot B = 0$.

(8) $\det(A,B) = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{A}\cdot B \in \mathbb{K} \;\Leftrightarrow\; (A = 0 \;\vee\; B \in \mathbb{K}A)$.

(9) $\det(A,B) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; A,B \in \mathbb{L}^* \wedge \overline{A}B \notin \mathbb{K} \;\Leftrightarrow\; A \neq 0 \wedge B \notin \mathbb{K}A$.

Beweis: (1) folgt direkt aus der Definition der Determinante.

(2): $(a - ib)\cdot(c + id) - (a + ib)\cdot(c - id) = 2i\cdot(ad - bc)$.

(3): $\overline{CA}{\cdot}CB - CA{\cdot}\overline{CB} = C\overline{C}{\cdot}(\overline{A}B - A\overline{B})$.

(4): $\overline{aA}B - aA\overline{B} = a\cdot(\overline{A}B - A\overline{B}) = \overline{A}aB - A\overline{aB}$.

(5): $(\overline{A+B})\cdot(C+D) - (A+B)\cdot(\overline{C+D}) =$
$= \overline{A}C - A\overline{C} + \overline{A}D - A\overline{D} + \overline{B}C - B\overline{C} + \overline{B}D - B\overline{D}$.

(6): $\overline{aA}bA - aA\overline{bA} = 0$.

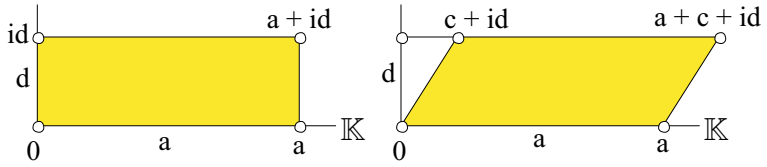
(7): $\overline{A}BC - A\overline{B}C + \overline{B}CA - B\overline{C}A + \overline{C}AB - C\overline{A}B = 0$.

(8): $(\overline{A}\,B - A\overline{B})/2i = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{A}\,B = A\overline{B} \;\Leftrightarrow\; \overline{A}\,B \in \mathbb{K} \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; (A = 0 \;\dot\vee\; A\overline{A}\cdot B \in \mathbb{K}A)$.

(9): $(\overline{A}B - A\overline{B})/2i \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{A}B \neq A\overline{B} \;\Leftrightarrow\; \overline{A}B \notin \mathbb{K} \overset{(8)}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow\; A \neq 0 \;\wedge\; B \notin \mathbb{K}A$. $\square$

Download free eBooks at bookboon.com

(13.2) *Erläuterungen.* a) Definitionsgemäß ist die Determinante zweier Elemente $A, B \in \mathbb{L}$ stets ein Element von $\mathbb{K}$, das sich direkt aus den Koordinaten berechnen läßt. Hierbei spielt die Reihenfolge eine wesentliche Rolle, denn nach 12.(3) ändert sich das Vorzeichen der Determinante von (A, B), wenn man A mit B vertauscht.



Figur 13.1

b) Nach (13.1)(2) ist $\det(a, id) = a{\cdot}d = \det(a, c{+}id)$ (Figur 13.1). Damit deutet sich bereits eine Verbindung zwischen Determinante und Parallelogrammfläche an.

c) In (4) und (5) verhält sich det wie eine Art Produktbildung.

Aus der sog. CRAMER*–Identität* (13.1)(7) folgt

(13.3) **Cramersche Regel**. *Es seien* $A, B, C \in \mathbb{L}$ *mit* $\det(A, B) \neq 0$. *Dann gibt es genau ein Paar* $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ *mit* $\boxed{x \cdot A + y \cdot B = C}$.

Es ist $\boxed{x = \dfrac{\det(C, B)}{\det(A, B)} \wedge y = \dfrac{\det(A, C)}{\det(A, B)}}$. **Merkregel:** *Im Nenner steht* $\det(A, B)$*; hiervon ausgehend schreibt man im Zähler* C *statt* A*, um* x *zu erhalten, und* C *statt* B*, um* y *zu erhalten.*

Gemeinsam nachhaltig zum Erfolg.

Denn bei der REWE Group, einem der führenden Handels- und Touristikkonzerne Europas, ist Bewegung drin. Dafür sorgen unsere ca. 330.000 Mitarbeiter Tag für Tag: Sie liefern Tonnen von Waren, schicken Urlauber zu fernen Zielen oder verhandeln die günstigsten Preise. Sie halten die Welt am Laufen. Werden Sie Teil einer großen Gemeinschaft, die Großes bewirkt. Freuen Sie sich auf die Zusammenarbeit mit sympathischen Kollegen auf internationaler Ebene und erleben Sie, was Sie in unserer vielfältigen Marken- und Arbeitswelt bewegen können. Und durch individuelle Förderung bewegt sich auch Ihre Karriere, wohin immer Sie wollen.
Was bewegen Sie?

www.rewe-group.com/karriere
www.facebook.com/REWEGroupKarriere

Du bewegst.

330.000 Mitarbeiter
523 Berufe
1 Zukunft

REWE GROUP

REWE nahkauf PENNY toom DER BAUMARKT BILLA MERKUR BIPA DER Touristik

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Beweis: Nach (13.1)(2),(7) ist $\det(A,B)\cdot C = \det(C,B)\cdot A + \det(A,C)\cdot B$. Damit ergibt sich die *Existenz* der gesuchten Lösungen $x, y \in \mathbb{K}$.
Sind $u, v \in \mathbb{K}$ mit $uA + vB = C$, so folgt $\det(A,C) = v\cdot\det(A,B)$ und $\det(C,B) = u\cdot\det(A,B)$ gemäß (13.1)(4),(5),(6). Dies beweist die *Eindeutigkeit* der gefundenen Lösungen. □

Bemerkung. In Koordinatenschreibweise liefert (13.3) eine Lösungsformel für zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten.

(13.4) Ist $f \in \ddot{\mathbb{A}}$, so wird das Element $\det f := \det(f(1)-f(0), f(i)-f(0))$ aus $\mathbb{K}$ als die **Determinante** von f bezeichnet. Man kann $\det f$ als *Flächenverzerrungsfaktor* deuten, wie wir sehen werden.
Sind $A, B \in \mathbb{L}$ mit $A \neq 0$, so hat
$f : \mathbb{L} \to \mathbb{L} : X \to AX+B$ die Determinante $A\overline{A} = |A|^2$, während
$g : \mathbb{L} \to \mathbb{L} : X \to A\overline{X}+B$ die Determinante $-A\overline{A} = -|A|^2$ hat.
Demnach hat jede gerade Bewegung die Determinante $+1$ und jede ungerade Bewegung die Determinante -1. Überdies ergibt sich

(13.5) **Determinantenmultiplikationssatz**.

$$\textit{Es ist}\ \boxed{\det(\alpha\circ\beta) = \det\alpha\cdot\det\beta} \quad \forall\ \alpha,\beta \in \ddot{\mathbb{A}}.$$

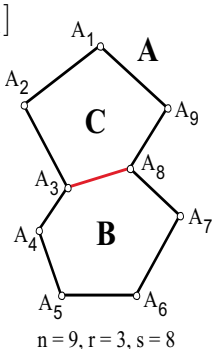
Beweis: (9.18), (11.5), (13.4). □

B. Das Determinantenmaß

(13.6) Ist $\mathbf{A} := (A_1,\ldots,A_n)$ ein n-tupel von Punkten aus $\mathbb{L}$ mit $n \geq 2$, so wird das in $\mathbb{K}$ gelegene Element
$\mathcal{D}et\,\mathbf{A} := \frac{1}{2}[\det(A_1,A_2)+\det(A_2,A_3)+\cdots+\det(A_{n-1},A_n)+\det(A_n,A_1)]$
als das **Determinantenmaß von A** bezeichnet. Ferner wird
$\mathbf{Rd}(\mathbf{A}) := [A_1,A_2]\cup[A_2,A_3]\cup\cdots\cup[A_{n-1},A_n]\cup[A_n,A_1]$
der **Rand** von **A** genannt, und $A_1,\ldots A_n$ heißen die **Ecken** von **A**. Als erstes zeigen wir

(13.7) **Zerlegungssatz.** *Für $r,s,n \in \mathbb{N}^*$ mit $r<s\leq n$, $\mathbf{A} := (A_1,\ldots,A_n) \in \mathbb{L}^n$, $\mathbf{B} := (A_r, A_{r+1},\ldots,A_s)$ und $\mathbf{C} := (A_s,\ldots,A_n,A_1,\ldots,A_r)$ gilt* $\boxed{\mathcal{D}et\,\mathbf{A} = \mathcal{D}et\,\mathbf{B} + \mathcal{D}et\,\mathbf{C}}$ *(Figur 13.2).*

(Zur Verdeutlichung werden in Figuren stets die Ränder mit eingezeichnet.)

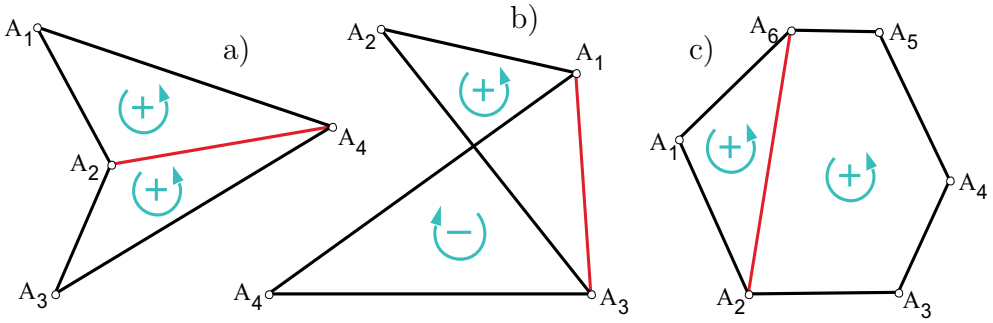


Figur 13.2

Download free eBooks at bookboon.com

Beweis: Wegen $\det(X,Y) = -\det(Y,X) \;\; \forall\, X,Y \in \mathbb{L}$ ist
$\mathcal{D}et\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\det(A_r,A_{r+1}) + \cdots + \det(A_{s-1},A_s) + \det(A_s,A_r)] +$
$+\frac{1}{2}[\det(A_s,A_{s+1}) + \cdots + \det(A_n,A_1) + \cdots + \det(A_{r-1},A_r) + \det(A_r,A_s)] =$
$\mathcal{D}et\mathbf{B} + \mathcal{D}et\mathbf{C}$. □

(13.8) In (13.7) wird $(\mathbf{B},\mathbf{C})$ eine **echte Zerlegung** von $\mathbf{A}$ in die **Teile** $\mathbf{B},\mathbf{C}$ genannt, wenn $\mathbf{B} \in \mathbb{L}^j \wedge \mathbf{C} \in \mathbb{L}^k$ mit $3 \le j \le n-1 \wedge 3 \le k \le n-1$ ist, wenn also $\mathbf{B}$ *und* $\mathbf{C}$ weniger Ecken als $\mathbf{A}$ haben.



Figur 13.3

Im Falle $n \ge 4$ sind echte Zerlegungen von $\mathbf{A}$ offenbar möglich; man kann z.B. $\mathbf{B} := (A_2, A_3, \ldots, A_n)$ und $\mathbf{C} := (A_n, A_1, A_2)$ oder auch $\mathbf{B} := (A_1, A_2, A_3)$ und $\mathbf{C} := (A_3, \ldots, A_n, A_1)$ wählen (Figur 13.3).

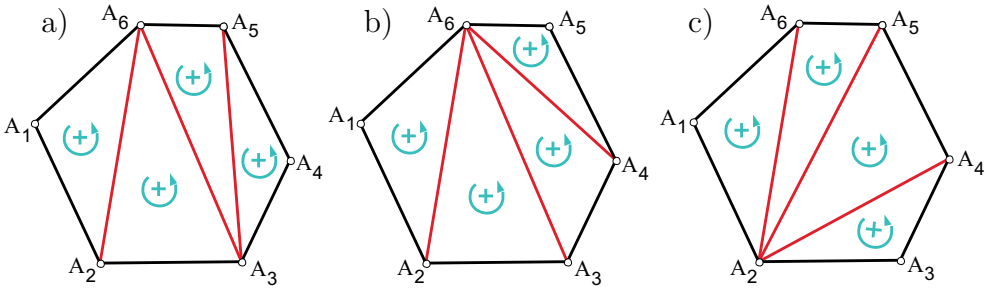
Die bei einer echten Zerlegung erhaltenen Teile können, soweit sie wenigstens 4 Ecken haben, abermals echt zerlegt werden.

Indem man diesen Zerlegungsprozess so weit wie möglich weiterführt — z.B., indem man bei jedem einzelnen Zerlegungsprozess ein Tripel abspaltet, so daß das Restteil dann eine Ecke weniger hat — , gelangt man zu einer Zerlegung von $\mathbf{A}$ in lauter Tripel $\Delta_1, \ldots, \Delta_t$, die jeweils aus drei der Ecken $A_1, \ldots, A_n$ von $\mathbf{A}$ gebildet sind; hierbei ist $t = n-2$, wenn $n \ge 3$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{L}^n$ ist.
Man bezeichnet $(\Delta_1, \ldots, \Delta_t)$ für $t = n-2 \ge 1$ als eine **Triangulierung** von $\mathbf{A} \in \mathbb{L}^n$.
Für $n \ge 4$ hat $\mathbf{A}$ stets mehrere mögliche Triangulierungen (Figur 13.4), aber ganz gleich, wie diese gewählt werden, nach Satz (13.7) gilt:

(13.9) **Erster Triangulierungssatz.** *Ist* $\mathbf{A} \in \mathbb{L}^n$ *mit* $n \ge 3$ *und ist* $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-2}$ *eine Triangulierung von* $\mathbf{A}$, *so ist*

$$\boxed{\mathcal{D}et\,\mathbf{A} = \mathcal{D}et\,\Delta_1 + \cdots + \mathcal{D}et\,\Delta_{n-2}}\,.$$

Download free eBooks at bookboon.com



Figur 13.4: Beispiele für Triangulierungen

a) $\Delta_1{=}(A_3, A_4, A_5), \Delta_2{=}(A_6, A_1, A_2), \Delta_3{=}(A_3, A_5, A_6), \Delta_4{=}(A_6, A_2, A_3)$,
b) $\Delta'_1{=}(A_4, A_5, A_6), \Delta'_2{=}(A_6, A_1, A_2), \Delta'_3{=}(A_3, A_4, A_6), \Delta'_4{=}(A_6, A_2, A_3)$,
c) $\Delta''_1{=}(A_2, A_3, A_4), \Delta''_2{=}(A_6, A_1, A_2), \Delta''_3{=}(A_2, A_4, A_5), \Delta''_4{=}(A_5, A_6, A_2)$.

Im weiteren benötigen wir

(13.10) **Satz.** Für $(A, B, C) \in \mathbb{L}^3$ gilt:

(1) $\mathcal{D}et(A, B, C) = \frac{1}{2} \cdot \det(B{-}A, C{-}A)$.

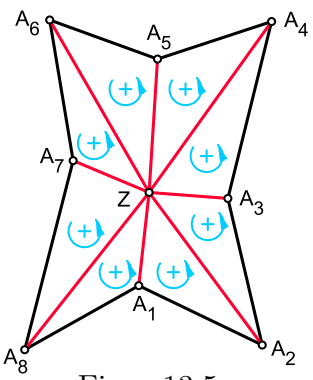
(2) $\mathcal{D}et(A, B, C) = \frac{1}{2} \cdot [\det(A, B){+}\det(B, C){-}\det(A, C)]$.

(3) $\mathcal{D}et(A, B, C) = 0 \;\Leftrightarrow\; A, B, C$ sind kollinear.

Beweis: Es ist $\frac{1}{2}\cdot\det(B{-}A, C{-}A) = \frac{1}{2}\cdot[\det(B, C){-}\det(B, A){-}\det(A, C) + \det(A, A)] = \frac{1}{2} \cdot [\det(A, B) + \det(B, C) + \det(C, A)] = \mathcal{D}et(A, B, C)$ gemäß (13.1)(2),(5). Mit (13.1)(2),(8) folgt dann die Behauptung. □

Neben (13.9) besteht die Möglichkeit, für jeden beliebigen Punkt $Z \in \mathbb{L}$ eine sog. **zentrische Triangulierung bzgl. Z** vorzunehmen gemäß

(13.11) **Zweiter Triangulierungssatz**. *Ist* $\mathbf{A} \in \in \mathbb{L}^n$ *mit* $n \geq 2$ *und ist* $Z \in \mathbb{L}$, *ist ferner* $\Delta_1 := (Z, A_1, A_2)$, $\Delta_2 := (Z, A_2, A_3), \ldots,$ $\Delta_{n-1} := (Z, A_{n-1}, A_n)$, $\Delta_n := (Z, A_n, A_1)$, *so ist* $\boxed{\mathcal{D}et\,\mathbf{A} = \mathcal{D}et\,\Delta_1 + \cdots + \mathcal{D}et\,\Delta_n}$.



Figur 13.5

Der *Beweis* ergibt sich direkt aus (13.10)(2). □

Bei einer „*zyklischen*“ bzw. „*antizyklischen*“ Vertauschung der Ecken verhält sich das Determinantenmaß wie folgt:

(13.12) **Satz.** *Für* $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{L}^n$ *mit* $n \geq 2$ *gilt*

(1) $\mathcal{D}et(A_1, \ldots, A_n) = \mathcal{D}et(A_r, \ldots, A_n, A_1, \ldots, A_{r-1})\ \forall\, r \in \{2, \ldots, n\}$,

(2) $\mathcal{D}et(A_n, A_{n-1}, \ldots, A_2, A_1) = -\mathcal{D}et(A_1, \ldots, A_n)$.

Download free eBooks at bookboon.com

Beweis: (1) folgt direkt aus (13.6), und (2) ergibt sich aus (13.6) in Verbindung mit (13.1)(2). □

Ist $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{L}^n$ mit $n \geq 2$ und ist $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}$, so sei
$\varphi(\mathbf{A}) := (\varphi(A_1), \ldots, \varphi(A_n))$.
Damit folgt als weitere wichtige Eigenschaft des Determinantenmaßes:

(13.13) **Satz.** *Ist φ eine Ähnlichkeit von $\mathbb{E}$ und ist $\mathbf{A} \in \mathbb{L}^n$ mit $n \geq 2$, so ist* $\boxed{\mathcal{D}et\ \varphi(\mathbf{A}) = \det \varphi \cdot \mathcal{D}et\ \mathbf{A}}$.

Bundesnachrichtendienst

einzigartige Ideen
einzigartige Vielfalt
Sie sind einzigartig? Wir auch!
einzigartige Lösungen
einzigartiger Auftrag
einzigartiger Arbeitgeber

Wir suchen
Ingenieure/innen der Elektro- und Informationstechnik
Informatiker/innen
mit den Abschlüssen FH/Bachelor

Mehr Informationen zum Thema Karriere beim BND unter
www.bundesnachrichtendienst.de (Karriere)

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

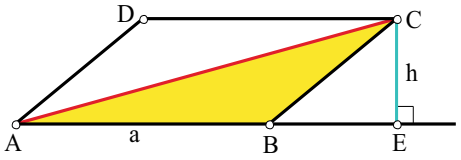
Beweis: Nach (13.9) ist es hinreichend, den Satz für $(A,B,C)\in\mathbb{L}^3$ zu beweisen. Ist $\psi(X)=EX+F\ \ \forall\ X\in\mathbb{L}$ mit $E,F\in\mathbb{L}\wedge E\neq 0$, so ist $\det(\psi(B)-\psi(A),\psi(C)-\psi(A))=\det(E(B-A),E(C-A))$. In Verbindung mit (13.1)(2),(3), (13.4), (13.5), (13.10)(1) führt dies für $\varphi\in\{\psi,\psi\circ\kappa_{\mathbb{L}}\}$ auf die Behauptung. □

(13.14) **Corollar 1.** *Ist* $\mathbf{A}\in\mathbb{L}^n$ *mit* $n\geq 2$, *so ist*

$$\mathcal{D}et\,\varphi(\mathbf{A})=\mathcal{D}et\,\mathbf{A}\ \forall\,\varphi\in\mathfrak{B}^+ \text{ und } \mathcal{D}et\,\varphi(\mathbf{A})=-\mathcal{D}et\,\mathbf{A}\ \forall\,\varphi\in\mathfrak{B}^-.$$

Beweis: (13.4), (13.13). □

(13.15) **Corollar 2.** *Ist* (A,B,C,D) *ein Parallelogramm von* $\mathbb{L}$ *und ist* E *der Fußpunkt des Lotes von* C *auf* $<A,B>$, *so gilt für* $a:=|A-B|$ *und* $h:=|C-E|$:



Figur 13.6

(1) Es ist $|\mathcal{D}et\,(A,B,C,D)|=a\cdot h$.

