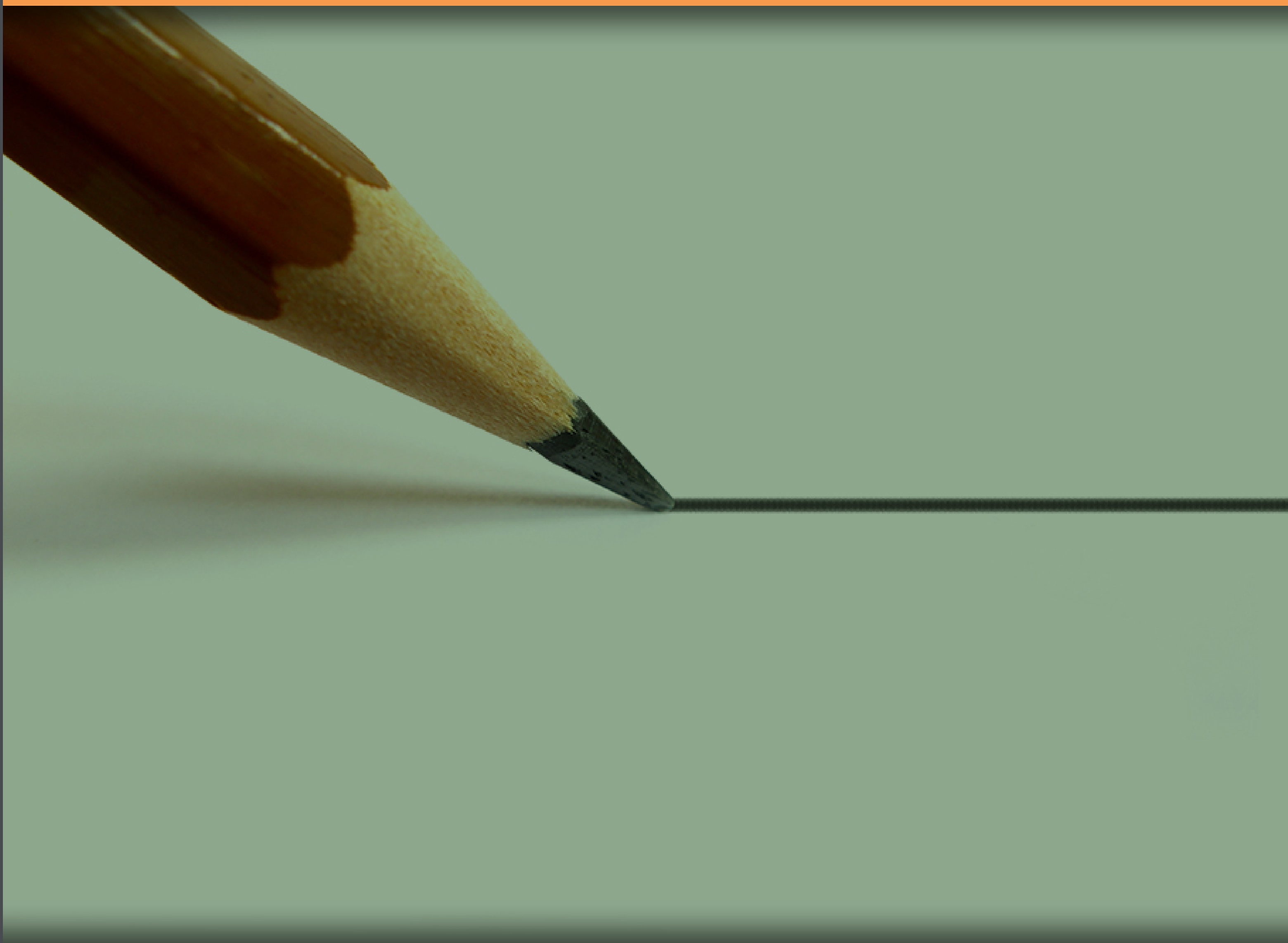
bookboon.com

Einfach lernen! Mathematik

Dr. Helmut Bösmann



Dr. Helmut Bösmann

Einfach lernen! Mathematik

Einfach lernen! Mathematik – Kurzfassung

ISBN 87-7681-061-5

Inhalt

Vorwort		**6**
1	**Grundlagen**	**7**
1.1	Die reellen Zahlen	7
1.2	Rechenregeln	10
2	**Gleichungen und Ungleichungen**	**21**
2.1	Lineare Gleichungen und Ungleichungen	21
2.2	Quadratische Gleichungen	25
2.3	Bruchgleichungen	28
3	**Funktionen einer Variablen**	**31**
3.1	Lineare Funktionen	31
3.2	Quadratische Funktionen	35
3.3	Ganzrationale Funktionen	38
3.3.1	Nullstellen ganzrationaler Funktionen	39
3.4	Gebrochen-rationale Funktionen	40
3.5	Potenzfunktionen – Wurzelfunktionen	42
3.6	Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen	44
3.6.1	Exponentialfunktion	44
3.6.2	Logarithmusfunktion	46
3.7	Winkelfunktionen	47
4	**Differentialrechnung**	**51**
4.1	Differenzieren von Funktionen	51
4.1.1	Tangenten	58
4.1.2	Näherung mit der Tangente und das Differential	59
4.1.3	Das Differential einer Funktionen	61
4.2	Anwendungen der Ableitung	62
4.2.1	Relative Extrema von Funktionen	62
4.2.2	Absolute Extrema von Funktionen	64
4.2.3	Funktionsdiskussionen	64
4.2.4	Das Newton-Verfahren zur Approximation von Nullstellen	67
4.2.5	Wurzelfunktionen	70
4.2.6	Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion	70
4.2.7	Relative Änderungsrate	73
4.2.8	Elastizität	73
4.2.9	Winkelfunktionen	74
4.2.10	Das Newton-Verfahren zur Approximation von Nullstellen	76
5	**Funktionen mehrerer Variablen**	**80**
5.1	Graphische Darstellung	80
5.2	Partielle Ableitungen	84
5.2.1	Tangenten und Tangentialebene	86
5.2.2	Richtungsableitung	88
5.2.3	Lineare Approximation und Totales Differential	89
5.3	Extrema	90

5.3.1 Freie Extrema 91
5.3.2 Gebundene Extrema 96