(2) Es ist $|\mathcal{D}et\,(A,B,C)|=\frac{1}{2}\,a\cdot h$.

Beweis: Nach Anwendung einer Bewegung dürfen wir gemäß (13.14) o.B.d.A. von $A=0$, $B=a$, $D=d+h\cdot i$ und $C=a+d+h\cdot i$ mit $d\in\mathbb{K}$ ausgehen. Da die Dreiecke (A,B,C) und (C,D,A) vermittels der Punktspiegelung an $\frac{1}{2}(A+C)$ kongruent sind, folgt mit (13.9): $|\mathcal{D}et(A,B,C,D)|=$ $=2\cdot|\mathcal{D}et(A,B,C)|\overset{(13.10)}{=}|\det(B-A,C-A)|=|\det(a,a+d+hi)|=a\cdot h$. □

C. Flächenmessung

(13.16) a) *Vorüberlegung.* Es seien $m,n,r,s\in\mathbb{N}^*$. Dann läßt sich das Rechteck $\mathbf{A}:=(0,\frac{m}{n},\frac{m}{n}+\frac{r}{s}i,\frac{r}{s}i)$ durch $m\cdot r$ achsenparallele Rechtecke mit den Seitenlängen $\frac{1}{n},\frac{1}{s}$ „überdecken“, und zugleich läßt sich das „Einheitsquadrat“ $\mathbf{E}:=(0,1,1+i,i)$ durch $n\cdot s$ solcher Rechtecke „überdecken“.

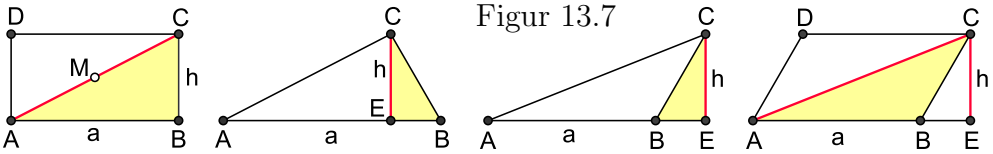
Download free eBooks at bookboon.com

Das Verhältnis der Flächen von **A** und **E** wird man deshalb intuitiv durch die Zahl $\frac{mr}{ns}$ beschreiben, d.h. wenn man **E** die Fläche 1 zuordnet, dann wird man **A** die Fläche $\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}$ zuordnen.

b) Die auf $\mathbb{Q}$ bezogene Vorüberlegung aus a) führt uns zu der folgenden Definition: Ist $\mathbf{A} := (0, a, a+ih, ih)$ mit $a, h \in \mathbb{K}_+$ und ist $\varphi \in \mathfrak{B}$, so wird $F(\varphi(\mathbf{A})) := a\cdot h$ als die **Fläche** von $\varphi(\mathbf{A})$ bezeichnet. Dies bedeutet:

Ist (A, B, C, D) ein Parallelogramm mit $<A,B>\perp<B,C>$, also ein Rechteck, so hat (A, B, C, D) die Fläche $F((A, B, C, D)) = |A-B|\cdot|B-C|$.

Figur 13.7



a) b) c) d)

c) Da sich das Rechteck (A, B, C, D) vermittels der Punktspiegelung an $M := \frac{1}{2}(A+C)$ in die kongruenten rechtwinkligen Dreiecke (A, B, C) und (C, D, A) zerlegen läßt, ordnet man dem rechtwinkligen Dreieck (A, B, C) den Flächenwert $F((A, B, C)) := \frac{1}{2}\,a\cdot h$ mit $a := |A-B|$ und $h := |B-C|$ zu (Figur 13.7 a)). Da sich der Flächenwert für ein beliebiges Dreieck aus Summe oder Differenz der Flächenwerte zweier rechtwinkliger Dreiecke ermitteln läßt (Figur 13.7 b),c)) und da sich ein Parallelogramm aus zwei gleichsinnig kongruenten Dreiecken zusammensetzen läßt (Fig.13.7 c)), betrachtet man die Zahl „*Grundseite mal Höhe*“ für Parallelogramme und „ $\frac{1}{2}$ *Grundseite mal Höhe*“ für Dreiecke als Maß für die Größe der Fläche.

d) Aus c) erkennen wir mit (13.15), daß der *Absolutbetrag des Determinantenmaßes* für Dreiecke und für Parallelogramme *genau das zugehörige Flächenmaß* liefert.

Deshalb legen wir nun mit Blick auf den Triangulierungssatz (13.9) fest:

(13.17) Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{L}^n$ mit $n \geq 3$ und ist $(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ mit $r = n-2$ eine Triangulierung von **A** oder mit $r = n$ eine zentrische Triangulierung von **A**, so wird $(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ **schlicht** genannt, wenn

entweder $\boxed{\mathcal{D}et\Delta_\nu \geq 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, r}$ oder $\boxed{\mathcal{D}et\Delta_\nu \leq 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, r}$

gilt, wenn also die Determinantenmaße für die einzelnen Tripel der Triangulierung keine unterschiedlichen Vorzeichen aufweisen.

Download free eBooks at bookboon.com

Ferner wird $\mathbf{A}$ genau dann als **orientiert** bezeichnet, wenn $\mathbf{A}$ wenigstens *eine* schlichte (gewöhnliche oder zentrische) Triangulierung besitzt.

Wenn $\mathbf{A}$ orientiert ist, dann wird $\boxed{F(\mathbf{A}) := |\mathcal{D}et\mathbf{A}|}$ das **Flächenmaß von $\mathbf{A}$** genannt.

Anschaulich stellt man sich hierbei vor, daß $F(\mathbf{A})$ die „Größe“ des durch $\mathbf{A}$ festgelegten „Bereiches“ beschreibt, welcher durch die Tripel einer schlichten Triangulierung festgelegt ist. Dabei deutet man die Punktmenge $[R,S,T] = \bigcup_{X\in[S,T]}[R,X]$ als die **Fläche** eines *einzelnen* zugehörigen Tripels (R,S,T) (vgl. (12.18)).

Ist $\mathbf{A}$ orientiert, so heißt $\mathbf{A}$ **positiv orientiert** im Falle $\mathcal{D}et\,\mathbf{A} > 0$ und **negativ orientiert** im Falle $\mathcal{D}et\,\mathbf{A} < 0$.

Als wichtiges Ergebnis notieren wir

(13.18) **Hauptsatz der Flächenmessung.**

Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{L}^n$ mit $n \geq 3$ und ist $\mathbf{A}$ orientiert, so gilt:

(1) Es ist $\boxed{F(\mathbf{A}) = F(\Delta_1) + F(\Delta_2) + \cdots + F(\Delta_r)}$
für jede schlichte Triangulierung $(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ von $\mathbf{A}$.

(2) Ist $(\mathbf{B},\mathbf{C})$ eine Zerlegung von $\mathbf{A}$ mit $\mathcal{D}et\mathbf{B}\cdot\mathcal{D}et\mathbf{C} \geq 0$ und sind $\mathbf{B},\mathbf{C}$ orientiert, so ist $\boxed{F(\mathbf{A}) = F(\mathbf{B}) + F(\mathbf{C})}$.

(3) Ist φ eine Ähnlichkeit von $\mathbb{E}$, so ist $F(\varphi(\mathbf{A})) = |\det\varphi|\cdot F(\mathbf{A})$.

CAREER Venture
eine Marke von MSW & Partner
facebook.com/CareerVenture
google.com/+Career-VentureDe
twitter.com/CareerVenture
Haben Sie Potenzial?

Auszug unserer Referenzen:
Deloitte. DB Mobility Networks Logistics BOSCH Technik fürs Leben Struktur Management Partner TATA CONSULTANCY SERVICES
career-venture.de
Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Beweis: (13.7), (13.9), (13.11), (13.13), (13.17). □

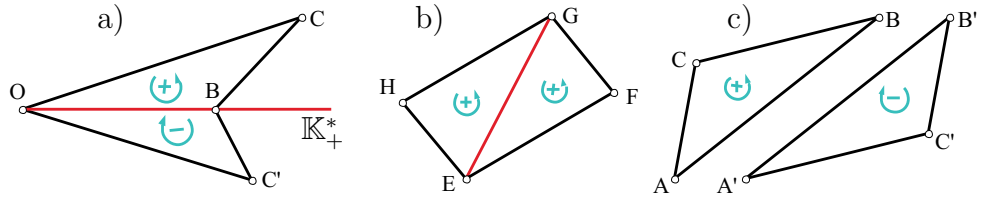
(13.19) Nach (13.18)(3) ist die Determinante einer Ähnlichkeit φ vom Betrag her genau der Flächenverzerrungsfaktor für Figuren bei Anwendung von φ. *Insbesondere ist jede Bewegung flächentreu.*

D. Orientierung

Das Determinantenmaß sagt – aufgrund seines Vorzeichens – auch einiges über *Orientierung* aus. Dazu zeigen wir

(13.20) **Satz über Orientierung.** *Es gilt:*

(1) Gleichsinnige Ähnlichkeiten erhalten die Orientierung.
(2) Gegensinnige Ähnlichkeiten kehren die Orientierung um.
(3) Ist $B \in \mathbb{K}_+$ und $C \in \mathbb{L}$ mit $Im(C) > 0$, so ist $\mathcal{D}et(0,B,C) > 0$.
(4) Ist $B \in \mathbb{K}_+$ und $C \in \mathbb{L}$ mit $Im(C) < 0$, so ist $\mathcal{D}et(0,B,C) < 0$.
(5) Jedes geordnete Dreieck und jedes Parallelogramm ist orientiert.
(6) Ein Parallelogramm (E,F,G,H) ist genau dann positiv orientiert, wenn dies für (E,F,G) zutrifft (Figur 13.8).

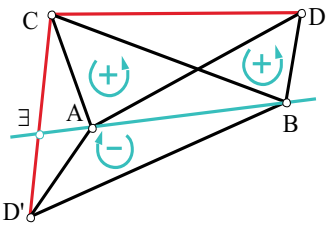


Figur 13.8

Beweis: (1), (2) folgen aus (13.18)(3), und (3), (4) ergeben sich gemäß (13.10)(1) aus $\mathcal{D}et(0,B,c+d\cdot i) = \frac{1}{2}\det(B,c+d\cdot i) = \frac{1}{2}B\cdot d$ für $B,c,d \in \mathbb{K}$. Ist (E,F,G,H) ein Parallelogramm, so ist $((E,F,G),(G,H,E))$ eine Triangulierung aus gleichsinnig kongruenten Dreiecken, wie die Punktspiegelung an $\frac{1}{2}(E+G)$ zeigt. Damit erhalten wir (5) und (6). □

(13.21) Ist (A,B,C) ein geordnetes Dreieck, so haben die geordneten Dreiecke (B,C,A), (C,A,B) nach (13.12) die gleiche Orientierung wie (A,B,C), und die Dreiecke (C,B,A), (B,A,C), (A,C,B) sind entgegengesetzt orientiert wie (A,B,C). Überdies erhalten wir

(13.22) **Satz.** *Dreiecke (A,B,C), (A,B,D) haben gleiche Orientierung im Falle $<A,B> \cap [C,D] = \varnothing$ und entgegengesetzte Orientierung im Falle $<A,B> \cap [C,D] \neq \varnothing$.*



Figur 13.9

Beweis: Nach Anwendung einer geraden Bewegung dürfen wir gemäß (13.20)(1) o.B.d.A. von $A = 0$ und $B \in \mathbb{K}_+^*$ ausgehen.
Nach (13.20) und (13.12)(2) sind (A,B,C) und (A,B,D) genau dann gleichorientiert, wenn $0 \notin [Im(C), Im(D)]$ ist. Dies ist nach (10.11) und (12.13)(4) äquivalent zur Aussage $<A,B> \cap [C,D] = \varnothing$. □

Download free eBooks at bookboon.com

(13.23) *Beispiele*: a) Figur 13.10 zeigt schlichte Triangulierungen eines Vierecks und eines Sechecks. Ist $\mathbf{A} = (A, B, C, D)$ ein Viereck und ist *jede* gewöhnliche Triangulierung von $\mathbf{A}$ schlicht, so bedeutet dies anschaulich gemäß (13.22), daß $\mathbf{A}$ keine „einspringende“ Ecke hat (Figur 13.10 a),b)) und daß die konvexen Mengen $[\{A, B, C, D\}]$ und $[\mathbf{Rd}(\mathbf{A})]$ identisch sind.

SEW-EURODRIVE—Driving the world

SEW EURODRIVE

Gestalten Sie die Technologien der Zukunft!

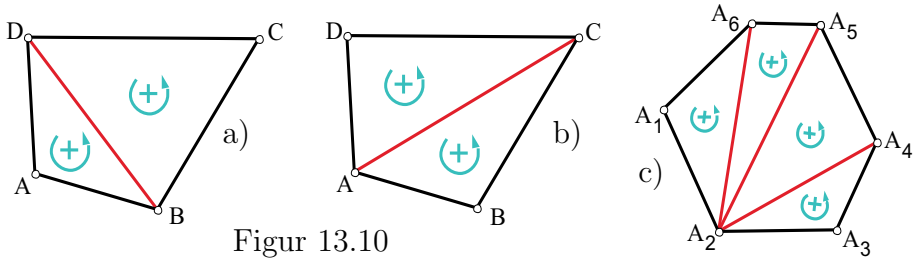
Clevere Köpfe mit Lust auf Neues gesucht. Wir sind einer der Innovationsführer weltweit im Bereich Antriebstechnologie und bieten Studierenden der Fachrichtungen Elektrotechnik, Maschinenbau, Mechatronik, (Wirtschafts-) Informatik oder auch Wirtschaftsingenieurwesen zahlreiche attraktive Einsatzgebiete. Sie möchten uns zeigen, was in Ihnen steckt? Dann herzlich willkommen bei SEW-EURODRIVE!

Jährlich 120 Praktika und Abschlussarbeiten

www.karriere.sew-eurodrive.de

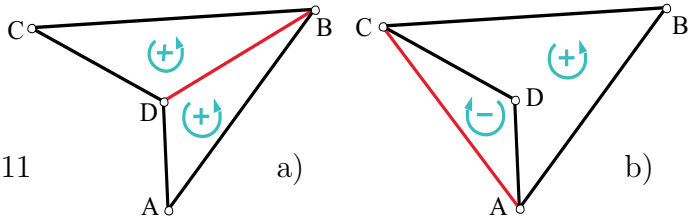
Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more



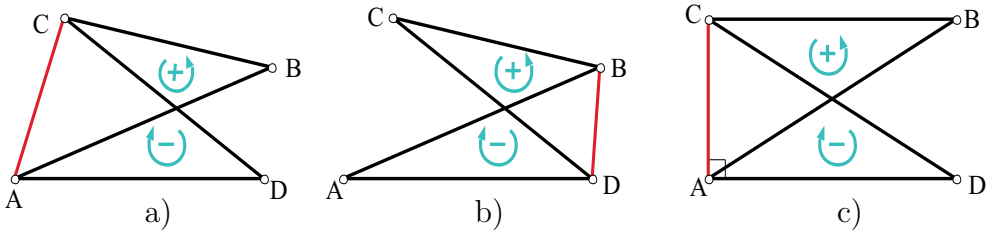
Figur 13.10

b) Wenn ein Viereck eine „einspringende“ Ecke hat, aber nicht „überschlagen“ ist, dann besitzt es nach (13.22) genau eine schlichte Triangulierung. In Figur 13.11 a) ist $((B,C,D),(D,A,B))$ schlicht. Dagegen ist $((A,B,C),(C,D,A))$ (Figur 13.11 b)) keine schlichte Triangulierung.



Figur 13.11

c) „Überschlagene Vierecke“ sind Vierecke vom Typ (A,B,C,D) mit $[A,B]\cap[C,D]\neq\emptyset$ oder mit $[B,C]\cap[D,A]\neq\varnothing$:



Figur 13.12

Weder $((A,B,C),(C,D,A))$ noch $((B,C,D),(D,A,B))$ sind in Figur 13.12 a), b) schlichte Triangulierungen. Deshalb besitzt das überschlagene Viereck (A,B,C,D) hier überhaupt keine schlichte Triangulierung und hat somit *keine Orientierung* und *kein Flächenmaß*.

Wenn z.B. (A,D,B,C) ein Rechteck ist (vgl. Figur 13.12 c)), dann ist $\mathcal{D}et(A,B,C,D) = \mathcal{D}et(A,B,C)+\mathcal{D}et(C,D,A) = 0$, da (A,B,C) und (C,D,A) vermittels der Spiegelung an der Geraden $<\frac{1}{2}(A+C),\frac{1}{2}(B+D)>$ gegensinnig kongruent sind. Dagegen existiert hier $F((A,D,B,C))$, d.h. die Reihenfolge der Ecken ist von entscheidender Bedeutung.

Download free eBooks at bookboon.com

E. Aufgaben

Zeigen Sie:

A 13.1. Sind $A, B \in \mathbb{L}^*$, so ist $\frac{1}{2}det(A,B) = \mathcal{D}et(0,A,B)$, und im Falle $\mathbb{K}A \neq \mathbb{K}B$ ist $(0, A, A+B, B)$ ein Parallelogramm mit $F(0, A, A+B, B) = |det(A,B)|$.

A 13.2. *Einfügen neuer Ecken.* Ist $\mathbf{A} := (A_1, ..., A_n) \in \mathbb{L}^n$ mit $n \geq 2$ und ist $B \in [A_\mu, A_{\mu+1}]$ für $\mu \in \{1, ..., n-1\}$ sowie $C \in [A_n, A_1]$, so sind $B, C \in \mathbf{Rd}(\mathbf{A})$, und es ist $\mathcal{D}et\mathbf{A} = \mathcal{D}et(A_1, ..., A_\mu, B, A_{\mu+1}, ..., A_n, C)$.
Bemerkung. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens darf man beispielsweise davon ausgehen, daß die Eckenmenge von $\mathbf{A}$ die Menge der Treffpunkte gewisser paralleler Geraden mit $\mathbf{Rd}(\mathbf{A})$ ist. Damit ergibt sich die Möglichkeit besonders übersichtlicher Triangulierungen.

A 13.3. Sind (A, B, C) und (A, B, X) Dreiecke und ist $g = <A, B>$, so gilt $X \in H_C(g)$ genau dann, wenn (A, B, C) und (A, B, X) die gleiche Orientierung haben.

A 13.4. Ist (A, B, C) ein Dreieck und ist $X \in \mathbb{L}$, so gilt $X \in [\{A, B, C\}]$ genau im Falle $F(X, A, B)+F(X, B, C)+F(X, C, A) = F(A, B, C)$.

A 13.5. Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so wird $F(\{A, B, C\}) := F(A, B, C)$ die **Fläche** von $\{A, B, C\}$ genannt (zur Wohldefiniertheit vgl. (13.12)). Sind H_a, H_b, H_c die Höhenfußpunkte von $\{A, B, C\}$ (vgl. (4.13)), so gilt: $F(\{A, B, C\}) = \frac{1}{2}|A-H_a|\cdot|B-C| = \frac{1}{2}|B-H_b|\cdot|C-A| = \frac{1}{2}|C-H_c|\cdot|A-B|$.

A 13.6. Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so besitzt $\{A, B, C\}$ genau einen Berührkreis m_0 (vgl. (5.29)) mit Mittelpunkt M_0 und Radius ρ_0 derart, daß $M_0 \in [\{A, B, C\}]$ ist. Man nennt m_0 den **Inkreis** von $\{A, B, C\}$.
Es ist $F(\{A, B, C\}) = \frac{1}{2}(|A-B|+|B-C|+|C-A|)\cdot\rho_0$.