5.3.3 Die Methode der Variablensubstitutionen 97
5.3.4 Die Lagrangesche Methode 101

6 Lineare Gleichungssysteme 106
6.1 Gaußsches Verfahren 107
6.1.1 Begründung des Verfahrens 107
6.1.2 Das Tableau 109
6.1.3 Lösungsmenge mit mehr als einem Element 112
6.1.4 Leere Lösungsmenge 113
6.2 Matrizen 115
6.2.1 Matrizen und Gleichungssysteme 115
6.3 Rechnen mit Matrizen 116
6.3.1 Matrizenprodukt 116
6.3.2 Weitere Operationen mit Matrizen 118
6.3.3 Rechenregeln 118
6.3.4 Inverse Matrix 122
6.3.5 Berechnung der Inversen 124

7 Lineare Optimierung 126
7.1 Graphisches Verfahren 126
7.2 Simplexverfahren 129

Index 133

Vorwort

Diese Ausarbeitung wendet sich an Studierende der Wirtschaftswissenschaften in den ersten zwei Semestern. Zum Verständnis der volkswirtschaftlichen Theorien, bertriebswirtschaftlichen Verfahren und der Statistik benötigen sie mathematische Hilfsmittel.

Die wichtigsten dieser mathematischen Werkzeuge werden vorgestellt. Das sind Gleichungen, Funktionen einer Variablen und ihre Differentialrechnung, Funktionen von mehreren Variablen, lineare Gleichungssysteme, Matrizen und lineare Optimierung. Dagegen wurden die folgenden Gegenstände, weil sie seltener angewendet werden, nicht aufgegriffen: Integralrechnung, Differentialgleichungen, Vektorräume und Determinanten.

Hier wird gezeigt, wie und zu welchem Zweck man die Werkzeuge anwendet. Auf Begründungen wird verzichtet; Leser, die diese Aspekte vermissen, sollten ein Lehrbuch zur Hand nehmen.

Auf die mathematische Fachsprache kann nicht vollständig verzichtet werden. Fachbegriffe sind nur eingeführt, wenn sie im Text weiter benutzt werden, im Übrigen reicht die Umgangssprache.

Die meisten Begriffe und Techniken werden zunächst an einem Beispiel eingeführt und danach allgemeiner und genauer formuliert.

Der Leser findet in der zugehörigen Sammlung die passenden Übungsaufgaben mit vollständigen Lösungen.

Das erste Kapitel stellt einige Fakten über Zahlen und Rechnen vor und der Leser kann es zunächst überfliegen, um nur zurückzukommen, wenn entsprechende Fragen auftauchen.

Die Kapitel über Lineare Gleichungssysteme und Lineare Optimierung können unabhängig von den vorherstehenden studiert werden.

1. Grundlagen

In diesem Kapitel können Sie Ihre Schulkenntnisse über das Rechnen mit Zahlen auffrischen.

1.1 Die reellen Zahlen

In den Anwendungen der Mathematik werden meistens die *reellen Zahlen* benutzt. Wir stellen hier den Aufbau dieses Zahlsystems dar.

Die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ verwenden wir zum Zählen von Dingen, sie heißen *natürliche Zahlen* $\mathbb{N}$.

Um auch kein Ding oder den Verlust zahlenmäßig darzustellen, reichen die natürlichen Zahlen nicht aus, da sie weder die Null noch negative Zahlen enthalten.

Die Menge der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ enthält die natürlichen Zahlen, die negativen Zahlen und die Null.

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Addieren, subtrahieren oder multiplizieren wir zwei ganze Zahlen, ist das Ergebnis eine ganze Zahl.

$$\begin{array}{ll} 5+3=8 & 6+(-9)=6-9=-3 \\ -5+(-8)=-5-8=13 & -5-(-8)=-5+8=8-5=3 \\ 17\cdot 3=51 & 4\cdot(-13)=-52 \end{array}$$

Die Division dagegen ist in den ganzen Zahlen nicht unbeschränkt ausführbar.

$$\begin{array}{ll} 27:9=3 & (-18):6=-3 \\ 16:(-8)=-2 & (-26):(-13)=2 \end{array}$$

aber

$$4:8=? \qquad (-14):6=?$$

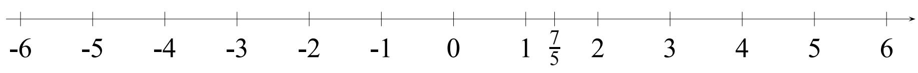
Um die Verteilung von drei Birnen auf zwei Personen auszudrücken, brauchen wir die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$. Eine rationale Zahl kann als das Verhältnis $\frac{p}{q}$ einer ganzen Zahl p und einer natürlichen Zahl q dargestellt werden. Sie heißt *Bruch* mit dem *Zähler* p und dem *Nenner* q .

Da jede ganze Zahl auch als Bruch z.B. $7=\frac{7}{1}$ dargestellt werden kann, enthält die Menge der rationalen Zahlen als Teilmenge die ganzen Zahlen.

In den rationalen Zahlen sind alle vier Grundrechenarten, auch die Division, unbeschränkt ausführbar.

Die Zahlengerade

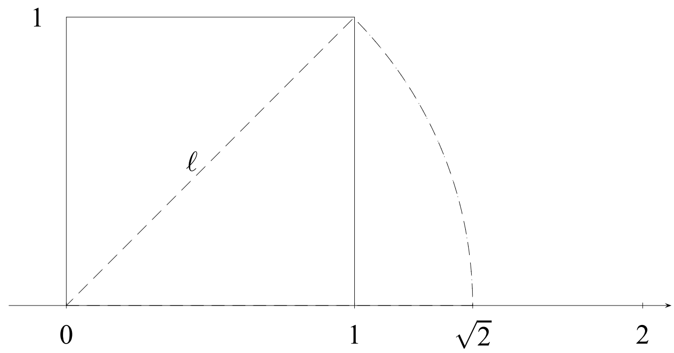
Zu jeder rationalen Zahl, etwa $\frac{7}{5}$, können Sie genau einen Punkt auf der Zahlengeraden zeichnen.



Wählen Sie umgekehrt auf der Zahlengeraden einen Punkt, so können Sie seine Koordinate bis zu jeder gewünschten Genauigkeit durch eine rationale Zahl angeben.

Auf dieser Tatsache beruht das praktische Messen von Längen, Flächen- und Volumeninhalten, Massen und anderen Größen.