A 13.7. Es seien $A \in \mathbb{L}\backslash\mathbb{K}$ und $\mathbf{A} := (0, 1, A, A^2, ..., A^n)$ mit $n \in \mathbb{N}^*$. Für $\nu = 1, ..., n$ sei $\varphi_\nu : \mathbb{L} \to \mathbb{L} : X \to A^{\nu-1}\cdot X$ und $\Delta_\nu := (0, A^{\nu-1}, A^\nu)$. Dann ist $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ eine Triangulierung von $\mathbf{A}$, und für $\nu = 1, ..., n$ erhalten wir $\varphi_\nu(\Delta_1) = \Delta_\nu$ sowie $\mathcal{D}et\Delta_\nu = \mathcal{D}et(\varphi_\nu)\cdot\mathcal{D}et\Delta_1 = |A|^{2(\nu-1)}\cdot\mathcal{D}et\Delta_1$. Demnach ist $(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ schlicht, und es ist $F(\mathbf{A}) = F(\Delta_1)\cdot(|A|^{2n}-1)/(|A|^2-1)$ im Falle $|A| \neq 1$ sowie $F(\mathbf{A}) = n\cdot F(\Delta_1)$ im Falle $|A| = 1$.
Bemerkung. Wählen wir $A := i$ und $n = 10$, so zeigt diese Aufgabe, daß die Dreiecke einer schlichten Triangulierung sich ggf. mehrfach „überlappen“ können.

Download free eBooks at bookboon.com

14 Winkel in klassischen euklidischen Ebenen

Für die nachfolgenden Untersuchungen denken wir uns eine klassische euklidische Ebene $\mathbb{E} = (\mathbb{P}, \equiv) = (\mathbb{P}, \mathbb{G}, \simeq) = \mathbb{E}(\mathbb{L}_{-1,0}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ vorgegeben, wobei $\mathbb{K}$ ein ($\mathbb{Q}$ umfassender) euklidischer Körper ist (vgl. §12 und insbesondere (12.10)).

Wir haben orientierte Winkel zwischen Geraden bereits ab §6 verwendet, ohne dafür Anordnungeigenschaften zu benötigen. Im folgenden wollen wir nun aber Winkel zwischen Strahlen betrachten, und deren Definition ist an Anordnung gebunden.

Wir werden sehen, daß sich viele Aspekte der gewöhnlichen Trigonometrie auf klassische euklidische Ebenen übertragen lassen. Dabei werden wir allerdings den Begriff des Bogenmaßes umgehen, da dieser an die Grenzwerttheorie der reellen Analysis gebunden ist.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

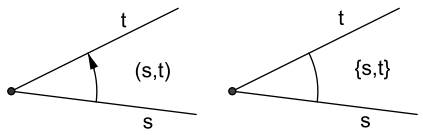
A. Winkel zwischen Strahlen

(14.1) Eine exakte Behandlung des Winkelbegriffs erfordert mehr Aufwand, als gemeinhin angenommen wird. Denn man muß zwischen verschiedenen Winkeltypen unterscheiden, für die jeweils eine geeignete Maßbestimmung einzuführen ist (vgl. §6). Dabei ergibt sich das zusätzliche Problem, daß die Winkelmessung nicht einmal im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kanonisch ist, wie die Unterscheidung zwischen Gradmaß und Bogenmaß zeigt.

Mit Aufgabe 1.5. wird deutlich, wie leicht man in Schwierigkeiten gerät, wenn man z. B. gewisse Anordnungstatsachen nicht genügend beachtet. Deshalb ist es durchaus bemerkenswert, daß man Winkel zwischen Geraden ohne Anordnung behandeln kann und dafür auch eine geeignete Winkelmessung einführen kann (vgl. (6.7), (6.29), (7.1) und (11.22)).

Es gibt nun allerdings Problemstellungen, bei deren Behandlung man es vorzieht, *Winkel zwischen Strahlen* zu betrachten, wie man dies bereits bei EUKLID findet.
Dabei kann man auf die Reihenfolge der Schenkel achten (Typ 1) oder nicht (Typ 2), d.h. Typ 1 läßt sich definieren als ein geordnetes Paar (s,t), bestehend aus zwei Strahlen s,t mit gemeinsamem Scheitel, und Typ 2 darf als Menge $\{s,t\}$ betrachtet werden, gebildet aus zwei Strahlen s,t mit gemeinsamem Scheitel.

Genauer wird (s,t) als **orientierter Winkel** mit s als **erstem** und t als **zweitem Schenkel** bezeichnet, und $\{s,t\}$ heißt **nichtorientierter Winkel** mit den **Schenkeln** s,t. Bei beiden Typen heißt der gemeinsame Scheitel der Strahlen auch der **Scheitel** des Winkels.



a) Typ 1 b) Typ 2

Figur 14.1

(14.2) Die Winkel vom Typ 1 werden in der Trigonometrie benutzt und treten zugleich auch als Drehwinkel in Erscheinung.
Die Winkel vom Typ 2 haben ihren festen Platz in der Vektorrechnung und werden auch gern in der Elementargeometrie verwendet, wobei man sie gelegentlich als *Winkelfelder* $[s \cup t]$ definiert findet.

Es liegt wohl auf der Hand, daß eine Verwendung verschiedener Winkeltypen zu verschiedenen Varianten von Sätzen führt; bemerkenswert ist jedoch, daß die Qualität eines Satzes von der Verwendung des Winkeltyps abhängig sein kann. Dieses wirkt sich besonders dann aus, wenn es sich um einen Satz handelt, der fundamental in dem Sinne ist, daß auf ihm eine Vielzahl weiterer Sätze beruht. Ein Beispiel eines solchen Satzes ist, wie §7 – §11 gezeigt haben, der Peripheriewinkelsatz. In der Tat werden wir sehen, daß dieser Satz bei Verwendung der $\mathbb{G}-$Winkel (vgl.(6.1)) die beste Umkehrung besitzt.

Download free eBooks at bookboon.com

B. Orientierte Winkel zwischen Strahlen

Um zu genaueren Aussagen über die Winkel vom Typ 1 und vom Typ 2 zu gelangen, befassen wir uns nun zunächst mit dem **Einheitskreis** $k_E := k_{0,1}$:

(14.3) **Satz**. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(1) Es ist $k_E = \{X \in \mathbb{L} \mid X\overline{X} = 1\} = \{X \in \mathbb{L} \mid |X| = 1\} = \{A/\overline{A} \mid A \in \mathbb{L}^*\}$.

(2) $k_E(\cdot)$ *ist eine abelsche Gruppe.*

(3) Die Abbildung $\varepsilon : \mathbb{G}_0(\oplus) \to k_E(\cdot) : \mathbb{K}A \to A/\overline{A}$ *mit* $A \in \mathbb{L}^*$ *ist ein Gruppenisomorphismus.*

Beweis (1) Es gilt $|A/\overline{A}| = 1 \ \forall\, A \in \mathbb{L}^*$ und $X+1 = X \cdot \overline{(X+1)} \ \forall\, X \in k_E$ sowie $i/\overline{i} = -1$. Mit (11.9) und (12.10) führt dies auf (1).
(2) folgt aus (12.10)(8) und aus $X^{-1} = \overline{X} \in k_E \ \forall\, X \in k_E$.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

(3) Wegen $\lambda A/\overline{\lambda A} = A/\overline{A}\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \forall\, A \in \mathbb{L}^*$ ist ε wohldefiniert, und wegen (1) ist ε surjektiv. Für $A, B \in \mathbb{L}^*$ gilt $[\ A/\overline{A} = B/\overline{B} \Leftrightarrow A\overline{B} = \overline{A}B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A\overline{B} \in \mathbb{K} \Leftrightarrow \mathbb{K}A = \mathbb{K}B\ ]$ und $\varepsilon(\mathbb{K}A \oplus \mathbb{K}B) = \varepsilon(\mathbb{K}AB) = (A/\overline{A})\cdot(B/\overline{B})$, und dies impliziert die Behauptung. □

(14.4) Ist $\delta : \mathbb{L} \to \mathbb{L} : X \to AX+B$ mit $A \in k_E \wedge B \in \mathbb{L}$ eine gerade Bewegung (vgl. (11.17)), so nennen wir den Punkt $W(\delta) := A$ des Einheitskreises auch den **Drehwert** von δ.
Ist $\mathfrak{D}r(D)(\circ)$ die abelsche Gruppe aller Drehungen um den festen Punkt $D \in \mathbb{L}$ (vgl. (5.13)), so besteht $\mathfrak{D}r(D)$ aus den Abbildungen der Form
$\delta : X \to A\cdot(X-D)+D$ mit $A \in k_E$ (vgl. (11.17)),
und dann ist $\varphi_D : \mathfrak{D}r(D)(\circ) \to k_E(\cdot) : \delta \to W(\delta)$ ein Gruppenisomorphismus, wie man sofort bestätigt.

Wir wollen die Drehwerte zur Messung von Winkeln heranziehen.
Anschaulich bedeutet dies, daß wir den Einheitskreis jetzt als eine Art „360°-Winkelmesser“ interpretieren. Aufgrund von (14.3)(2) wissen wir ja, wie mit diesen „Maßzahlen“ zu rechnen ist. Daß diese (abgesehen von $-1, 1$) in $\mathbb{L}$ und nicht in $\mathbb{K}$ liegen, ist aus mathematischer Sicht kein Nachteil.
Der Übergang zur geläufigen Winkelmessung wird später für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ unter Verwendung der Abbildung $\mathbb{R} \to k_E : x \to \cos x + i\cdot \sin x$ vollzogen.

Zunächst zeigen wir

(14.5) **Satz**. *Zu je zwei Strahlen s, t gibt es genau eine gerade Bewegung δ mit $\delta(s) = t$.*

Beweis: Ist S bzw. T der Scheitel von s bzw. t und ist $S' = s \cap k_{S,1}$ sowie $T' = t \cap k_{T,1}$ (vgl. (12.22)(3)) , so gibt es nach (5.18) genau eine gerade Bewegung δ mit $\delta(S) = T \wedge \delta(S') = T'$, und nach (12.12) ist dann $\delta(s) = t$. Ist δ' eine weitere gerade Bewegung mit $\delta'(s) = t$, so ist $\delta'(S) = T$, denn S (bzw. T) ist der einzige Punkt von s (bzw. t), der nicht zwischen zwei Punkten von s (bzw. t) liegt. Mit $\delta'(k_{S,1}) = k_{T,1}$ folgt dann $\delta'(S') = T'$, also $\delta' = \delta$ gemäß (5.18). □

(14.6) Nach (14.5) gehört zu jedem Winkel (s, t) vom Typ 1 genau eine Drehung δ mit $\delta(s) = t$. Wir bezeichnen den Drehwert $W(\delta)$ von δ zugleich auch als den **Drehwert** $W(s, t)$ des Winkels (s, t).

Im Falle $s = \mathbb{K}_+$ ist $W(s, t)$ einfach der Schnittpunkt von t mit dem Einheitskreis k_E, denn für $A := t \cap k_E \wedge \delta : X \to AX$ ist $\delta(\mathbb{K}_+) = t$.

Download free eBooks at bookboon.com

Allgemein ergibt sich für $B, C \in \mathbb{L}^* \wedge D \in \mathbb{L}$ die Beziehung

(1) $W(D+\mathbb{K}_+B, D+\mathbb{K}_+C) = \dfrac{\overline{B}C}{|\overline{B}C|} = \big(\dfrac{B}{|B|}\big)^{-1}\cdot\dfrac{C}{|C|}$,

denn es ist $\dfrac{\overline{B}C}{|\overline{B}C|}([D+\lambda B]-D)+D = D+(\dfrac{B\overline{B}}{|\overline{B}C|}\cdot\lambda)\cdot C \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{K}_+^*$.

Wegen $\mathbb{K}_+B = \mathbb{K}_+\, B/|B|$ und $\mathbb{K}_+C = \mathbb{K}_+\, C/|C|$ kann man sich die Strahlen in (1) auch in der **normierten Form** $D+\mathbb{K}_+B_0, D+\mathbb{K}_+C_0$ mit $B_0, C_0 \in k_E$ gegeben denken, und dann geht (1) über in

(2) $W(D+\mathbb{K}_+B_0, D+\mathbb{K}_+C_0) = \overline{B_0}C_0 = B_0^{-1}C_0$.

Da wir es gewohnt sind, Winkelmaße zu „addieren“, verwenden wir als Verknüpfungssymbol im weiteren „$\oplus$“ anstelle von „$\cdot$“ und erhalten für Winkel $(s,t),(u,v)$ vom Typ 1 nunmehr

(3) *Es ist* $[W(s,t)=1 \Leftrightarrow s=t]$ *und* $[W(s,t)=-1 \Leftrightarrow s\cup t \in \mathbb{G}]$.

(4) *Es ist* $W(s,t) = (W(t,s))^{-1} = \overline{W(t,s)} = \ominus W(t,s)$.

(5) **Schenkelaustauschbedingung**. *Es ist*
$W(t,s) = W(v,u) \ \Leftrightarrow\ W(s,t) = W(u,v) \ \Leftrightarrow\ W(s,u) = W(t,v)$.

(6) **Additivitätssatz**. *Es ist* $W(r,s)\oplus W(s,t) = W(r,t)$
für je drei Strahlen r, s, t mit gemeinsamem Scheitel.

Wir bezeichnen zwei Winkel $(s,t),(s',t')$ vom Typ 1 als **konform**, in Zeichen: $(s,t) \simeq (s',t')$, wenn eine gleichsinnige Ähnlichkeit φ mit $\varphi(s) = s' \wedge \varphi(t) = t'$ existiert. Ist Ω_1 die Menge aller Winkel vom Typ 1, so ist die erklärte Konformität offenbar eine Äquivalenzrelation auf Ω_1.

Der folgende Satz zeigt, daß die Drehwerte genau die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Konformität beschreiben:

(14.7) **Satz** *Zwei Winkel vom Typ 1 sind genau dann konform, wenn sie den gleichen Drehwert haben.*

Beweis: Es sei $s = D+\mathbb{K}_+A$ und $t = D+\mathbb{K}_+B$ mit $A, B \in k_E$ und $D \in \mathbb{L}$. 1) Ist $\varphi : \mathbb{L} \to \mathbb{L} : X \to EX+F$ mit $E \in \mathbb{L}^* \wedge F \in \mathbb{L}$ gegeben, so ist $W(\varphi(s),\varphi(t)) = W(\varphi(D)+\mathbb{K}_+EA, \varphi(D)+\mathbb{K}_+EB) = \dfrac{\overline{EA}EB}{|\overline{EA}EB|} = \overline{A}B =$
$= W(s,t)$. 2) Sind $s' = D'+\mathbb{K}_+A'$ und $t' = D'+\mathbb{K}_+B'$ mit $A', B' \in k_E \wedge D' \in \mathbb{L}$ gegeben und ist $W(s,t) = W(s',t')$, so ist $A^{-1}B = A'^{-1}B'$, also $\psi(s) = s' \wedge \psi(t) = t'$ für $\psi : \mathbb{L} \to \mathbb{L} : X \to (A'/A)(X-D)+D'$. $\square$

Download free eBooks at bookboon.com

(14.8) **Corollar 1**. *Zwei Winkel vom Typ 1 sind genau dann konform, wenn sie gleichsinnig kongruent sind.*

Der *Beweis* ergibt sich mit (14.7) aus dem Beweis von (14.7), da die dort betrachtete Abbildung ψ eine gerade Bewegung ist. □

(14.9) **Corollar 2**. *Gegensinnige Ähnlichkeiten sind gegensinnig winkeltreu, d.h. für* $(s,t) \in \Omega_1$ *und* $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^-$ *gilt* $(s,t) \simeq (\varphi(t), \varphi(s))$.

Der *Beweis* ergibt sich analog zum 1. Teil des Beweises von (14.7) in Verbindung mit (14.7). □

Weiter erhalten wir

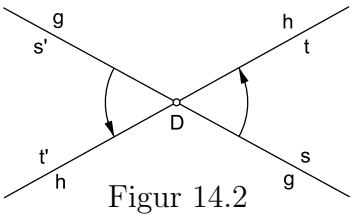
(14.10) **Abtragbarkeit von Winkeln des Typs 1.** *Ist* $(r,r') \in \Omega_1$ *und sind* s,t *Strahlen, so gibt es eindeutig bestimmte Strahlen* s',t' *mit* $(s,s'),(t',t) \in \Omega_1 \ \wedge \ (r,r') \simeq (s,s') \ \wedge \ (r,r') \simeq (t',t)$.

Beweis: 1) Nach (14.5) gibt es ein $\delta \in \mathfrak{B}^+$ mit $\delta(r) = s$, und dann ist $(r,r') \simeq (s,s')$ für $s' := \delta(r')$. Ist $(s,s'') \in \Omega_1$ mit $(r,r') \simeq (s,s'')$, so gilt $W(s,s') = W(s,s'')$ gemäß (14.7), und mit (14.6)(2) folgt $s' = s''$.
2) Nach 1) gibt es genau einen Strahl t' mit $(r',r) \simeq (t,t')$, also mit $(r,r') \simeq (t',t)$ gemäß (14.6)(5). □

Wir setzen $0^g := 360^g := 1$, $180^g := -1$, $90^g := i$, $270^g := -i$ und erhalten

(14.11) **Satz**. *Sind* s,s',t,t' *Strahlen mit gemeinsamem Scheitel und sind* $g := s \cup s'$ *und* $h := t \cup t'$ *Geraden, so gilt*

(1) $W(s,s) = 0^g \ \wedge \ W(s,s') = W(s',s) = 180^g$,
(2) $W(t,s') = W(t',s) = 180^g \ominus W(s,t)$,
(3) $W(s,t) = W(s',t')$
(4) $\sphericalangle(g,h) = \mathbb{K}\,W(s,t) = \mathbb{K}\,W(s',t) = \mathbb{K}\,W(s,t') = \mathbb{K}\,W(s',t')$.



Figur 14.2

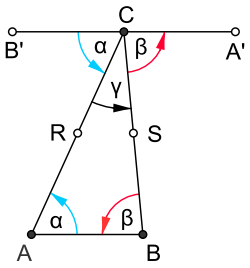
Wir bezeichnen (s,s), (t,t) *als* **Nullwinkel** *und* (s,s'), (t,t') *als* **gestreckte Winkel**. *Ferner werden* (t,s'), (t',s) *die* **Nebenwinkel**, (s',t') *der* **Gegenwinkel** *und* (t,s) *der* **inverse Winkel** *von* (s,t) *genannt (Figur 14.2).*

Beweis: Es seien $s := D{+}\mathbb{K}_+A, s' := D{+}\mathbb{K}_+(-A), t := D{+}\mathbb{K}_+B$ und $t' := D{+}\mathbb{K}_+(-B)$ mit $D \in \mathbb{L}$ und $A,B \in k_E$. Dann ist $W(s,s') = -1 \ \wedge \ W(s,t) = \overline{A}B \ \wedge \ W(t,s') = W(t',s) = (-1)\cdot\overline{\overline{A}B} \ \wedge \ W(s',t') = \overline{A}B$, und daraus folgt mit (11.22)(2) und (14.6) die Behauptung. □

Download free eBooks at bookboon.com

Mit der Notation $W(X,Y,Z) := W([Y,X>,[Y,Z>)$ für $X,Y,Z \in \mathbb{L}$ mit $Y \neq X,Z$ folgt

(14.12) **Satz über die Winkelsumme im Dreieck.** *Ist $\{A,B,C\}$ ein Dreieck, so ist*
$W(B,A,C) \oplus W(A,C,B) \oplus W(C,B,A) = 180^g$.