Die an dieser Erfahrung geschulte Anschauung, legt nahe, dass jeder Punkt der Zahlengeraden eine rationale Zahl als Koordinate hat. Es stellt sich aber heraus, dass diese Annahme falsch ist, denn es gibt Punkte auf der Zahlengeraden, die keine rationale Koordinaten haben können. Man kann beweisen, dass z.B. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ keine rationalen Zahlen sein können, ihnen kann allerdings ein Punkt zugeordnet werden. Man nennt sie *irrationale Zahlen*.



Die Diagonale im Einheitsquadrat hat keine rationale Länge.

Um ein Zahlensystem zu erhalten, das jedem Punkt der Zahlengeraden eine Zahl zuordnet, erweitert man das System der rationalen Zahlen um die irrationalen Zahlen. Dabei entsteht die Menge der *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$.

Zwischen den Punkten der Zahlengeraden und den reellen Zahlen gibt es eine Eins-zu-Eins-Zuordnung.

Dezimaldarstellung

Der Taschenrechner zeigt alle Zahlen in ihrer Dezimaldarstellung und davon nur soviel, wie die Anzeige gestattet. Abbrechende Dezimalen haben endlich viele Nachkommastellen, sie stellen rationale Zahlen dar.

$$7{,}125 = \frac{7\,125}{1\,000}$$

Viele rationale Zahlen haben unendlich viele Nachkommastellen.

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$$
$$\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots = 0{,}8\overline{3}$$
$$\frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots = 0{,}\overline{45}$$
$$\frac{2}{7} = 0{,}428571428571\ldots = 0{,}\overline{428571}$$

In diesem Fall wiederholt sich eine Zifferngruppe – die *Periode*– unendlich oft.

Die rationalen Zahlen haben eine abbrechende oder eine periodische Dezimaldarstellung. Jede Dezimalzahl dieser Art stellt eine rationale Zahl dar.

Jede irrationale Zahl hat eine nicht abbrechende und nicht periodische Dezimaldarstellung.

$$0{,}101101110111101111110\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}772\,050\,807\,57\ldots$$

Jede Dezimalzahl dieser Art stellt eine irrationale Zahl dar.

1.2 Rechenregeln

Wenn in einem mathematischen Ausdruck mehr als zwei Zahlen und Rechenoperationen angegeben sind, muss die Reihenfolge, in der die Operationen auszuführen sind, festgelegt werden.

- Wenn nur Additionen und Subtraktionen verlangt sind, rechnet man in der Reihenfolge der Aufschreibung.

$$15-3+6-4+1 = 12+6-4+1 = 18-4+1 = 14+1 = 15$$

- Wenn nur Multiplikationen und Divisionen verlangt sind, rechnet man in der Reihenfolge der Aufschreibung.

$$15:3\cdot 6\cdot 4:10 = 5\cdot 6\cdot 4:10 = 30\cdot 4:10 = 120:10 = 12$$

- Wenn Additionen und Multiplikationen verlangt sind, werden zunächst alle Multiplikationen ausgeführt und danach die Additionen. *Punktrechnung vor Strichrechnung.*

$$24:6+2\cdot 5 = 4+2\cdot 5 = 4+10 = 14$$
$$14-4\cdot 5 = 14-20 = -6$$
$$3\cdot 14:7+8-11 = 42:7+8-11 = 6+8-11 = 14-11 = 3$$

Klammern sind zu setzen, wenn eine abweichende Reihenfolge verlangt ist.

Mit Klammern	Ohne Klammern
$10-(7+1)=10-8=2$	$10-7+1=3+1=4$
$(12-3)\cdot 5=9\cdot 5=45$	$12-3\cdot 5=12-15=-3$
$12:(4+2)-7=12:6-7=2-7=-5$	$12:4+2-7=3+2-7=5-7=-2$

Soll eine Summe mit einer Zahl multipliziert werden, so ist zunächst die Summe zu berechnen und danach das Ergebnis mit der Zahl zu multiplizieren. Man kann aber auch jeden Summanden mit der Zahl multiplizieren und danach summieren (*Distributivgesetz*).

$$3\cdot(17+12-8)=3\cdot 21=63$$
$$3\cdot(17+12-8)=3\cdot 17+3\cdot 12-3\cdot 8=51+36-24=63$$

Beachten Sie, dass die erste Variante weniger Multiplikationen benötigt als die zweite! Daher ist es oft vorteilhaft, einen gemeinsamen Faktor *auszuklammern*..