Figur 14.3

Beweis: Ist R bzw. S die Mitte von $\{A,C\}$ bzw. $\{B,C\}$ und gilt $B' := \widetilde{R}(B)$ sowie $A' := \widetilde{S}(A)$, so ist $\alpha := W(B,A,C) = W(B',C,A)$ und $\beta := W(C,B,A) = W(B,C,A')$ gemäß (14.7) bzgl. $\widetilde{R}$ und $\widetilde{S}$. Für $\gamma := W(A,C,B)$ führen (14.6)(6), (14.6)(3) dann auf $\alpha \oplus \gamma \oplus \beta = W(B',C,A') = 180^g$ (Figur 14.3). □

Als wesentlich für die weiteren Untersuchungen erweist sich nun

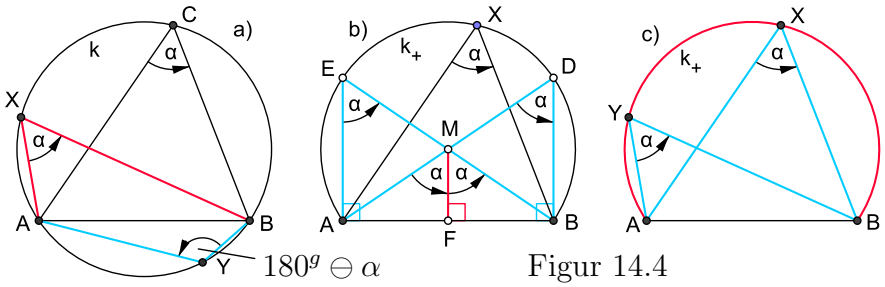
(14.13) **Erster Satz zur Maßgleichheit von Winkeln**. *Es gilt:*
(1) Sind (A,B,C), (A',B',C') Dreiecke gleicher Orientierung, so ist $[\measuredangle\langle A,B,C\rangle = \measuredangle\langle A',B',C'\rangle \Leftrightarrow W(A,B,C) = W(A',B',C')]$.
(2) Sind (A,B,C), (A',B',C') Dreiecke verschiedener Orientierung, so ist $[\measuredangle\langle A,B,C\rangle = \measuredangle\langle A',B',C'\rangle \Leftrightarrow -W(A,B,C) = W(A',B',C')]$.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Beweis: Nach (9.5), (9.1)(1), (11.22)(1), (13.20)(1) und (14.7) dürfen wir o.B.d.A. von $A = A' = 1 \wedge B = B' = 0$ ausgehen. Für $D := C/|C| \wedge D' := C'/|C'|$ ist dann $[\,\measuredangle\langle A,B,C\rangle = \measuredangle\langle A',B',C'\rangle \Leftrightarrow \mathbb{K}D = \mathbb{K}D' \Leftrightarrow D = D' \vee -D = D'\,]$ mit $D = W(A,B,C) \notin \mathbb{K}$ und $D' = W(A',B',C') \notin \mathbb{K}$. Ist $D = D' \vee -D = D'$, so haben (A,B,C) und (A',B',C') nach (13.22) genau dann gleiche Orientierung, wenn $D = D'$ ist. □

Mit Hilfe von (14.13) folgt nun

(14.14) **Randwinkelsatz für Winkel vom Typ 1**. *Ist k ein Kreis und sind $A, B, C \overset{\in}{\neq} k$, so gilt für $X, Y \in \mathbb{L}\backslash\{A,B\}$ (Figur 14.4 a)):*
(1) $X \in k \wedge X \in H_C(<A,B>) \Leftrightarrow W(A,X,B) = W(A,C,B)$.
(2) $Y \in k \wedge Y \notin H_C(<A,B>) \Leftrightarrow W(B,Y,A) = 180^g \ominus W(A,C,B)$.



Figur 14.4

Beweis: Die Aussagen (1) und (2) folgen unmittelbar aus (6.24), (12.12), (13.22) und (14.13), denn nach (14.6) ist $W(A,Y,B) = -W(A,C,B) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow W(B,Y,A) = (-1)\cdot W(B,C,A) = 180^g \ominus W(A,C,B)$. □

(14.15) **Mittenwinkelsatz für Winkel vom Typ 1**. *Gegeben seien zwei verschiedene Punkte A, B eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M. Ist $M \notin <A,B>$ und ist F der Fußpunkt des Lotes von M auf $<A,B>$, so gilt für jedes $X \in k_+ := k \cap H_M(<A,B>)$:*
(1) $W(A,X,B) = W(A,M,F) = W(F,M,B)$ *(Figur 14.4 b)),*
(2) $W(A,X,B) \oplus W(A,X,B) = W(A,M,B)$.

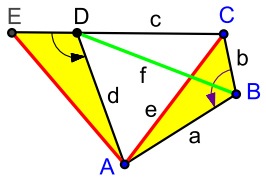
Beweis: Es sei $\{A,D\} := k \cap <A,M>$ und $\{B,E\} := k \cap <B,M>$. Wegen $M \in]A,D[\cap]B,E[$ gilt dann $D, E \in H_M(<A,B>)$. Nach (14.14) ist $W(A,D,B) = W(A,X,B) = W(A,E,B)$, und daraus ergibt sich in Verbindung mit (4.10) und (14.7) die Behauptung durch Anwendung der Translation $\tau_{D,M}$ bzw. $\tau_{E,M}$ auf (A,D,B) bzw. (A,E,B). □

(14.16) *Bemerkungen.* Für den in (14.15) nicht erfaßten Fall $M \in <A,B>$ verweisen wir auf den Satz des THALES (4.10).
Fragt man bei festem Drehwert $\alpha \neq 0^g, 180^g$ und für fest vorgegebene Punkte $A, B \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$ nach der Menge aller Punkte $X \in \mathbb{L}$ mit $W(A,X,B) = \alpha$, so ergibt sich nach (14.14) als Lösung ein Kreisbogen (Figur 14.4 c)).
Demnach findet die Frage nach der *Umkehrung des Randwinkelsatzes* für Winkel des Typs 1 eine gänzlich andere Antwort als bei $\mathbb{G}$-Winkeln, wo sich gemäß (6.24) ein vollständiger Kreis ergibt. Mit (14.14) folgt

Download free eBooks at bookboon.com

(14.17) **Satz des Ptolemaios**. *Sind* $A,B,C,D \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$ *und ist* $a := |A-B|$, $b := |B-C|, c := |C-D|, d := |D-A|, e := |A-C|, f := |B-D|$, *so gilt*

$\boxed{(*)\quad a\cdot c + b\cdot d \geq e\cdot f}$. *Es ist* $\boxed{a\cdot c + b\cdot d = e\cdot f}$ *(vgl. Figur 14.5) genau dann, wenn* A,B,C,D *kollinear sind mit* $|\,]A,C[\cap\{B,D\}\,| = 1$, *oder wenn* A,B,C,D *konzyklisch sind mit* $]A,C[\cap]B,D[\neq\varnothing$.



Figur 14.5

Beweis: O.B.d.A. sei $A=0$. Ferner sei $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\varphi(X) = XD/B \;\forall\; X \in \mathbb{L}$. Ist $E := CD/B$, so sind die Tripel (C,B,A) und (E,D,A) ähnlich vermittels φ, und es folgt $\beta := W(C,B,A) = W(E,D,A)$.
1) Nach (12.10)(11) gilt $|C-D|+|D-E| \geq |C-E|$, also $c+|(B-C)D/B| \geq |C(B-D)/B|$ und damit $c + bd/a \geq ef/a$. Dies impliziert $(*)$.
2) Nach (12.13)(2) ist $a\cdot c + b\cdot d = e\cdot f \Leftrightarrow c+|(B-C)D/B| = |C(B-D)/B|$ $\Leftrightarrow |C-D|+|D-E| = |C-E| \Leftrightarrow D \in]C,E[$, und nach (14.6)(3),(6) ist

Die Antwort ist 42.
Oder Baden-Württemberg.
BW-jetzt.de facebook.com/BWjetzt @BWjetzt
Baden-Württemberg
Wir können alles. Außer Hochdeutsch.
Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

$D \in]C,E[\Leftrightarrow W(E,D,A) \oplus W(A,D,C) = 180^g \Leftrightarrow \beta \oplus W(A,D,C) = 180^g$. Dies führt auf die Behauptung, nämlich im Falle $B \in <A,C>$ gemäß (14.6)(3) und sonst gemäß (14.14)(2), (12.16)(2) und (12.22)(1). □

C. Trigonometrische Funktionen

(14.18) Wir wollen jetzt trigonometrische Funktionen einführen. Dabei gehen wir weiterhin von einem beliebigen euklidischen Körper $\mathbb{K}$ aus.

Im Hinblick auf die Bemerkungen aus (14.4) ist es geboten, als Urbilder nicht die Elemente von $\mathbb{K}$, sondern die Elemente von k_E zu wählen. Unsere Funktionen sind dann nicht mit den üblichen trigonometrischen Funktionen identisch und sollen deshalb als „Sin“, „Cos“, „Tan“, „Cot“ notiert werden, gelesen „**Sinus**“, „**Cosinus**“, „**Tangens**“, „**Cotangens**“. Wir setzen fest:

Ist $Z = x + iy \in k_E$ mit $x, y \in \mathbb{K}$, so sei

(1) $\operatorname{Sin} Z := y,\ \operatorname{Cos} Z := x,\ \operatorname{Tan} Z := y/x,\ \operatorname{Cot} Z := x/y.$

Dabei sind $1/0$ und $-1/0$ als nicht in $\mathbb{K}$ gelegene Elemente $+\infty$ bzw. $-\infty$ zu betrachten, wobei ∞ als „**Unendlich**“ gelesen wird und wobei man formal z. B. von den Definitionen $+\infty := (1, \mathbb{K})$ und $-\infty := (-1, \mathbb{K})$ ausgehen kann. Hierbei ist mit $\pm\infty$ wie üblich zu rechnen.

Unter Verwendung der in (14.6) und vor (14.12) getroffenen Vereinbarungen rechnet man leicht nach, daß für die eingeführten Funktionen die sämtlichen geläufigen trigonometrischen Formeln gelten (vgl. [34]).

Im folgenden notieren wir für $Z, W \in k_E$ lediglich die Formeln

(2) $Z = \operatorname{Cos} Z + i \cdot \operatorname{Sin} Z,$
(3) $\operatorname{Cos}^2 Z + \operatorname{Sin}^2 Z = 1,$
(4) $\operatorname{Sin} Z = (Z - \overline{Z})/2i \wedge \operatorname{Cos} Z = (Z + \overline{Z})/2,$
(5) $\operatorname{Tan} Z = (Z - \overline{Z})/(iZ + i\overline{Z}) = \operatorname{Sin} Z / \operatorname{Cos} Z = (\operatorname{Cot} Z)^{-1},$
(6) $\operatorname{Sin} 0^g = 0,\ \operatorname{Sin} 90^g = 1,\ \operatorname{Sin} 180^g = 0,$
(7) $\operatorname{Cos} 0^g = 1,\ \operatorname{Cos} 90^g = 0,\ \operatorname{Cos} 180^g = -1,$
(8) $\operatorname{Sin} Z = \operatorname{Sin}(180^g \ominus Z) = -\operatorname{Sin}(\ominus Z),$
(9) $\operatorname{Cos} Z = -\operatorname{Cos}(180^g \ominus Z) = \operatorname{Cos}(\ominus Z),$
(10) $\operatorname{Sin}(90^g \ominus Z) = \operatorname{Cos} Z \ \wedge\ \operatorname{Cos}(90^g \ominus Z) = \operatorname{Sin} Z,$
(11) $\operatorname{Sin}(Z \oplus W) = \operatorname{Sin} Z \cdot \operatorname{Cos} W + \operatorname{Cos} Z \cdot \operatorname{Sin} W,$
(12) $\operatorname{Cos}(Z \oplus W) = \operatorname{Cos} Z \cdot \operatorname{Cos} W - \operatorname{Sin} Z \cdot \operatorname{Sin} W.$

Download free eBooks at bookboon.com

Mit (11.11), (12.10), (13.1) und (14.6)(1) erhalten wir

(13) $W(A,0,B) = \dfrac{A \circ B}{|A|\cdot|B|} + i\cdot\dfrac{\det(A,B)}{|A|\cdot|B|} \quad \forall\ A,B \in \mathbb{L}^*$,

denn für $A = a{+}ib \wedge B = c{+}id$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{K}$ ist $|A|\cdot|B|\cdot W(A,0,B) =$
$= (a{-}ib)\cdot(c{+}id) = (ac{+}bd){+}i\cdot(ad{-}bc) = A \circ B + i\cdot\det(A,B)$.

In Verbindung mit (2) führt (13) auf

(14) $\boxed{A \circ B = |A|\cdot|B|\cdot \operatorname{Cos}(W(A,0,B))} \quad \forall\ A,B \in \mathbb{L}^*$ und

(15) $\boxed{\det(A,B) = |A|\cdot|B|\cdot \operatorname{Sin}(W(A,0,B))} \quad \forall\ A,B \in \mathbb{L}^*$

und damit auf zwei wichtige Formeln, die zeigen, wie Skalarprodukt und Determinante mit Drehwerten verbunden sind. Aus (15) und (13.10) folgt

(16) $\mathcal{D}et(B,A,C) = \frac{1}{2}|A{-}B|\cdot|C{-}B|\cdot \operatorname{Sin}(W(A,B,C)) \quad \forall\ A,B,C \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$.

(14.19) Es sei $k_E^+ := \{Z \in k_E \mid \operatorname{Sin} Z \geq 0\}$ und $k_E^{-*} := \{Z \in k_E \mid \operatorname{Sin} Z < 0\}$. Wir nennen k_E^+ den (abgeschlossenen) **oberen Meßbogen** und k_E^{-*} den (offenen) **unteren Meßbogen.**

Wir denken uns die Punkte von k_E^+ und k_E^{-*} durch

(1) $Z <_\circ W \Leftrightarrow CosZ > CosW \quad \forall\ Z,W \in k_E^+$,

(2) $Z <_\circ W \Leftrightarrow CosZ < CosW \quad \forall\ Z,W \in k_E^{-*}$

jeweils total geordnet und gehen außerdem von

(3) $Z <_\circ W \quad \forall\ Z \in k_E^+, \quad \forall\ W \in k_E^{-*}$

aus. Dann ist $k_E(<_\circ)$ eine Kette, mit deren Hilfe sich die Winkel vom Typ 1 der Größe nach vergleichen lassen. Man setze nämlich

(4) $(s,t) < (s',t') :\Leftrightarrow W(s,t) <_\circ W(s',t') \quad \forall\ (s,t),(s',t') \in \Omega_1$.

Gelegentlich werden wir auf diese Vergleichung zurückkommen. Zunächst wollen wir uns nun aber mit den Winkeln vom Typ 2 befassen.

D. Gewöhnliche Winkel

(14.20) Wir nennen die Winkel vom Typ 2 auch **gewöhnliche Winkel**, da sie seit alters her betrachtet werden. Ihre Gesamtheit sei Ω_2.

Winkel $\{s,t\},\{s',t'\} \in \Omega_2$ heißen **kongruent** bzw. **ähnlich**, wenn es ein $\varphi \in \mathfrak{B}$ bzw. ein $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}$ mit $\varphi(\{s,t\}) := \{\varphi(s),\varphi(t)\} = \{s',t'\}$ gibt.

Da man sich $\{s,t\} \in \Omega_2$ in der Form $\{D{+}\mathbb{K}_+A, D{+}\mathbb{K}_+B\}$ mit $D \in \mathbb{L}$ $\wedge\ A,B \in k_E$ gegeben denken kann und da $D \in m_{D+A,D+B} \quad \forall\ A,B \overset{\in}{\neq} k_E$

Download free eBooks at bookboon.com

ist, folgt $\sigma(\{s,t\}) = \{s,t\}$ für $\sigma := \widetilde{m}_{D+A,D+B}$ im Falle $A \neq B$ und für $\sigma := <D, D+A>^{\sim}$ im Falle $A = B$.

Gibt es also ein $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}$ mit $\{\varphi(s), \varphi(t)\} = \{s', t'\}$, so kann man o.B.d.A. von $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}^{+}$ ausgehen, indem man ggf. φ durch $\varphi \circ \sigma$ ersetzt.
In Verbindung mit (14.7) bedeutet dies, daß $\{s,t\}$ und $\{s',t'\}$ genau dann *ähnlich* sind, wenn $(*)$ $\boxed{W(s,t) = W(s',t') \vee W(s,t) = W(t',s')}$ gilt, und dies ist nach (14.8) genau dann der Fall, wenn $\{s,t\}$ und $\{s',t'\}$ *kongruent* sind.

(14.21) Nach (14.6)(4) und (14.20)$(*)$ gehört zu jedem gewöhnlichen Winkel $\{s,t\} \in \Omega_2$ ein eindeutig bestimmtes Element $\measuredangle\{s,t\} \in k_E^+$ mit $\measuredangle\{s,t\} \in \{W(s,t), W(t,s)\}$. Wir nennen $\measuredangle\{s,t\}$ die **Größe** des Winkels $\{s,t\}$. Für $A, B, C \in \mathbb{L}$ mit $A \neq B, C$ verwenden wir im weiteren die Notation $\measuredangle(B,A,C) := \measuredangle\{[A,B>, [A,C>\}$.

In Verbindung mit (14.20) erhalten wir dann

(14.22) **Satz**. *Für $\{s,t\}, \{s',t'\} \in \Omega_2$ sind äquivalent:*
(1) Es gibt ein $\varphi \in \ddot{\mathbb{A}}$ mit $\varphi(\{s,t\}) = \{s',t'\}$.
(2) Es ist $\measuredangle\{s,t\} = \measuredangle\{s',t'\}$.
(3) Es gilt $W(s,t) = W(s',t') \vee W(s,t) = W(t',s')$.

Beweis: Nach (14.20) gilt $[(1) \Leftrightarrow (3)]$, und gemäß (14.6)(4) ist $[\,(2) \Leftrightarrow \{W(s,t), W(t,s)\} = \{W(s',t'), W(t',s')\} \Leftrightarrow (3)\,]$. $\square$

Weiter ergibt sich die folgende Aussage, die die Winkel des Typs 1 und des Typs 2 über den Orientierungsbegriff miteinander verbindet:

(14.23) **Zweiter Satz zur Maßgleichheit von Winkeln** *Es gilt:*
(1) Ist (A,B,C) ein Dreieck mit $\mathcal{D}et(A,B,C) < 0$,
so ist $\measuredangle(A,B,C) = W(A,B,C)$.
(2) Ist (A,B,C) ein Dreieck mit $\mathcal{D}et(A,B,C) > 0$,
so ist $\measuredangle(A,B,C) = \overline{W(A,B,C)} = W(C,B,A)$.
(3) Sind A,B,C kollinear mit $A \neq B, C$,
so ist $\measuredangle(A,B,C) = W(A,B,C)$.

Beweis: Wegen (14.7) und (14.22) dürfen wir nach Anwendung einer gleichsinnigen Ähnlichkeit o.B.d.A. von $A = 1 \wedge B = 0 \wedge C \neq 0$ ausgehen. Dann ist $\mathcal{D}et(A,B,C) = -\frac{1}{2} Im(C)$, und im Falle $C \notin \mathbb{K}$ ist $W(A,B,C) = C/|C|$, also $[\,W(A,B,C) \in k_E^+ \Leftrightarrow \mathcal{D}et(A,B,C) < 0\,]$. Dies impliziert (1) und (2). Im Falle $C \in \mathbb{K}$ gilt $W(A,B,C) = \overline{W(A,B,C)}$, also (3). $\square$

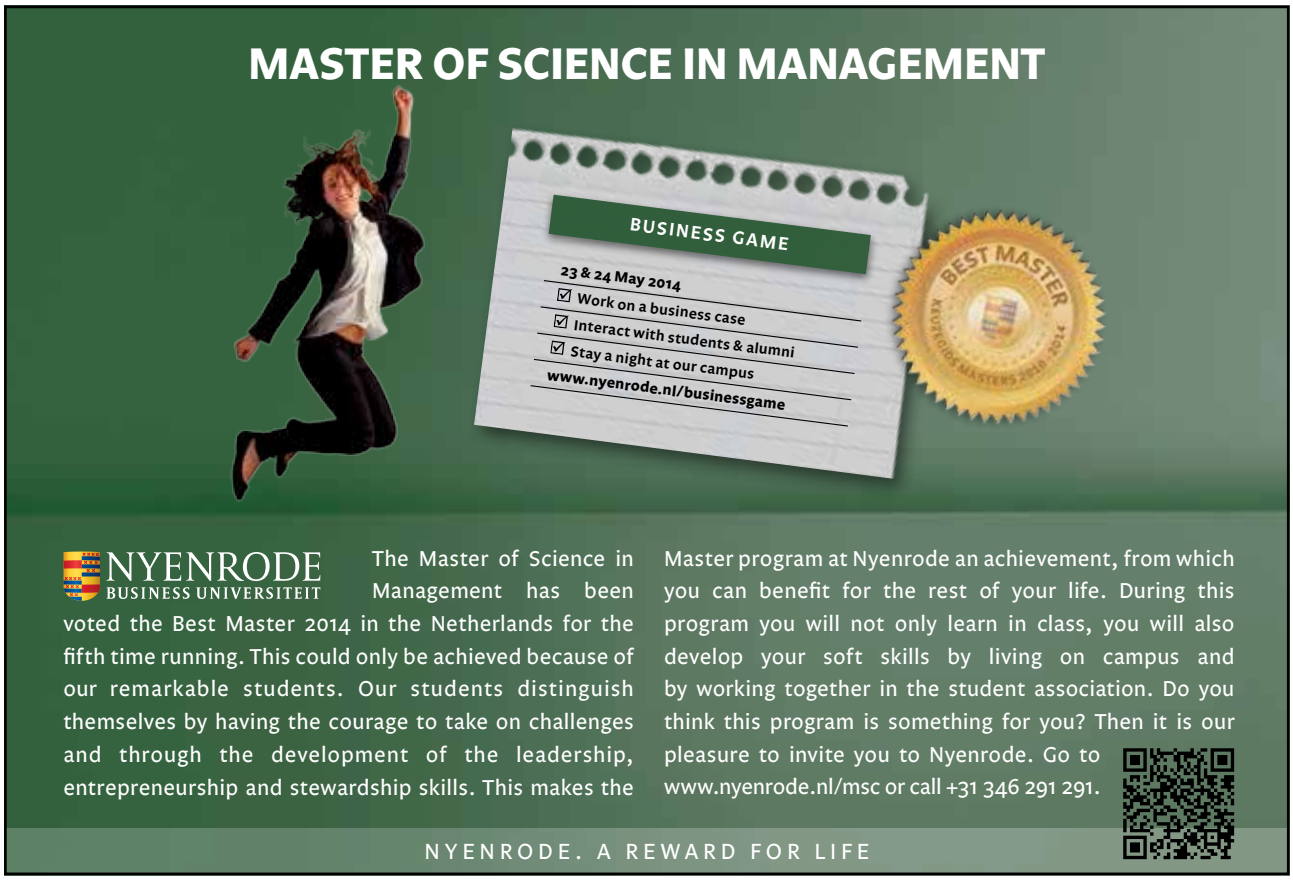
Download free eBooks at bookboon.com

(14.24) Ein Winkel $\{s,t\} \in \Omega_2$ heißt **Nullwinkel**, wenn $s = t$ ist, **spitzer Winkel**, wenn $\sphericalangle\{s,t\} <_\circ 90^g$ ist, **rechter Winkel**, wenn $\sphericalangle\{s,t\} = 90^g$ ist, **stumpfer Winkel**, wenn $90^g <_\circ \sphericalangle\{s,t\}$ ist, und **gestreckter Winkel**, wenn $s \cup t \in \mathbb{G}$ ist. Ferner nennen wir $\{s,t\}$ **kleiner** als $\{s',t'\} \in \Omega_2$, in Zeichen: $\{s,t\} < \{s',t'\}$, wenn $\sphericalangle\{s,t\} <_\circ \sphericalangle\{s',t'\}$ ist.
Ausgehend von $<$ und $<_\circ$ werden die Zeichen $\leq, \leq_\circ, \geq, \geq_\circ, >, >_\circ$ in üblicher Weise verwendet. Damit folgt

(14.25) **Satz**. *Sind s,t,s',t' Strahlen mit gemeinsamem Scheitel und sind $s \cup s', t \cup t' \in \mathbb{G}$, so gilt (vgl. Figur 14.2):*

(1) Es ist $\sphericalangle\{s,t\} = \sphericalangle\{t,s\}$ mit $0^g \leq_\circ \sphericalangle\{s,t\} \leq_\circ 180^g$.
(2) Es ist $[\sphericalangle\{s,t\} = 0^g \Leftrightarrow s = t]$ und $[\sphericalangle\{s,t\} = 180^g \Leftrightarrow s \cup t \in \mathbb{G}]$.
(3) Es ist $\sphericalangle\{s,t\} = \sphericalangle\{s',t'\} = 180^g \ominus \sphericalangle\{s',t\} = 180^g \ominus \sphericalangle\{s,t'\}$.
(4) Es ist $90^g \oplus 90^g = 180^g$ und $[\sphericalangle\{s,t\} <_\circ 90^g \Leftrightarrow \sphericalangle\{s,t'\} >_\circ 90^g]$.

Beweis: (14.11), (14.18)(7), (14.18)(9), (14.21), (14.23). □



Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Weiter erhalten wir

(14.26) **Abtragbarkeit gewöhnlicher Winkel**. *Es sei* $\{r,s\}\in\Omega_2$ *fest vorgegeben, und es sei* t *ein Strahl mit* D *als Scheitel und mit* g *als Trägergerade. Ist* $\overline{H(g)}$ *eine abgeschlossene Halbebene mit dem Rand* g*, so existiert genau ein Strahl* u *mit* D *als Scheitel, der die Bedingung* $u\subseteq\overline{H(g)}\wedge\sphericalangle\{r,s\}=\sphericalangle\{t,u\}$ *erfüllt.*

Beweis: 1) Ist u ein Strahl aus D mit $\sphericalangle\{r,s\}=\sphericalangle\{t,u\}$, so führt (14.21) auf $(r,s)\simeq(t,u)\vee(r,s)\simeq(u,t)$. 2) Nach (14.10) gibt es genau einen Strahl v bzw. w aus D mit $(r,s)\simeq(t,v)$ bzw. $(r,s)\simeq(w,t)$. Gemäß (14.9) und (14.10) folgt $\widetilde{g}(t)=t$ und $\widetilde{g}(v)=w$, und nach (14.22) ist $\sphericalangle\{r,s\}=$ $=\sphericalangle\{t,v\}\ =\sphericalangle\{t,w\}$. Da $\widetilde{g}$ die durch g bestimmten Halbebenen vertauscht (vgl. (12.16)(4)), gilt entweder $v\subseteq\overline{H(g)}$ oder $w\subseteq\overline{H(g)}$ oder $v=w\subseteq g$. 3) Aus 1) und 2) folgt die Behauptung. □

Mit (14.12) und (14.23) ergibt sich

(14.27) **Satz über die Winkelsumme im Dreieck**.
Ist $\{A,B,C\}$ *ein Dreieck, so ist (vgl. Figur 14.3)*
$\sphericalangle(B,A,C)\oplus\sphericalangle(A,C,B)\oplus\sphericalangle(C,B,A)=180^g$.

Beweis: Nach (13.12)(1) haben die Tripel (B,A,C), (A,C,B), (C,B,A) die gleiche Orientierung. Deshalb folgt die Behauptung mit (14.23) direkt aus (14.12). □

Als weitere wichtige Aussage zeigen wir

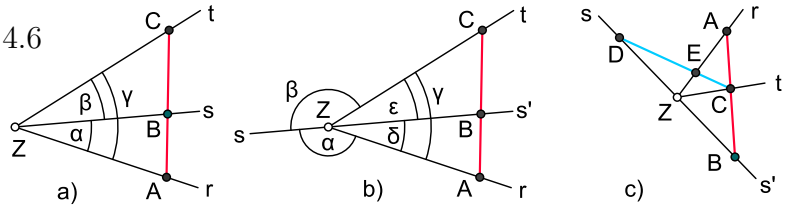
(14.28) **Satz zur Additivität gewöhnlicher Winkel**. *Gegeben seien Strahlen* r,s,t *mit gemeinsamem Scheitel* Z *und mit paarweise verschiedenen Trägergeraden. Dann gilt (Figur 14.6):*

(1) Ist $\boxed{s\subseteq[r\cup t]}$*, so ist* $\boxed{\sphericalangle\{r,s\}\oplus\sphericalangle\{s,t\}=\sphericalangle\{r,t\}}$.

(2) Ist $s':=\widetilde{Z}(s)\in[r\cup t]$*, so ist* $\sphericalangle\{r,s\}\oplus\sphericalangle\{s,t\}\oplus\sphericalangle\{t,r\}=360^g$.

(3) Es ist $r\subseteq[s\cup t]\ \dot\vee\ s\subseteq[r\cup t]\ \dot\vee\ t\subseteq[r\cup s]\ \dot\vee\ s'\subseteq[r\cup t]$.

Figur 14.6



Download free eBooks at bookboon.com

Beweis: a) Es seien $A, B, C \in \mathbb{L}\backslash\{Z\}$ mit $A \in r$, $C \in t$ und $B = s \cap]A, C[$ (vgl. (12.19)(1)). Nach (13.22) haben $(Z, A, B), (Z, A, C), (Z, B, C)$ die gleiche Orientierung, und mit (14.6)(6) und (14.23) folgt dann (1).

b) Werden die Winkelgrößen gemäß Figur 14.6 b) benannt, so führen (14.25)(3) und a) auf $\alpha \oplus \beta \oplus \gamma = (\alpha \oplus \delta) \oplus (\beta \oplus \varepsilon) = 360^g$, also auf (2).

c) α) Wenn es eine Gerade g mit $g \not\ni Z$ gibt, die r, s, t trifft, so führt (12.14)(8) mit (12.19)(1) auf $r \subseteq [s \cup t]\ \dot\vee\ s \subseteq [r \cup t]\ \dot\vee\ t \subseteq [r \cup s]$.

β) Es liege nicht der Fall α) vor. Zu $A \in r\backslash\{Z\}$ existiert dann ein $C \in t\backslash\{Z\}$ mit $<A, C> \nparallel s \cup s'$, und dann gibt es ein $B \in (s'\backslash\{Z\}) \cap <A, C>$. Es sei $D := \widetilde{Z}(B)$. Wäre $C \in [A, B]$ (Figur 14.6 c)), so gäbe es nach (12.15) bzgl. (Z, A, B) ein $E \in]Z, A[\cap <C, D>$, und dann wäre $<C, D> \cap r \neq \varnothing$. Demnach ist $C \notin [A, B]$ und analog $A \notin [B, C]$, also $B \in [A, C]$ gemäß (12.14) und damit $s' \subseteq [r \cup t]$. γ) Aus α) und β) folgt (3). □

Ergänzend notieren wir

(14.29) **Satz zur Anordnung von $\mathbf{k_E}$.** *Sind* $X, Y \in k_E^{+*} := k_E^+\backslash\{1, -1\}$, *so gilt* $X <_\circ X \oplus Y$ *und* $Y <_\circ X \oplus Y$.

Beweis: Wegen $X \oplus Y = Y \oplus X$ genügt es, die erste Ungleichung zu zeigen. Diese ist erfüllt, wenn $X \oplus Y \geq 180^g$ ist, und deshalb sei $X \oplus Y < 180^g$. Es gibt dann $x, y, u, v \in \mathbb{K}$ mit $X = x + iy \wedge Y = u + iv \wedge 0 < y \wedge 0 < v$, und es folgt $X \oplus Y = X \cdot Y = (xu - yv) + i(xv + yu)$ mit $(*)\ \ 0 < xv + yu$.
Zu zeigen ist $\operatorname{Cos} X \cdot Y = xu - yv < x = \operatorname{Cos} X$, also $(\diamond)\ \ x(u-1) < yv$.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Wegen $1-u^2=v^2$ ist $u<1$, und folglich gilt $(\diamond)$ im Falle $x\geq 0$. Ist $x<0$, so führt $(*)$ auf $0<u$, und wir erhalten $x(u-1)\cdot u = xu^2+(-x)u < xu^2+(-x)$ $=(-x)\cdot v^2 \overset{(*)}{<} yv\cdot u$, also ebenfalls $(\diamond)$. $\square$

Für gewöhnliche Winkel ist das Halbieren *eindeutig* gemäß

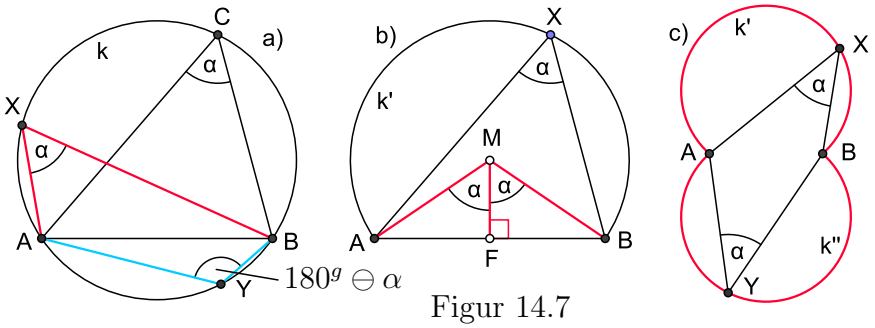
(14.30) **Satz**. *Zu $\alpha\in k_E^{+*}$ gibt es genau ein $\alpha/2\in k_E^{+*}$ mit $\alpha/2\oplus\alpha/2=\alpha$. Es ist $\alpha/2<_\circ 90^g$. Ist $\{r,t\}\in\Omega_2$ mit Scheitel Z und ist $\sphericalangle\{r,t\}=$ $=\alpha\in k_E^{+*}$, so existiert genau ein Strahl s aus Z mit $\sphericalangle\{r,s\}=$ $=\sphericalangle\{s,t\}=\alpha/2$. Hierbei ist $s\subset[r\cup t]\wedge\widetilde{g}(r)=t$ für $g:=s\cup\widetilde{Z}(s)$.*

Beweis: Nach (14.5) und (5.2) dürfen wir o.B.d.A. von $Z:=0\wedge r:=\mathbb{K}_+\wedge$ $\wedge\ t:=\mathbb{K}_+A$ mit $A:=\alpha\in k_E^{+*}$ ausgehen. Für $\frac{\alpha}{2}:=C:=(A+1)/|A+1|\wedge$ $s:=\mathbb{K}_+C\wedge g:=\mathbb{K}C$ folgt $\frac{\alpha}{2}\in k_E^{+*}\cap m_{1,A}\wedge\widetilde{g}(r)=t\wedge\frac{\alpha}{2}=\sphericalangle\{r,s\}=\sphericalangle\{s,t\}$ $\wedge\ s\subset[r\cup t]\wedge\alpha=\frac{\alpha}{2}\oplus\frac{\alpha}{2}=C^2$, und wegen $-2<A+\overline{A}$ ist $0<C+\overline{C}$, also $\frac{\alpha}{2}<_\circ 90^g$. Für $D\in k_E$ und $u:=\mathbb{K}_+D$ gilt $[D\oplus D=A\Leftrightarrow D^2=C^2]$ sowie $[\sphericalangle\{r,u\}=\sphericalangle\{u,t\}\Leftrightarrow\{D,\overline{D}\}=\{A\overline{D},\overline{A}D\}\Leftrightarrow D^2=A=C^2\Leftrightarrow D\in\{C,-C\}$ $\Leftrightarrow u=s\ \dot\vee\ (D=-C\in k_E^{-*}\wedge\sphericalangle\{r,u\}=-\overline{C}=180^g\ominus\frac{\alpha}{2}>_\circ 90^g)]$. $\square$

Für Offnungen von $\mathbb{G}$-Winkeln ist das Halbieren nach (5.24) und (12.9) *nicht eindeutig*. Ebensolches gilt für Drehwerte, denn sind $A,X\in k_E$ mit $X^2=A$, so ist auch $(-X)^2=A$. Wir zeigen jetzt

(14.31) **Randwinkelsatz für gewöhnliche Winkel**. *Ist k ein Kreis und sind $A,B,C\overset{\in}{\neq}k$, so gilt für $X,Y\in\mathbb{L}\backslash<A,B>$ (Figur 14.7 a)):*
(1) Ist $X\in H_C(<A,B>)$, so ist $[X\in k\Leftrightarrow\ \sphericalangle(A,X,B)=\ \sphericalangle(A,C,B)]$.
(2) Ist $Y\notin H_C(<A,B>)$, so ist $[Y\in k\Leftrightarrow\sphericalangle(A,Y,B)=180^g\ominus\sphericalangle(A,C,B)]$.

Beweis: Sind X bzw. Y gemäß (1) bzw. (2) gegeben, so haben die Dreiecke $(A,C,B),(A,X,B),(B,Y,A)$ nach (13.22) die gleiche Orientierung. Deshalb folgt die Behauptung mit (14.23) direkt aus (14.14), wenn man noch die Identität $\ominus(180^g\ominus\alpha)=180^g\ominus(\ominus\alpha)$ für $\alpha\in k_E$ beachtet. $\square$



Figur 14.7

Download free eBooks at bookboon.com

Als Ergänzung zu (14.31) notieren wir

(14.32) **Mittenwinkelsatz für gewöhnliche Winkel**. *Gegeben seien zwei verschiedene Punkte A, B eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M. Ist $M \notin <A,B>$ und ist F der Fußpunkt des Lotes von M auf $<A,B>$, so gilt für jedes $X \in k' := k \cap H_M(<A,B>)$:*
(1) $\sphericalangle(A,X,B) = \sphericalangle(A,M,F) = \sphericalangle(F,M,B)$ *(Figur 14.7 b)),*
(2) $\sphericalangle(A,X,B) = \sphericalangle(A,M,B)/2 <_\circ 90^g$.

Beweis: Nach (13.22) haben die Tripel (A,X,B), (A,M,B), (A,M,F), (F,M,B) die gleiche Orientierung. Deshalb folgt die Behauptung mit (14.23) direkt aus (14.15) und (14.30). □

(14.33) *Bemerkungen.* Für den in (14.32) nicht erfaßten Fall $M \in <A,B>$ verweisen wir auf den Satz des THALES (4.10).

Fragt man bei fester Winkelgröße $\alpha \in k_E^{+*}$ und für fest vorgegebene Punkte $A, B \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$ nach der Menge aller Punkte $X \in \mathbb{L}$ mit $\sphericalangle(A,X,B) = \alpha$, so ergibt sich nach (14.31) und durch Spiegelung an $<A,B>$ als Lösung nunmehr die Vereinigung zweier Kreisbögen k', k'' mit den Endpunkten A, B, die zur Geraden $<A,B>$ symmetrisch liegen (Figur 14.7 c)).

Man kann diese Figur konstruieren, indem man zunächst den Meßpunkt $\alpha/2 \in k_E^{+*}$ ermittelt und dann zu Punkten $D, E \overset{\in}{\neq} m_{A,B}$ in der Halbebene $H_A(m_{A,B})$ gemäß (14.26) einen Punkt F bestimmt mit $\sphericalangle(D,E,F) = \alpha/2$. Für $\{C\} := m_{A,B} \cap (A \,\|\, <E,F>)$ ist $k(A,B,C) \cap H_C(<A,B>)$ einer der gesuchten Kreisbögen. Spiegelt man diesen an $<A,B>$, so ergibt sich der andere Kreisbogen.

E. Metrische Eigenschaften von Dreiecken

Im folgenden gehen wir weiterhin davon aus, daß $\mathbb{K}$ ein beliebiger euklidischer Körper ist.
Als erstes notieren wir die folgende für Skalarproduktbildung und Flächenberechnung grundlegende Aussage

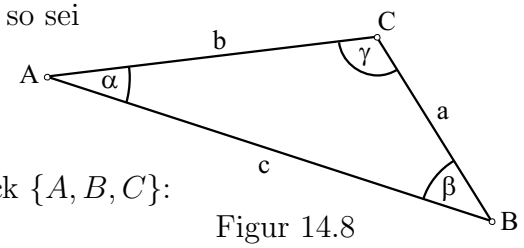
(14.34) **Satz**. *Sind $A, B, C \in \mathbb{L}$ mit $B \neq A, C$, so gilt*
(1) $(A-B) \circ (C-B) = |A-B| \cdot |C-B| \cdot \operatorname{Cos} \sphericalangle(A,B,C)$,
(2) $F(A,B,C) = \frac{1}{2} \cdot |A-B| \cdot |C-B| \cdot \operatorname{Sin} \sphericalangle(A,B,C)$.