$$a(b\pm c)=ab\pm ac$$

Rechnen mit Brüchen

Regel	Beispiel
$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$	$\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 7}{5\cdot 7} = \frac{21}{35}$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4}$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2\cdot 4 + 5\cdot 3}{5\cdot 4} = \frac{23}{20}$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2\cdot 3}{5\cdot 4} = \frac{6}{20}$
$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$
$\frac{a}{0}$ ist nicht definiert	$\frac{-3}{0}, \frac{0}{0}$

Die erste Regel ist besonders wichtig, sie definiert das *Kürzen* oder das *Erweitern* von Brüchen und zeigt, dass der Wert des Bruches dabei unverändert bleibt.

Beispiel 1:

$$\frac{26}{39} = \frac{2\cdot 13}{3\cdot 13} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{15ij}{12jk} = \frac{3\cdot 5ij}{3\cdot 4jk} = \frac{5i}{4k}$$
$$\frac{8m-12n}{16m-24n} = \frac{4(2m-3n)}{8(2m-3n)} = \frac{1}{2}$$

Potenzen

Ein Produkt mit gleichen Faktoren wie $4\cdot 4\cdot 4$ oder $(-1{,}5)\cdot(-1{,}5)\cdot(-1{,}5)\cdot(-1{,}5)$ schreiben wir auch als $4^3 = 64$ oder $(-1{,}5)^4 = 5{,}0625$.

Für jede Zahl a und jede natürliche Zahl n ist a^n definiert als

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

und wird die *n-te Potenz von a* genannt.
Dabei heißt a *Basis* (Grundzahl) und n *Exponent* (Hochzahl).

Es ist sinnvoll

$$a^0 = 1 \qquad \text{für} \quad a \neq 0$$

festzusetzen. Der Ausdruck 0^0 ist nicht definiert.

Auch Potenzen mit *negativen*, ganzen Exponenten erweisen sich als zweckmäßig. Dazu wird für jede Zahl $a \neq 0$ und jede natürliche Zahl n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

gesetzt.

Die folgenden Rechenregeln für Potenzen sollten Sie sicher anwenden können.

Gleiche Basen mit verschiedenen Exponenten:

$$a^i \cdot a^k = a^{i+k}$$
$$a^i : a^k = a^{i-k}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Gleiche Exponenten zu verschiedenen Basen:

$$(ab)^s = a^s b^s$$
$$(a:b)^s = \left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s} = a^s b^{-s}$$

Die Tatsache

$$(a+b)^s \neq a^s + b^s \qquad \text{für} \quad s \neq 1$$

wird gerne vergessen.

Die hier angegebenen Regeln gelten auch für reelle Zahlen im Exponenten.

Wurzeln

Die Zahl y heißt *Wurzel* von x, wenn $y^2 = x$ gilt. Wir schreiben dafür $y = \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Man setzt allgemein für $n = 1, 2, \ldots$ fest

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \text{, wenn} \quad y^n = x.$$

Es ist zweckmäßig, dafür zu schreiben

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Durch diese Definition von Potenzen mit rationalen Exponenten können wir mit Wurzeln nach den für Potenzen geltenden Regeln rechnen.

Nach dem Vorhergehenden ist es möglich, Potenzen mit beliebigen Brüchen als Exponenten einen Sinn zu geben.

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

Die Gleichung $y^n = x$ hat für $x \geq 0$ und $n = 2,4,6,8,\ldots$ die beiden Lösungen

$$y = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{oder} \quad y = -x^{\frac{1}{n}}.$$

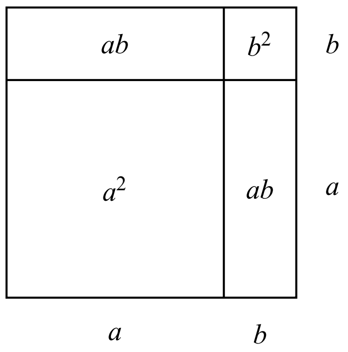
Die Gleichung $y^n = x$ hat für $n = 1,3,5,7,\ldots$ die Lösung

$$y = x^{\frac{1}{n}} \qquad , \text{wenn} \quad x \geq 0$$

$$y = -\left(-x\right)^{\frac{1}{n}} \qquad , \text{wenn} \quad x < 0.$$

Der Taschenrechner hat eine Funktionstaste $\boxed{y^x}$ für beliebige Potenzen, die in der Regel nur eine positive Basis zulässt. Einige Modelle bieten auch eine n - te Wurzel.