Beweis: Wegen $\operatorname{Cos} X = \operatorname{Cos} \overline{X} \wedge |SinX| = |\operatorname{Sin} \overline{X}| \;\; \forall\, X \in k_E$ ergeben sich (1) und (2) direkt aus (14.21), (14.6)(4) und (14.18)(14),(16). □

Download free eBooks at bookboon.com

(14.35) Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so sei

$a := |B - C|, \quad \alpha := \sphericalangle(B, A, C),$
$b := |C - A|, \quad \beta := \sphericalangle(C, B, A),$
$c := |A - B|, \quad \gamma := \sphericalangle(A, C, B).$



Figur 14.8

Damit erhalten wir für das Dreieck $\{A, B, C\}$:

(14.36) **Cosinussatz**. *Es gilt*

(1) $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \operatorname{Cos}\alpha}$, (2) $\boxed{a = b \cdot \operatorname{Cos}\gamma + c \cdot \operatorname{Cos}\beta}$,

(3) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \operatorname{Cos}\beta$, (4) $b = c \cdot \operatorname{Cos}\alpha + a \cdot \operatorname{Cos}\gamma$,

(5) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \operatorname{Cos}\gamma$, (6) $c = a \cdot \operatorname{Cos}\beta + b \cdot \operatorname{Cos}\alpha$.

Beweis: Es ist $a^2 = ((A-C)+(B-A)) \circ (B-C) \overset{(14.34)}{=} ab \cdot \operatorname{Cos}\gamma + ac \cdot \operatorname{Cos}\beta$, d.h. es gilt (2). Entsprechend gelten auch (4) und (6). Multipliziert man (2),(4),(6) mit a bzw. b bzw. c, so folgt $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \operatorname{Cos}\alpha$, also (1). Entsprechend gelten auch (3) und (5). □

(14.37) **Sinussatz**. Es ist $\boxed{\dfrac{\operatorname{Sin}\alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{Sin}\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{Sin}\gamma}{c}}$.

Beweis: Aus $b^2 \cdot \operatorname{Cos}^2\alpha \overset{(14.36)(6)}{=} (c - a \cdot \operatorname{Cos}\beta)^2 = c^2 - 2ac \cdot \operatorname{Cos}\beta + a^2 \cdot \operatorname{Cos}^2\beta = \overset{(14.36)(3)}{=} b^2 - a^2 + a^2 \cdot \operatorname{Cos}^2\beta$ und (14.18)(3) folgt $b^2 \cdot \operatorname{Sin}^2\alpha = a^2 \cdot \operatorname{Sin}^2\beta$ und damit die erste Gleichung. Entsprechend gilt auch die zweite. □

(14.38) **Satz über rechtwinklige Dreiecke**. Ist $\gamma = 90^g$, so werden $[A, C]$, $[B, C]$ als **Katheten** und $[A, B]$ als **Hypotenuse** bezeichnet. Mit „:: “ als Kürzel für „*Merkregel:* “ folgt

(1) $\boxed{\operatorname{Cos}\alpha = \dfrac{b}{c} :: \dfrac{Ankathete}{Hypotenuse}}$, (2) $\boxed{\operatorname{Sin}\alpha = \dfrac{a}{c} :: \dfrac{Gegenkathete}{Hypotenuse}}$,

(3) $\boxed{\operatorname{Tan}\alpha = \dfrac{a}{b} :: \dfrac{Gegenkathete}{Ankathete}}$, (4) $\boxed{\operatorname{Cot}\alpha = \dfrac{b}{a} :: \dfrac{Ankathete}{Gegenkathete}}$,

(5) $0^g <_\circ \alpha <_\circ 90^g$, (6) $0^g <_\circ \beta <_\circ 90^g$,

(7) $\operatorname{Cos}\beta = \dfrac{a}{c}, \quad \operatorname{Sin}\beta = \dfrac{b}{c}$, (8) $\operatorname{Tan}\beta = \dfrac{b}{a}, \quad \operatorname{Cot}\beta = \dfrac{a}{b}$.

Beweis: Wegen (14.18)(6),(7), (14.36)(2),(4) und (14.37) sind (1), (2), (5) und (7) gültig, damit aber auch (3), (4), (6) und (8). □

Download free eBooks at bookboon.com

(14.39) **Satz über Größenvergleiche am Dreieck**. *Es gilt:*

(1) $(a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta) \wedge (a < b \Leftrightarrow \alpha <_\circ \beta)$,
(2) $(b = c \Leftrightarrow \beta = \gamma) \wedge (b < c \Leftrightarrow \beta <_\circ \gamma)$,
(3) $(c = a \Leftrightarrow \gamma = \alpha) \wedge (c < a \Leftrightarrow \gamma <_\circ \alpha)$,
(4) *Der größere Winkel liegt stets der größeren Seite gegenüber.*
(5) *Wenigstens zwei der Dreieckswinkel sind spitz.*

Beweis: Nach (14.36) ist $[\alpha <_\circ \beta \Leftrightarrow \operatorname{Cos}\beta < \operatorname{Cos}\alpha \Leftrightarrow (c^2+a^2-b^2)/2ac < (c^2+b^2-a^2)/2bc \Leftrightarrow bc^2+b(a-b)(a+b) < ac^2-a(a-b)(a+b) \Leftrightarrow (a-b)((a+b)^2-c^2) < 0 \Leftrightarrow a<b]$, denn nach (12.10)(11) und (12.13)(2) ist $(a+b)^2 > c^2$. Entsprechendes gilt, wenn man „$<$“, „$<_\circ$“ durch „$=$“ ersetzt, und folglich ist (1) gültig. Durch zyklische Vertauschung erhält man (2), (3) und damit auch (4). Aus (14.36)(2),(4),(6) folgt (5). □

Capgemini
CONSULTING.TECHNOLOGY.OUTSOURCING

Durchstarten in Ihre IT-Karriere

Unser 18-monatiges Programm bildet die perfekte Grundlage für Ihren beruflichen Erfolg: Arbeit in Top-Projekten, Ausbildung in fachlichen und Soft-Skill-Trainings, Betreuung durch einen persönlichen Mentor und Austausch mit Kollegen aus aller Welt. Ihren Schwerpunkt wählen Sie selbst:

- **Business Technology Consulting**
- **Individuelle Softwarelösungen**
- **Lösungen auf Basis von Standardsoftware**
- **Business Information Management**
- **Application Lifecycle Services**

Mehr Informationen auf www.capgemini.de/karriere

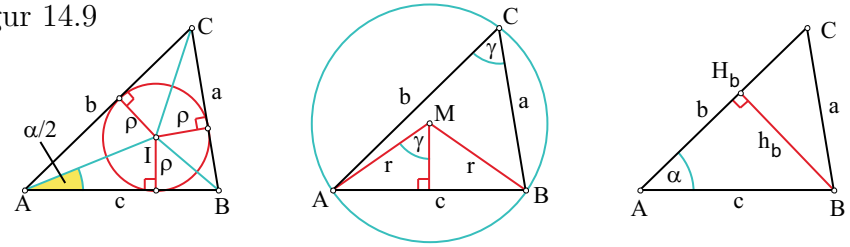
XING

People matter, results count.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Figur 14.9



(14.40) Im weiteren bezeichnen wir den **Inkreisradius** von $\{A, B, C\}$ mit ϱ, den **Umkreisradius** mit r und den **halben Dreiecksumfang** mit $s := \frac{1}{2}(a+b+c)$. Sind H_a, H_b, H_c die Höhenfußpunkte von $\{A, B, C\}$ (vgl. (4.13)), so sei $h_a := |A-H_a|$, $h_b := |B-H_b|$, $h_c := |C-H_c|$.

Für die **Dreiecksfläche** $F := F(A, B, C)$
ergibt sich nach (14.34)(2) der Wert

(1) $\boxed{F = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \operatorname{Sin}\gamma = \frac{1}{2}c \cdot a \cdot \operatorname{Sin}\beta = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \operatorname{Sin}\alpha}$,

und nach (14.38) gilt

(2) $\boxed{h_a = b \cdot \operatorname{Sin}\gamma \wedge h_b = c \cdot \operatorname{Sin}\alpha \wedge h_c = a \cdot \operatorname{Sin}\beta}$.

Zusammen mit (1), (13.11) und (13.22) (vgl. A 13.6.) führt dies auf

(3) $\boxed{F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = s \cdot \varrho}$.

Nach (14.32) und (14.38) ist $\operatorname{Sin}\gamma = (c/2)/r$. Mit (1), (3) folgt dann

(4) $\boxed{\frac{a}{\operatorname{Sin}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{Sin}\beta} = \frac{c}{\operatorname{Sin}\gamma} = 2r}$, (5) $\boxed{F = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}}$, (6) $\boxed{4s \cdot \varrho \cdot r = a \cdot b \cdot c}$.

Download free eBooks at bookboon.com

Nun ist $4s\cdot(s-a)=((b+c)+a)((b+c)-a)=2bc+b^2+c^2-a^2 \overset{(14.36)}{=} 2bc(1+\operatorname{Cos}\alpha)$ und $4(s-b)\cdot(s-c)=(a-(b-c))\cdot(a+(b-c))=a^2-(b^2-2bc+c^2) \overset{(14.36)}{=} 2bc(1-\operatorname{Cos}\alpha)$, also $16s(s-a)(s-b)(s-c)=4b^2c^2(1-\operatorname{Cos}^2\alpha)=4b^2c^2\operatorname{Sin}^2\alpha=16F^2$ gemäß (1).

Damit haben wir die HERONsche Formel

(7) $\boxed{F=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}}$

bewiesen, mit der sich die Fläche F und gemäß (3) und (5) dann auch die Radien ρ und r direkt aus den Seitenlängen des Dreiecks bestimmen lassen. Ergänzend zeigen wir über Vierecke die Aussage

(14.41) *Ist* $\mathbb{V}:=(A,B,C,D)$ *ein Viereck und existiert* $E\in]A,C[\cap]B,D[$, *so hat* $\mathbb{V}$ *die Fläche* $\boxed{F(\mathbb{V})=\frac{1}{2}\cdot|A-C|\cdot|B-D|\cdot\operatorname{Sin}\sphericalangle(A,E,B)}$.

Beweis: Für $x=|A-E|$, $y=|E-C|$, $u=|B-E|$, $v=|E-D|$, $\varepsilon=\sphericalangle(A,E,B)$ führen (13.11), (13.22), (14.18)(8) und (14.34)(2) auf
$F=\frac{1}{2}(x\cdot u+x\cdot v+y\cdot u+y\cdot v)\cdot\operatorname{Sin}\varepsilon=\frac{1}{2}(x+y)\cdot(u+v)\cdot\operatorname{Sin}\varepsilon$. □

Bezogen auf gewöhnliche Winkel erhalten wir außerdem

(14.42) **Kongruenzsatz**. *Sind Dreiecke* (A,B,C), (A',B',C') *gegeben und sind die Bezeichnungen wie in (14.35) bzw. analog (14.35) gewählt (vgl. Figur 14.8), so sind äquivalent:*

(SSS) *Es gilt* $a=a'\ \wedge\ b=b'\ \wedge\ c=c'$.
(SSW) *Es gilt* $a=a'\ \wedge\ b=b'\ \wedge\ \alpha=\alpha'\ \wedge\ (\beta\leq_\circ 90^g\ \Leftrightarrow\ \beta'\leq_\circ 90^g)$.
(WSW) *Es gilt* $a=a'\ \wedge\ \beta=\beta'\ \wedge\ \gamma=\gamma'$.
(SWS) *Es gilt* $a=a'\ \wedge\ b=b'\ \wedge\ \gamma=\gamma'$.
$(*)$ *Die Dreiecke* (A,B,C) *und* (A',B',C') *sind kongruent.*

Beweis: Es gilt $[(SSS)\overset{(14.36)}{\Rightarrow}(SSW)\overset{(14.37),(14.27)}{\Rightarrow}(WSW)\overset{(14.27),(14.37)}{\Rightarrow}(SWS)\overset{(14.36)}{\Rightarrow}(SSS)]$. Mit (5.22) und (12.10)(4) folgt die Behauptung. □

(14.43) **Ähnlichkeitssatz (WW)**. *Dreiecke* (A,B,C), (A',B',C') *sind genau dann ähnlich, wenn zwei der Winkelgrößen des einen Dreiecks zugleich zwei der Winkelgrößen des anderen Dreiecks sind.*

Beweis: Mit Hilfe einer zentrischen Streckung läßt sich aus (A,B,C) ein Dreieck (X,Y,Z) mit $|X-Y|=|A'-B'|$ gewinnen. Nach (14.22), (14,27) und (14.42) sind (X,Y,Z) und (A',B',C') genau dann kongruent, wenn die geforderte Gleichheit für die Winkelgrößen besteht. □

Download free eBooks at bookboon.com

Abschließend notieren wir

(14.44) **Zerlegungssatz**. *In klassischen euklidischen Ebenen gilt: Jede Ähnlichkeit ist ein Produkt aus einer Bewegung und einer zentrischen Streckung.*

Beweis: Sind $A, B \in \mathbb{L}$ mit $A \neq 0$ und sind $\varphi, \psi, \alpha, \beta \in \ddot{\mathbb{A}}$ für $X, Y \in \mathbb{L}$ gegeben durch $\varphi : X \to AX+B$, $\psi : X \to A\overline{X}+B$, $\alpha : Y \to (A/|A|)\cdot Y+B$, $\beta : X \to |A|\cdot X$, so ist $\varphi = \alpha \circ \beta$ und $\psi = (\alpha \circ \kappa_{\mathbb{L}}) \circ \beta$ mit α, $\alpha \circ \kappa_{\mathbb{L}} \in \mathfrak{B}$ und $\beta \in \Delta$. $\square$

F. Goldener Schnitt und reguläre Fünfecke

(14.45) Sind $R, S \overset{\in}{\neq} \mathbb{L}$ und ist $T \in [R,S]\backslash\{R,S\}$, so sagt man, T teilt die Strecke $[R,S]$ im **goldenen Schnitt**, wenn für $r = |R-T| \wedge s = |S-T|$ die Bedingung

(1) $\boxed{(r+s)/r = r/s}$

Figur 14.10

erfüllt ist, wenn sich also die Gesamtstrecke zum größeren Streckenabschnitt so verhält wie der größere Streckenabschnitt zum kleineren.

Die Zahl $\boxed{c := r/s}$ heißt **große goldene Schnittzahl**, und die Zahl $\boxed{d := s/r}$ heißt **kleine goldene Schnittzahl**.

Mit (1) folgt $1 < 1+d = (r+s)/r = r/s = c$, also

(2) $\boxed{0 < d = c^{-1} < 1 < c} \wedge \boxed{c^{-1}+1 = c} \wedge \boxed{1+c = c^2} \wedge \boxed{d^2+d = 1}$.

Die quadratische Gleichung $x^2-x-1 = 0$ hat die Lösungen $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$, und wegen $c > 1$ gilt dann

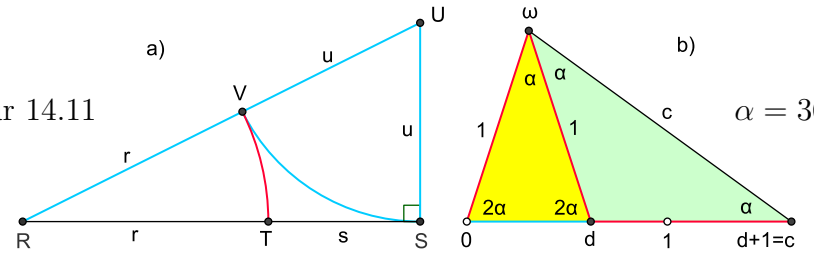
(3) $\boxed{c = (\sqrt{5}+1)/2 \ \wedge \ d = c-1 = (\sqrt{5}-1)/2}$.

Seit der Antike wird die Proportion des goldenen Schnitts als ästhetisch besonders ansprechend empfunden, und so kann man bis heute in Kunstwerken und Bauwerken immer wieder eine Realisierung dieses Verhältnisses vorfinden.

(14.46) *Eine Konstruktion für den goldenen Schnitt* (Figur 14.11 a)): Ist $[R,S]$ vorgegeben, so konstruieren wir zunächst einen Punkt U so, daß $\{R,S,U\}$ ein Dreieck mit $<R,S> \perp <S,U> \wedge |U-S| = u := \frac{1}{2}|R-S|$ ist. Der Kreis um U durch S treffe die Strecke $[R,U]$ in V. Dann trifft der Kreis um R durch V die Strecke $[R,S]$ in einem Punkt T, und dieser

Download free eBooks at bookboon.com

teilt $[R,S]$ im goldenen Schnitt. Denn für $r:=|R-T|$ und $s:=|S-T|$ führt der Satz des PYTHAGORAS auf $(r+s)^2+u^2=(r+u)^2$, d.h. es ist $2rs+s^2=2u\cdot r=(r+s)r$ und damit $s(r+s)=r^2$, also $(r+s)/r=r/s$.



Figur 14.11 $\alpha = 36^g$

(14.47) *Konstruktion goldener Dreiecke* (Figur 14.11 b)):
Wegen $0<d/2<1$ ist $d/2$ ein innerer Punkt des Einheitskreises k_E, und mithin gibt es genau ein $\omega \in m_{0,d} \cap k_E$ mit $Im(\omega) > 0$.

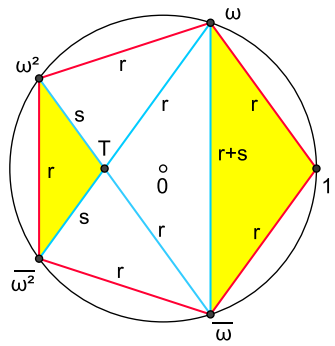
Definitionsgemäß ist $\omega+\overline{\omega} = d \wedge \omega\cdot\overline{\omega} = 1$. Mit (14.45)(2) und durch wiederholte Multiplikation mit ω folgt $\omega^2 = -1+d\omega = -1+d^2-d\overline{\omega} = -d-d\overline{\omega}$ $\wedge\ \omega^3 = -d\omega-d = \overline{\omega}^2 \wedge\ \ \omega^4 = \overline{\omega} \wedge \omega^5 = 1 \wedge N(\omega-c) = c^2 \wedge |\omega-c| = c$.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Wegen $c-d=1$ sind die Dreiecke $\{0,d,\omega\}$ und $\{\omega,c,d\}$ gleichschenklig, und aus $\alpha := \sphericalangle(d,c,\omega) = \sphericalangle(d,\omega,c)$ folgt $2\alpha = \sphericalangle(\omega,d,0) = \sphericalangle(\omega,0,c)$. Wegen $|\omega-c| = c$ ist $\sphericalangle(0,\omega,c) = 2\alpha$, und deshalb ist $\alpha = 180^g/5 =: 36^g$. Dreiecke, die zu $\{0,d,\omega\}$ oder $\{\omega,c,d\}$ ähnlich sind, heißen *„golden“*.