Binomische Formeln



Der Flächeninhalt des großen Quadrats mit der Seitenlänge $a+b$ ist gleich der Summe der Inhalte der Teilflächen.

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Die folgenden drei *Binomischen Formeln* gelten für beliebige reelle Zahlen.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Beispiel 2: Kopfrechnen:

$$51^2 = (50+1)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 + 1 = 2601$$
$$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 + 1 = 9801$$
$$102 \cdot 98 = (100+2)(100-2) = 100^2 - 2^2 = 9996$$

Beispiel 3: Umwandeln in Produkte:

$$
\begin{aligned}
4a^2 + 12ab + 9b^2 &= (2a+3b)^2 \\
49x^2 - 42x + 9 &= (7x-3)^2 \\
81u^2 - 121v^2 &= (9u+11v)(9u-11v) \\
16x^2 - 24x + 9 &= \ldots \\
144a^2x^2 - 81b^2y^2 &= \ldots \\
-16u^2x^4 + 9w^4y^6 &= \ldots
\end{aligned}
$$

Beispiel 4: Ordnen nach Potenzen der Variablen:

$$
\begin{aligned}
&(5x+4)^2 - (3x-5)^2 + 4(x-3)(x+3) \\
&= 25x^2 + 40x + 16 - 9x^2 + 30x - 25 + 4x^2 - 36 \\
&= (25-9+4)x^2 + (40+30)x + (16-25-36) \\
&= 20x^2 + 70x - 45
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(g-1)^2(g+1)^2 \\
&= [(g-1)(g+1)]^2 \\
&= [g^2-1]^2 \\
&= g^4 - 2g^2 + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(2x-3y)^2 - (3x-2y)^2 \\
&= 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 9x^2 + 12xy - 4y^2 \\
&= -5x^2 + 5y^2
\end{aligned}
$$

Binomialkoeffizienten

Für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen wird eine abkürzende Bezeichnung benutzt:

$$1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n = n!. \qquad \text{Sprich „ } n \text{ Fakultät“ !}$$

Der folgende Term ist für $k, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ mit $k \leq n$ definiert und heißt *Binomialkoeffizient*.

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} \qquad \text{Sprich „ } n \text{ über } k\text{“ !}$$

Um $(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)$ auszumultiplizieren, d.h. als Summe von Produkten $a^i \cdot b^j$ zu schreiben, kann man so vorgehen:

1. Jede Klammer ist zu verwenden und damit hat jedes Produkt n Faktoren; darunter sind $k = 0,1,2,\ldots,n$ Faktoren a und die restlichen $n-k$ Faktoren b; es hat die Form $a^k \cdot b^{n-k}$.

2. Da auf $\binom{n}{k}$ Weisen die k Klammerterme für a gewählt werden können, hat dieser Summand die Form
$$\binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

3. Summe dieser Produkte für $k = 0,1,2\ldots,n$

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{n}a^nb^0 \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\end{aligned}$$

Diese Anwendung führte zu der Bezeichnung *Binomialkoeffizient* für die Zahl $\binom{n}{k}$; sie kann aus dem *Pascalschen Dreieck* abgelesen werden: dabei bezeichnet n die Zeile und k die Position in der Zeile, wenn beide von null an gezählt werden.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}$$

In diesem Dreieck sind die Zahlen am Rand gleich eins. Im Inneren ist jede Zahl gleich der Summe der beiden links und rechts über ihr stehenden Zahlen. Die nächste Formel drückt diese Eigenschaft aus.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \qquad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots n-1$$

Lesen Sie im Pascalschen Dreieck die Symmetrie der n - ten Zeile ab!

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Bestätigen Sie auch die Identitäten!