Da $\mathcal{F} := \{\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5\}$ durch jede der Drehungen $\delta_\nu : \mathbb{L}\to\mathbb{L} : X\to\omega^\nu\cdot X$ und durch jede der Spiegelungen $\delta_\nu\circ\kappa_{\mathbb{L}}$ für $\nu = 1,\ldots,5$ auf sich abgebildet wird, wird $\mathcal{F}$ und jede dazu ähnliche Punktmenge als **reguläres Fünfeck** von $\mathbb{E}$ bezeichnet (Figur 14.12). Wir zeigen



Figur 14.12

(14.48) **Satz**. *Die Diagonalen eines regulären Fünfecks $\mathcal{F}$ von $\mathbb{E}$ teilen sich gegenseitig im goldenen Schnitt, und das Verhältnis Diagonalenlänge zu Kantenlänge ist bei $\mathcal{F}$ stets die große goldene Schnittzahl c.*

Beweis: O.B.d.A. sei $\mathcal{F} := \{\omega,\omega^2,\overline{\omega^2},\overline{\omega},1\}$, und es sei $\{T\} := <\omega,\overline{\omega^2}> \cap <\omega^2,\overline{\omega}>$. Es gilt $<\omega^2,\overline{\omega^2}> \| <\omega,\overline{\omega}>$, also auch $<1,\omega> \| <\overline{\omega},\omega^2>$ und $<1,\overline{\omega}> \| <\omega,\overline{\omega^2}>$. Dann ist $(\omega,T,\overline{\omega},1)$ eine Raute, und die Dreiecke $(\omega,\overline{\omega},1)$ und $(\omega^2,\overline{\omega^2},T)$ sind ähnlich. Für $r := |\overline{\omega}-T|$ und $s := |\omega^2-T|$ impliziert dies $(r+s)/r = r/s = c$. □

G. Reelle Trigonometrie

(14.49) Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ läßt sich die Verbindung von der hier eingeführten Winkelmessung zur üblichen Winkelmessung unter Verwendung der „Cosinus-i-Sinus-Funktion“

$$cis : \mathbb{R} \to k_E : x \to \cos x + i\cdot\sin x$$

herstellen, die, wie in der Analysis gezeigt wird, die reelle Achse lokal–längentreu auf den Einheitskreis abbildet, die $\mathbb{R}$ also, anschaulich gesagt, längentreu um den Einheitskreis „herumwickelt“. Hierbei gilt

(1) $cis(x) = cis(y) \Leftrightarrow x-y \in 2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi m \,|\, m\in\mathbb{Z}\}\ \ \forall\, x,y\in\mathbb{R}$ und

(2) $cis(x+y) = cis(x)\cdot cis(y) = cis(x)\oplus cis(y)\ \ \forall\, x,y\in\mathbb{R}$,

wobei π die berühmte Kreiszahl $3,14159...$ ist. Die Restriktion von cis auf das halboffene Intervall $[0,2\pi[$ ist eine Bijektion von $[0,2\pi[$ auf k_E. Nach bekannten Sätzen der Analysis gelten außerdem die Aussagen

(3) $x < y \ \Leftrightarrow\ cis(x) <_\circ cis(y)\ \ \forall\, x,y\in[0,2\pi[$,

(4) $cis(0) = 1 = 0^g = cis(2\pi),\ cis(\pi) = -1 = 180^g$,
$cis(\pi/2) = i = 90^g,\ cis(3\pi/2) = -i = 270^g$,

(5) $\sin = \mathrm{Sin}\circ cis,\ \cos = \mathrm{Cos}\circ cis,\ \tan = \mathrm{Tan}\circ cis,\ \cot = \mathrm{Cot}\circ cis$.

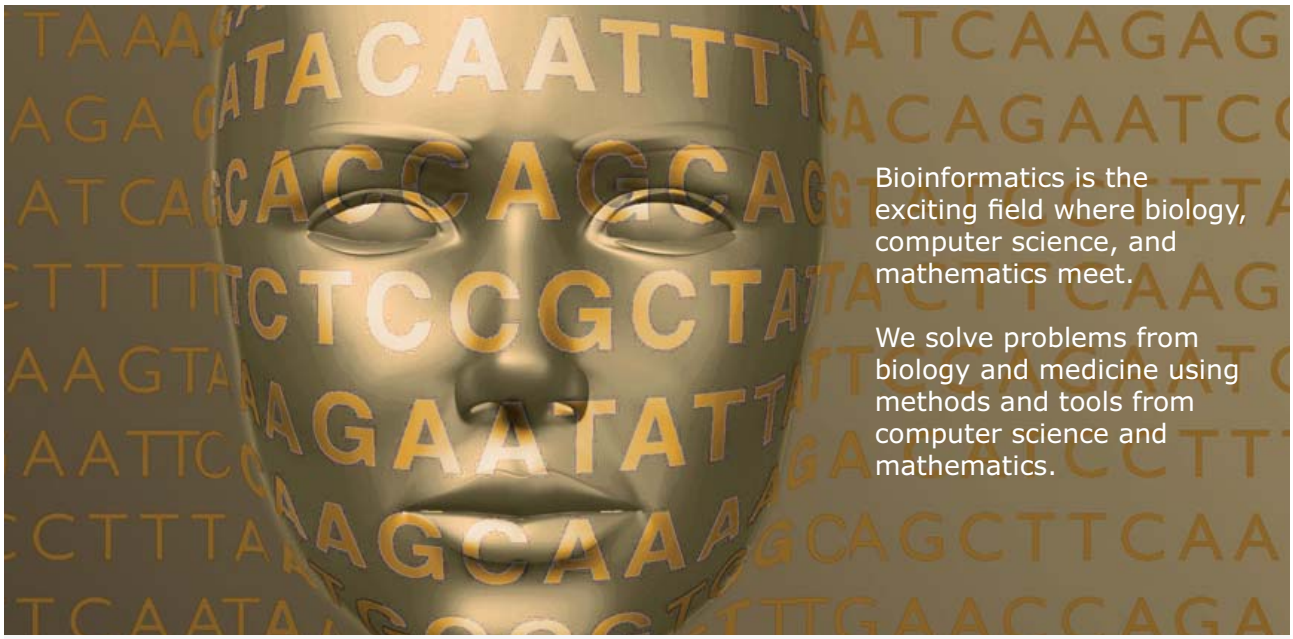
Download free eBooks at bookboon.com

Für Strahlen s, t mit gemeinsamem Scheitel und für $g, h \in \mathbb{G}$ ist
$B(s,t) \in [0, 2\pi[$ das **Bogenmaß** von (s,t), wenn $cis(B(s,t)) = W(s,t)$ ist,
$B\{s,t\} \in [0, \pi]$ das **Bogenmaß** von $\{s,t\}$, wenn $cis(B\{s,t\}) = \measuredangle\{s,t\}$ ist,
$B(g,h) \in [0, \pi[$ das **Bogenmaß** von (g,h), wenn $\mathbb{R}\, cis(B(g,h)) = \measuredangle(g,h)$ ist.
Aus dem Bogenmaß ergibt sich durch Multiplikation mit dem Faktor $360/2\pi$ jeweils das entsprechende Gradmaß.

Das Bogenmaß spiegelt die Additivität der Typ-1-Winkel uneingeschränkt wider, wenn man auf dem Intervall $[0, 2\pi[$ modulo 2π addiert und subtrahiert, und es spiegelt die Additivität der $\mathbb{G}$-Winkel uneingeschränkt wider, wenn man auf dem Intervall $[0, \pi[$ modulo π addiert und subtrahiert. Dagegen kann man die Bogenmaße gewöhnlicher Winkel wie üblich addieren, da hier nur eine eingeschränkte Additivität zu berücksichtigen ist (vgl. 14.28).
Ist $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, so ist $\{cis(\frac{2r\pi}{n}) \mid r = 1, ..., n\}$ die Eckenmenge eines dem Einheitskreis einbeschriebenen regulären n-Ecks. Entsprechend läßt sich auch jeder Drehwert in n gleiche Teile „zerlegen“. Für beliebige klassische euklidische Ebenen gilt solches nicht, denn ist $\mathbb{K} = [\mathbb{Q}]$ (vgl. (12.3)), so gibt es in $\mathbb{E}$ keine regulären n-Ecke für $n \in 7, 9, ...$ (vgl. [29] (II, S. 45)).

UPPSALA UNIVERSITET

Develop the tools we need for Life Science
Masters Degree in Bioinformatics



Read more about this and our other international masters degree programmes at www.uu.se/master

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

H. Aufgaben

Im folgenden sei $\mathbb{E} = (\mathbb{P}, \equiv) = \mathbb{E}(\mathbb{L}_{-1,0}, \mathbb{K})$ eine klassische euklidische Ebene. Wir verwenden die Bezeichnungen aus (14.35), (14.40). Zeigen Sie:

A 14.1. Sind Geraden $g_l, g_2 \overset{\in}{\neq} \mathbb{G}$ mit den Gleichungen $y = m_1 x + b_1$ und $y = m_2 x + b_2$ mit $m_1, b_1, m_2, b_2 \in \mathbb{K}$ gegeben (vgl. Aufgabe A 11.3.) und ist $\measuredangle(g_1, g_2) = \mathbb{K}\alpha$ mit $\alpha \in k_E^+$, so ist $[\, g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1\,]$, und im Falle $g_1 \not\perp g_2$ ist $\operatorname{Tan}\alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$.

A 14.2. Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so liegt der Fußpunkt L des Lotes von C auf $<A, B>$ genau dann in $]A, B[$, wenn $\sphericalangle(B, A, C)$ und $\sphericalangle(A, B, C)$ kleiner als 90^g sind.

A 14.3. Es seien $g \in \mathbb{G}$ und $A \in \mathbb{L} \setminus g$. Ist L der Fußpunkt des Lotes von A auf g, so ist $\overline{k}_{A;L} \subseteq \overline{H_A(g)}$.

A 14.4. Zu jedem $a \in \mathbb{K}_+^*$ gibt es ein gleichseitiges Dreieck $\Delta = \{A, B, C\}$ mit $|B - C| = a$. Es ist $F(\Delta) = a^2\sqrt{3}/4$, $r = a\sqrt{3}/3$ und $\rho = a\sqrt{3}/6$.

A 14.5. **Tangenssatz**. Für jedes Dreieck $\{A, B, C\}$ gilt
$(a+b) \cdot \operatorname{Tan}(\alpha/2 \ominus \beta/2) = (a-b) \cdot \operatorname{Tan}(\alpha/2 \oplus \beta/2)$.

A 14.6. **Halbwinkelsatz**. Für jedes Dreieck $\{A, B, C\}$ gilt
a) $\operatorname{Cos}^2\alpha/2 = (1 + \operatorname{Cos}\alpha)/2 = s(s-a)/(bc)$,
b) $\operatorname{Sin}^2\alpha/2 = (1 - \operatorname{Cos}\alpha)/2 = (s-b)(s-c)/(bc)$,
c) $\operatorname{Tan}\alpha/2 = \rho/(s-a)$.
Entsprechendes gilt für $\beta/2$ und $\gamma/2$.

A 14.7. Für den Inkreismittelpunkt I des Dreiecks $\{A, B, C\}$ gilt
$I = \dfrac{a}{2s}A + \dfrac{b}{2s}B + \dfrac{c}{2s}C$. Hierbei ist $2s = a+b+c$. Für $2s_a := -a+b+c > 0$ ist
$I_a = \dfrac{-a}{2s_a}A + \dfrac{b}{2s_a}B + \dfrac{c}{2s_a}C$ der Mittelpunkt des Berührkreises von $\{A, B, C\}$ mit $I = \dfrac{a}{s}A + \dfrac{s_a}{s}I_a \in]A, I_a[$ (vgl. (5.29)). Analoges gilt bzgl. B und C.

A 14.8. Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so hat das Dreieck $\{M, I, S\}$, gebildet aus Mittelsenkrechtenschnittpunkt, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt, die Fläche $|a-b| \cdot |b-c| \cdot |c-a|/(24\rho)$. Diese ist genau dann gleich Null, wenn $\{A, B, C\}$ gleichschenklig ist.

Download free eBooks at bookboon.com

Personen- und Sachregister

A

abgeschlossen 184,185
Absolutbetrag 182
Abstand 182,195
Abstandsquadrat ,144
Abtragbarkeit 75,215,223
Achse 59
achsensymmetrisch 62
Additivität der Winkel 80,153,223
Additivitätssatz 214
ähnlich 151,220
Ähnlichkeit 139
Ähnlichkeitssätze 131,151,152,230
äußere Tangenten 195
äußerer Ähnlichkeitspunkt 195
affine Ebene 20
affiner Satz von Brianchon 134
Anordnungsaxiom 174
Anschauungsebene 18,174,175
Apollonius (ca. 262-190) 168
Automorphismengruppe 26
Automorphismus 25,92

B

Baer, R. (1902-1968) 17
Basis 49
Baur, A. 70
berühren 47
Berührkreis 66
Berührpunkt 47
Berührsätze 95,95
Berührsatz von Feuerbach 86
Bewegung 31,147
Bewegungsgruppe 31,56
Bogenmaß 234
Bolyai, J. v. (1802-1860) 14
Brianchon, C. J. (1783-1864) 134
Büschel 46
büschelartig treen 160
Büschelsätze 159,160

C

Cauchy-Schwarzsche Ungl. 182
Cayley, A. (1821-1895) 16
Ceva, G. (1647-1734) 133
Charakteristik 127
Cliord-Punkt 103
Clifford, W. K. (1845-1879) 104
Cosinus 219, Cosinussatz 227
Cotangens 219
Cramer, G. (1704-1752) 198
Cramersche Regel 198

D

Darstellung von Bewegungen durch Spiegelungen 54,55,56
Darstellungssatz 191
Desargues, G.(1593-1662) 110
Determinante 197,199
Determinantenmaß 199
Determinantenmultiplikationssatz 199
Diagonale 22
Dilatation 106
Distanz 182
distanztreu 31,147
Doppelverhältnis 135
Drachen 49
Drehpunkt 54
Drehung 54
Drehwert 213,213
Drehzentrum 54
Dreieck 41
Dreiecksäche 229
Dreiecksungleichung 183
Dreispiegelungssatz 55
dreiteilbare Winkel 164
Dreiteilendenpaar 164
Durchlaufung 186

E

echte Zerlegung 200
echtes Viereck 21
Ecke 21,41,199
Eigenschaften der Norm 143
eigentliche Bewegung 56,149
Einheitpunkt 79
Einheitskreis 168,212
Eins 112
Einstein, A. (1879-1955) 16
endlich 124
Endpunkte 187
entgegengesetzt 186
Erweiterter Mittenwinkelsatz 170
Erweitertes Parallelenaxiom 21
Eselsbrücke 88,137
Euklid (ca. 365-300) 13., 28,156,172,211
euklidisch 144
euklidische Ebene 91,210
euklidischer Körper 176
Euler, L. (1707-1783) 163
Eulergerade 163

F

Download free eBooks at bookboon.com

Fermat, P. (1601-1655) 170
Feuerbach K. W. (1800-1834) 47,86
Feuerbachkreis 47,86
Fixgerade 31
Fixpunkt 31
Fixpunktsatz 54
Fläche 204,205
Flächenmaß 205
Freudenthal, H. 70
Fußpunkt des Lotes 41

G

G-Winkel 70
Galois-Feld 124
Gauss, C. F. (1777-1855) 14
gegensinnig ähnlich 151
gegensinnig konform 76
gegensinnig kongruent 62,151
gegensinnig winkeltreu 139
gegensinnige Ähnlichkeit 139
Gegenwinkel 215
geordnetes Dreieck 41,131
gerade Bewegung 56,149
Gerade 19,24,173
Geradenbüschel 48
Geradenspiegelung 51
Gergonne J. D. (1771-1859) 171
gestreckter Winkel 215,222
gewöhnlicher Winkel 220
gleichschenklig 49,142
gleichseitig 49,155
gleichsinnig ähnlich 131
gleichsinnig kongruent 62,71,151
gleichsinnige Ähnlichkeit 105
gleichwinklig 155
Gleitspiegelung 59
goldener Schnitt 231
goldenes Dreieck 232
Größe 221
große goldene Schnittzahl 231
Grundeigenschaften der Spiegelungen 51
Gruppe der inneren Automorphismen 68
Gruppe von Drehungen 57

H

Halbebene 185
halber Dreiecksumfang 229
Halbgerade 185
Halbwinkelsatz 235
Hauptsatz -Flächenmessung 205
-euklidische Ebenen 117,179,192
Hauptstreckung 162
Heron (ca. 60 n. Chr.) 230
Hilbert, D. (1862-1943) 15
Höhe 43
Höhenschnittpunkt 43

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Hypotenuse 49,227

I

im Büschel liegen 49
Imaginärteil 197
inkongruent 18,24
Inkreis 209
Inkreisradius 229
innere Tangenten 195
innerer Ähnlichkeitspunkt 195
innerer Automorphismus 68
innerer Punkt 173
Inneres 191
inseparabel 141,142,150,159
Intervalle 184
inverser Winkel 215
involutorisch 57
isomorph 23,25,93,119
Isomorphiesatz 119,147
Isomorphismus 25,92

K

Kathete 49,227
Kepler, J. (1571-1630) 12
klassisch 175
Klein, F. (1849-1925) 14
kleine goldene Schnittzahl 231
kleiner 222
Körper 112,124
kollinear 19,173
Kollineation 23, -sgruppe 30
konform 73,91,214
Konformitätstreue 93
kongruent 18,24,62,137,151,220
Kongruenzaxiom 23,174
Kongruenzrelation 18,24,137,173
Kongruenzsatz 62,230
Konjugation 139
Konstruktion von Modellen 123 - 124,142
konvex 185
konvexe Hülle 189
konzentrisch 173
konzyklisch 93
Koordinatenkörper 121
kopunktal 48
Kreis 24,91,173
Kreisesatz 81
Kreisscheibe 173,184
kreistreu 106
Kreisvierseit 96
Kreisvierseitsatz 96
Kreiswinkelsatz 77,95

L

Länge 187
Lagrange, J. L. (1736-1813) 155
Lambert, J. H. (1728-1777) 14
Legendre, A.-M. (1752-1833) 14
Leibniz, G. W. (1646-1716) 18,197
linear 129
Lobatschefsky, N. I. (1793-1856) 14
Lot 41,103
Lotfußpunkt 103

M

Maßgleichheit von Winkeln 216,221
maßstabstreu 148
Meßnadel 79,153
Menelaos (um 100 v. Chr.) 133,136,188
Menge aller Kreise 24
Menge aller Mittelsenkrechten 24
Metrik 144
Minkowski, H. (1864-1909) 16
Miquel, A. (um 1840) 97,102,135
Mitte 34,130
Mittellinie 63
Mittelpunkt 24,159,173,184
Mittelsenkrechte
19,24,41,138,173
Mittelsenkrechtenschnittpunkt 42
mittentreu 34
Mittenwinkelsatz 78,217,226
Monge, G. (1746-1818) 195
Morley, F. (1860-1937)
164,166; -Dreieck 166

N

Nasir Eddin Al-Tusi
(1201-1274) 14
Nebenwinkel 215
negativ orientiert 205
Neunpunktekreis 47
nichtkollinear 19
nichtnormale euklidische Ebene
129
nichtorientierter Winkel 211
nichtparallel 21
Norm 142
normale euklidische Ebene
25,147
Normdistanz, Normenregel
144,143
normierte Form 214
Normmaßstab 148
Normradius 167
Null, Nullabbildung 112
Nullwinkel 70,91,215,222

O

Download free eBooks at bookboon.com

oberen Höhenmitten 47
oberer Meßbogen 220
Öffnung 79,79,153,155
offene Halbebene 185
offene Kreisscheibe 184
offene Verbindungsstrecke 184
Omar Khayyam(1050-1123)
13
orientiert 205,205
orientierter Winkel 211
orthogonal 40,144

P

Pappus (um 300) 99,104,135
parallel 21,173
Parallelbüschel 21
Parallele 29
Parallelenaxiom 20,174
Parallelitätsrelation 21
Parallelogramm 22,173
Parallelogrammergänzungssatz
30
Parallelprojektion 29
Pascal-Gerade 99
Pascal, B. (1623-1662)
88,99,101
Pasch, M. (1843-1930) 14,188
Passante 47,94
Peripheriewinkelsatz 78,95
Poincare, H. (1854-1912) 157
positiv orientiert 205
Primkörper 124
Proklos (410-485) 13,20
Ptolemaios (um 150) 17,218
Punkt 19,173
Punktspiegelung 31,130
punktsymmetrisch 62
punktweise 31
Pythagoras (ca. 580-500)
28,156
pythagoreische Zahlentripel 168

Q

Quadrat 49
quadratische Form 144
quadratische Körpererweiterung
114,117,123
Quadratwurzelziehen 178

R

Radius 184,184
Rand 185,191,199
Randwinkelsatz 217,225
Raute 49
realisierbar 104
Rechteck 49
rechter Winkel 76,222
rechtwinklig 49
reelle euklidische Ebene 193
reelle Zahlen 192
reguläres Fünfeck 233
Relation von Stewart 171
Rhombus 49
Richtung 29,35
Riemann, B. (1826-1866) 16

S

Sacceri, G. (1667-1733) 14
Sätze des Euklid 156
Satz des Ceva 133
Satz des Desargues 110
Satz des Menelaos 133,136
Satz des Ptolemaios 218
Satz des Pythagoras 156
Satz des Thales 45
Satz über die Eulergerade 163
Satz über die Winkelsumme
im Dreieck 154,216,223
Satz über
gleichschenklige Dreiecke 142
Satz über Großenvergleiche
am Dreieck 228
Satz über Halbebenen 188
Satz über Orientierung 206
Satz über
rechtwinklige Dreiecke 227
Satz von Cliord 103
Satz von Fermat-Napoleon 170
Satz von Miquel 97,102,135
Satz von Morley 164
Satz von Pappus 99,104
Satz von Pascal 99
Satz von Pasch 188
Satz von Steiner 104
Satz von Wallace und Simson 103
Satz zur Additivität
gewöhnlicher Winkel 223
Satz zur Anordnung
des Einheitskreises 224
Scheitel 70,91,185,211
Schenkel 49,70,91,211
Schenkelaustauschbedingung 214
Schenkelaustauschsatz 75,97
Schiefkörper 112
schlicht 81,204
Schlieungssatz 101
schneiden 21
Schub 59
Schwerpunkt 163
Seite 22,41,188
Seitengerade 22,41

Download free eBooks at bookboon.com

Seitenhalbierende 163
Seitenmitte 47
Seitenmittendreieck 47
Seitenmittenkreis 47
Sekante 48,94
Sekantensatz 157
senkrecht 40,144
Senkrechte 41
separabel 141,150,150,159
Simson, R. (1687-1768) 103
Sinus 219, Sinussatz 227
Skalarprodukt 145
Speer 186
Spiegelung 51,150
spitzer Winkel 222
Steiner, J. (1796-1863) 104
Sternbüschel 48
Stewart, M. (1715-1785) 171
Strahl 185
Strahlensätze 131
Strecke 184
Streckungsfaktor 130
stumpfer Winkel 222
Symmetrieachse 62,173
Symmetriepunkt 34
Symmetriezentrum 62
symmetrisch 62
symmetrische Bilinearform 144

T

Tangens 219
Tangenssatz 235
Tangente 45,47,94,173,195
Tangentenlemma 94
Tangentenwinkelsatz 78,95
Teile 200
Teilverhältnis 129
teilverhältnistreu 130
Thales (um 600 v. Chr.) 44, 78,217,226
Thaleskreis 45
Träger, Trägerpunkt 48
Trägergerade 185,186
transformiert 68
Transitivität der gegensinnigen Ähnlichkeiten 151
Transitivität der geraden Bewegungen 61
Transitivität der gleichsinnigen Ähnlichkeiten 109
Transitivität der Punktspiegelungen 34
Transitivität der Spiegelungen 52
Transitivität der Translationen 37
Translation 35,36,106
Triangulierungssätze 200,201
trivialer Winkel 70,91

U

Umfangswinkelsatz 78
Umkreis 42,91,94
Umkreisaxiom 91
Umkreisradius 229
uneigentliche Bewegung 56
Unendlich 219
ungerade Bewegung 56,149
unterer Meßbogen 220
Ursprung 79

V

Varignon P. (1654-1722) 168
Verbindungsaxiom 19,174
Verbindungsgerade 21
Verbindungsstrecke 184
Verschiebung 35
Viereck 21,81
Vierseit 96
vierte Spiegelungsgerade 79
vollständige euklidische Ebene 175
Vollständigkeitsaxiom 174

W

Wallace, W. (1768-1843) 103
Wallis, J. (1616-1703) 14
Winkel 70,91,211,220
Winkelaxiom 91
Winkelhalbierende 66
Winkelhalbierendensatz 167
Winkelmaß 79,153
winkeltreu 74,105
Winkelvergleichung 69,91

Z

zentrische Streckung 106
zentrische Triangulierung 201
Zentrum 106
Zerlegungssatz 199,231
Zirkelaxiom 23,174
zwischen 184

Download free eBooks at bookboon.com

Abkürzungen und Symbole

Abkürzungen:

bzgl. bezüglich

bzw. beziehungsweise

d. h. das heißt

ggf. gegebenenfalls

i. a. im allgemeinen

o.B.d.A. ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit

p.v. paarweise verschieden

s.o. siehe oben

vgl. vergleiche

usw. und so weiter

z.B. zum Beispiel

Zahlenmengen:

$\leq$ kleiner oder gleich

$<$ kleiner; $>$ gr¨oßer

$\geq$ gr¨oßer oder gleich

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$
$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \backslash \{0\} =$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen

$\mathbb{M}^* := \mathbb{M} \backslash \{0\}$
$\forall\, \mathbb{M} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

inf Infimum

sup Supremum

$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + ... + x_n$

$\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \cdot ... \cdot x_n$

Logik:

$\neg$ non (Negation)

$\wedge$ und

$\vee$ oder

$\dot{\vee}$ entweder oder

$\Leftrightarrow$ ist äquivalent zu

$\Rightarrow$ impliziert

$\exists$ es existiert

$\forall$ für alle

Mengenlehre:

$=$ ist gleich

$:=$ ist definiert als

$=:$ wird bezeichnet mit

$\in$ ist Element von

$\notin$ ist kein Element von

$\overset{\in}{\neq}$ sind p.v.Elemente von

$\ni$ enthält als Element

$\varnothing$ leere Menge

$\subseteq$ ist Teilmenge von

$\supseteq$ enthält alsTeilmenge

$\not\subseteq, \not\supseteq$ Negation von $\subseteq, \supseteq$

$\times$ cartesisches Produkt

$|\mathbb{M}|$ Mächtigkeit von $\mathbb{M}$

$\{x\,[\in \mathbb{M}]\,|\,...\}$ Menge aller x [aus $\mathbb{M}$] mit ...

$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
=Durchschnitt von A,B

$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
=Vereinigung von A,B

$A \backslash B := \{x \in A \mid x \notin B\}$
=Differenz A minus B

$A \dot{\cup} B := (A \cup B) \backslash (A \cap B).$

Für $\mathfrak{M}$ = Menge von Mengen
= Mengensystem ist

$\bigcap \mathfrak{M} := \{x \mid \forall_{\mathbb{M} \in \mathfrak{M}} : x \in \mathbb{M}\},$
$\bigcup \mathfrak{M} := \{x \mid \exists_{\mathbb{M} \in \mathfrak{M}} : x \in \mathbb{M}\}.$

Abbildungen:

$(f \circ g)(X) = f(g(X))$:
Verketten von Abbildungen:
f nach g

$f\big|_{\mathbb{M}}$ Restriktion von f auf $\mathbb{M}$

$id_{\mathbb{M}}$ identische Abbildung von $\mathbb{M}$ auf sich

griechische Buchstaben:

α alpha	ν ny
β beta	ξ xi
γ gamma	o omikron
δ delta	π pi
ε epsilon	ρ rho
ζ zeta	σ sigma
η eta	τ tau
ϑ theta	υ ypsilon
ι jota	φ phi
κ kappa	χ chi
λ lambda	ψ psi
μ my	ω omega
Γ Gamma	Π Pi
Δ Delta	Σ Sigma

Ω Omega

$\square$ Ende des Beweises

Axiome:

$(\mathrm{V}), (\mathrm{P}), (\mathrm{P}_+)$ 19, 20

$(\mathrm{K}), (\mathrm{Z})$ 23, 174

$(\mathrm{W}), (\mathrm{U})$ 91

$(\mathrm{V}), (\mathrm{P}), (\mathrm{A}), (\mathrm{S})$ 174

Kongruenz:

$\equiv, \not\equiv, \widehat{\equiv}, \bowtie$

24, 62, 137, 173

Download free eBooks at bookboon.com

Punkte, Geraden, Ebenen:

$\mathbb{P}, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}^*$ 20, 24, 173

$\mathbb{G}$ 20,24,173

AB 28

$<A, B>$ 21

$m_{A,B}$ 20, 24

A^* 47

Kreise:

$\mathfrak{K}$ 24, 91, 173

KVS 96

$k_{M;A}$ 24

$k^\circ_{M;A}, \overline{k_{M;A}}$ 179,184

$k_{M,r}, k^\circ_{M,r}, \overline{k_{M,r}}$ 184

$k_{Th}\{A, B\}$ 45

$k(A, B, C)$ 42, 173

k_E, k_E^+, k_E^{-*} 212, 220

Parallelität:

$\parallel, \nparallel$ 21

$(A \parallel h),\ (g \parallel)$ 28

$\#\,(A, B, C, D)$ 22, 173

Orthogonalität:

$\perp, \not\perp$ 40, 41

$(A \perp h)$ 41

$l_\alpha(X, g)$ 103

$A \perp B$ 144

Abbildungen:

$Aut(\mathbb{P}, \equiv)$ 26

$\Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ 30

$\Delta,\ \Delta(Z)$ 106, 107

$\widetilde{A},\ X^A, \widetilde{\mathbb{P}}$ 30, 35, 130

$\tau_{A,B}, \tau_A$ 109, 111

$\mathfrak{T}$ 38, 106

$\widetilde{g}$ 51

$\mathfrak{S},\ \mathfrak{S}^r$ 56

$\mathfrak{D}r,\ \mathfrak{D}r(g)$ 57

$\mathfrak{B},\ \mathfrak{B}_\equiv$ 31, 148

$\mathfrak{B}^+,\ \mathfrak{B}^-$ 149

$\ddot{\mathbb{A}}$ 139

$\ddot{\mathbb{A}}^+,\ \ddot{\mathbb{A}}^-$ 105, 139

$\ddot{\mathbb{A}}^+(Z), \hat{A}$ 110, 111

algebraische Darstellung:

$\mathbb{K},\ \mathbb{K}^*$ 114

$\mathbb{L},\ \mathbb{L}^*$ 117, 121

$\mathbb{L}_{p,q},\ i$ 122

$0, 1$ 112

$A{+}\mathbb{K}B$ 114

$\mathbb{G}_\mathbb{L},\ \simeq_\mathbb{L}$ 117

$\mathbb{Z}_a,\ GF(a)$ 123

$\mathbb{K}^{(2)}$ 176

$char\,\mathbb{K}$ 127

$\overline{X},\ \kappa_\mathbb{L}$ 139

N, f, f_N 142,144

Anordnung:

$\leq, \mathbb{K}_+, |X|$ 177, 181

$[A, B], [\mathbb{X}]$ 184, 189

$[A, B>,\ H_A(g)$ 185

$A^{\rightarrow}B,\ g(\leq)$ 186

$Rd(\Delta), \Delta^\circ$ 189

Winkelmessung:

$\hat{\equiv}, \simeq$ 71, 73, 91

$\langle ... \rangle$ 77, 93

$0°, 90°, \mathfrak{n}, \mathfrak{r}$ 79, 79

$<..>_k, \langle ... \rangle_k$ 77, 95

$\mathbb{G}_0,\ \measuredangle,\ \oplus$ 79, 79

$\mathbb{G}_0,\ \measuredangle,\ \oplus$ 153, 154

$k_E,\ W(s, t)$ 213, 213

$\oplus,\ \Omega_1$ 214

$0^g, ..., 360^g$ 215

$W(X, Y, Z)$ 216

Sin, Cos 218

Tan, Cot 218

$k_E^+, k_E^{-*}, <_\circ$ 219

$\Omega_2,\ \not\prec$ 221, 221

$cis,\ B\{s, t\}$ 233

Flächenmessung:

det, Im 197,199

$\mathcal{D}et, Rd$ 199

$F(\mathbf{A})$ 205

c, d 231

Download free eBooks at bookboon.com

Band 1 : Textnummernregister 1

A 1.1.	17	(4.9)	44	(5.22)	62	(6.25)	78	(8.18)	102
(2.1)	18	(4.10)	45	(5.23)	62	(6.26)	78	(8.19)	102
(2.2)	20	(4.11)	45	(5.24)	64	(6.27)	78	(8.20)	103
(2.3)	23	(4.12)	45	(5.25)	64	(6.28)	78	(8.21)	103
(2.4)	23	(4.13)	47	(5.26)	65	(6.29)	79	(8.22)	103
(2.5)	24	(4.14)	47	(5.27)	66	(6.30)	80	(8.23)	103
A 2.1.	28	(4.15)	47	(5.28)	66	(6.31)	81	A 8.1.	104
(3.1)	29	(4.16)	48	(5.29)	66	(6.32)	86	(9.1)	105
(3.2)	29	(4.17)	49	A 5.1.	68	(6.33)	86	(9.2)	106
(3.3)	30	(4.18)	49	(6.1)	70	(6.34)	86	(9.3)	106
(3.4)	30	(4.19)	49	(6.2)	71	(6.35)	86	(9.4)	107
(3.5)	31	A 4.1.	50	(6.3)	71	A 6.1.	87	(9.5)	109
(3.6)	31	(5.1)	51	(6.4)	72	(7.1)	91	(9.6)	109
(3.7)	31	(5.2)	51	(6.5)	72	(7.2)	92	(9.7)	109
(3.8)	34	(5.3)	52	(6.6)	72	(7.3)	92	(9.8)	109
(3.9)	34	(5.4)	53	(6.7)	73	(7.4)	93	(9.9)	110
(3.10)	34	(5.5)	54	(6.8)	74	(8.1)	93	(9.10)	110
(3.11)	34	(5.6)	54	(6.9)	74	(8.2)	93	(9.11)	110
(3.12)	35	(5.7)	54	(6.10)	74	(8.3)	94	(9.12)	112
(3.13)	35	(5.8)	55	(6.11)	74	(8.4)	94	(9.13)	112
(3.14)	36	(5.9)	55	(6.12)	74	(8.5)	95	(9.14)	113
(3.15)	37	(5.10)	56	(6.13)	74	(8.6)	95	(9.15)	114
(3.16)	37	(5.11)	56	(6.14)	75	(8.7)	95	(9.16)	115
(3.17)	37	(5.12)	56	(6.15)	75	(8.8)	95	(9.17)	115
A 3.1.	38	(5.13)	57	(6.16)	76	(8.9)	96	(9.18)	116
(4.1)	40	(5.14)	57	(6.17)	76	(8.10)	97	(9.19)	117
(4.2)	40	(5.15)	58	(6.18)	76	(8.11)	97	(9.20)	117
(4.3)	40	(5.16)	58	(6.19)	76	(8.12)	97	(9.21)	118
(4.4)	41	(5.17)	59	(6.20)	76	(8.13)	97	(9.22)	119
(4.5)	41	(5.18)	61	(6.21)	76	(8.14)	99	(9.23)	120
(4.6)	42	(5.19)	61	(6.22)	76	(8.15)	99	(9.24)	120
(4.7)	43	(5.20)	61	(6.23)	77	(8.16)	101	(9.25)	121
(4.8)	43	(5.21)	62	(6.24)	77	(8.17)	101	(9.26)	121

Download free eBooks at bookboon.com

Band 1 : Textnummernregister 2

(9.27)	121	(11.8)	142	(12.3)	176	(13.11)	201	(14.20)	220
(9.28)	122	(11.9)	143	(12.4)	177	(13.12)	201	(14.21)	221
(9.29)	123	(11.10)	143	(12.5)	178	(13.13)	202	(14.22)	221
(9.30)	123	(11.11)	144	(12.6)	179	(13.14)	203	(14.23)	221
(9.31)	123	(11.12)	145	(12.7)	181	(13.15)	203	(14.24)	222
(9.32)	123	(11.13)	145	(12.8)	181	(13.16)	203	(14.25)	222
(9.33)	124	(11.14)	147	(12.9)	181	(13.17)	204	(14.26)	223
(9.34)	124	(11.15)	147	(12.10)	182	(13.18)	205	(14.27)	223
(9.35)	124	(11.16)	147	(12.11)	184	(13.19)	206	(14.28)	223
A 9.1.	125	(11.17)	148	(12.12)	184	(13.20)	206	(14.29)	224
(10.1)	127	(11.18)	149	(12.13)	185	(13.21)	206	(14.30)	225
(10.2)	129	(11.19)	151	(12.14)	186	(13.22)	206	(14.31)	225
(10.3)	129	(11.20)	151	(12.15)	188	(13.23)	207	(14.32)	226
(10.4)	129	(11.21)	152	(12.16)	188	A 13.1.	209	(14.33)	226
(10.5)	130	(11.22)	153	(12.17)	189	(14.1)	211	(14.34)	226
(10.6)	130	(11.23)	153	(12.18)	189	(14.2)	211	(14.35)	227
(10.7)	131	(11.24)	154	(12.19)	190	(14.3)	212	(14.36)	227
(10.8)	131	(11.25)	155	(12.20)	191	(14.4)	213	(14.37)	227
(10.9)	131	(11.26)	156	(12.21)	191	(14.5)	213	(14.38)	227
(10.10)	131	(11.27)	156	(12.22)	192	(14.6)	213	(14.39)	228
(10.11)	132	(11.28)	158	(12.23)	192	(14.7)	214	(14.40)	229
(10.12)	133	(11.29)	159	(12.24)	193	(14.8)	215	(14.41)	230
(10.13)	133	(11.30)	159	A 12.1.	194	(14.9)	215	(14.42)	230
(10.14)	133	(11.31)	160	(13.1)	197	(14.10)	215	(14.43)	230
(10.15)	134	(11.32)	162	(13.2)	198	(14.11)	215	(14.44)	231
A 10.1.	135	(11.33)	163	(13.3)	198	(14.12)	216	(14.45)	231
(11.1)	137	(11.34)	163	(13.4)	199	(14.13)	216	(14.46)	231
(11.2)	137	(11.35)	163	(13.5)	199	(14.14)	217	(14.47)	232
(11.3)	139	(11.36)	164	(13.6)	199	(14.15)	217	(14.48)	233
(11.4)	139	(11.37)	166	(13.7)	199	(14.16)	217	(14.49)	233
(11.5)	141	A 11.1.	167	(13.8)	200	(14.17)	218	A 14.1.	235
(11.6)	141	(12.1)	173	(13.9)	200	(14.18)	219		
(11.7)	141	(12.2)	175	(13.10)	201	(14.19)	220		

Download free eBooks at bookboon.com

Band 1 : Figurenregister

F 1.1	17	F 5.1	52	F 8.8	103	F 13.2	199
F 2.1	19	F 5.2	52	F 9.1	108	F 13.3	200
F 2.4	19	F 5.3	54	F 9.2	110	F 13.4	201
F 2.5	21	F 5.4	55	F 9.3	113	F 13.5	201
F 2.6	22	F 5.5	60	F 9.4	125	F 13.6	203
F 2.7	24	F 5.6	61	F 10.1	132	F 13.7	204
F 2.8	24	F 5.7	64	F 10.2	133	F 13.8	206
F 3.1	29	F 5.8	65	F 10.3	135	F 13.9	206
F 3.2	30	F 5.9	67	F 10.4	136	F 13.10	208
F 3.3	31	F 6.1	71	F 11.1	137	F 13.12	208
F 3.4	32	F 6.2	72	F 11.2	151	F 14.1	211
F 3.6	32	F 6.3	73	F 11.3	153	F 14.2	215
F 3.7	34	F 6.4	75	F 11.4	156	F 14.3	216
F 3.8	34	F 6.5	76	F 11.5	158	F 14.4	217
F 4.1	40	F 6.6	77	F 11.6	159	F 14.5	218
F 4.2	41	F 6.7	81	F 11.7	160	F 14.6	223
F 4.3	42	F 6.8	84	F 11.8	163	F 14.7	225
F 4.4	43	F 6.9	85	F 11.9	164	F 14.8	227
F 4.5	44	F 8.1	94	F 11.10	165	F 14.9	229
F 4.8	44	F 8.2	95	F 11.11	168	F 14.10	231
F 4.9	45	F 8.3	96	F 11.12	170	F 14.11	232
F 4.10	46	F 8.4	97	F 12.1	185	F 14.12	233
F 4.11	48	F 8.5	99	F 12.2	189		
F 4.12	49	F 8.6	100	F 12.3	190		
F 4.13	50	F 8.7	102	F 13.1	198		

Zur Arbeit mit diesem Buch am Bildschirm empfiehlt
es sich, die Nummernregister auszudrucken.