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Das rechtwinklige Koordinatensystem

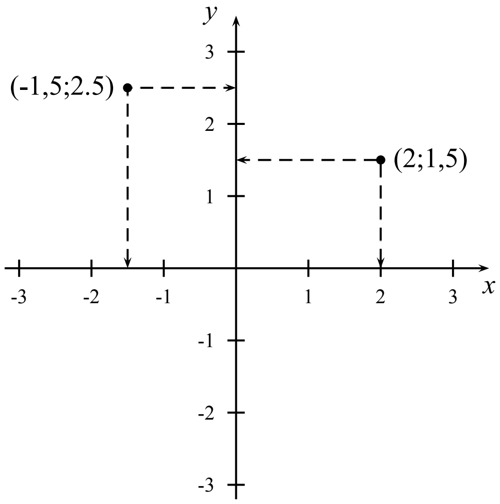
So wie jede Gerade nach der Wahl des Nullpunktes und des Einheitspunktes ein geometrisches Modell der reellen Zahlen ist, können wir eine Eins-zu-Eins-Zuordnung zwischen den Punkten einer Ebene und allen geordneten Paaren reeller Zahlen herstellen.

Wir nennen (a,b) ein geordnetes Paar, weil es auf die Reihenfolge der Zahlen in dem Paar ankommt. Die geordneten Paare $(5,-3)$ und $(-3;5)$ sind voneinander verschieden.

Wir zeichnen zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden, die als *Koordinatenachsen* dienen werden. Den Schnittpunkt der Geraden bezeichnen wir als *Koordinatenursprung* oder Nullpunkt.

Auf der horizontalen Achse – der *Abszisse* – wählen wir rechts vom Ursprung einen Einheitspunkt und auf der vertikalen Achse – der *Ordinate* sei der Einheitspunkt über dem Nullpunkt festgesetzt. Damit ist jede Achse für sich eine Zahlengerade.

In der Regel tragen die Achsen Namen, wie x für die Abszisse und y für die Ordinate. Dann sprechen wir auch von der x -Achse, der y -Achse und der xy -Ebene.



Sei ein Punkt P gewählt. Die Parallele zur Ordinate schneidet die Abszisse an der Stelle x und die Parallele zur Abszisse schneidet die Ordinate in y .

Das geordnete Zahlenpaar (x,y) heißt Koordinatenpaar des Punktes P . Übereinkunft ist die Reihenfolge: Abszisse, Ordinate.

Umgekehrt bestimmt jedes Zahlenpaar (x,y) den Schnittpunkt der Parallen zu den Achsen durch die Stellen x und y .

Auf der Zahlengeraden wählen wir zwei Punkte mit den Koordinaten a und b und berechnen ihren Abstand. Offensichtlich ist er durch $a-b$ gegeben, wenn a größer als b ist, oder durch $b-a$, wenn b größer als a ist.

Der folgende Term heißt *Absolutbetrag* von x oder *Betrag* von x .

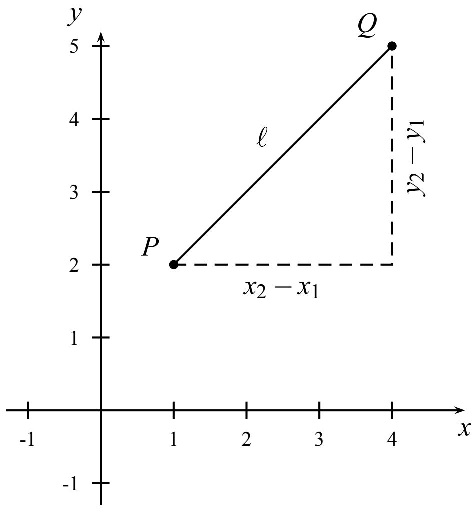
$$|x| = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

Positive Zahlen bleiben unverändert und bei negativen kehrt sich das Vorzeichen um.

Mit Hilfe des Betrages ist der Abstand zweier Punkte der Zahlengeraden bequem aufzuschreiben.

$$|a-b| = |b-a|$$

Im Falle zweier Punkte $P(x_1,y_1)$ und $Q(x_2,y_2)$ der xy -Ebene hängt der Abstand – die Länge der Strecke– von vier Zahlen ab.



Satz des Pythagoras:
In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \ell^2$$

$$\boxed{\ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Die Abstandsformel gilt offenbar für beliebig in der Ebene gewählte Punkte, weil die Koordinatendifferenzen quadriert in sie eingehen.

Im hier gegebenen Beispiel $P(1;2)$ $Q(4;5)$ gilt

$$\ell = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} \simeq 4{,}2426$$

2. Gleichungen und Ungleichungen

In fast allen Anwendungen der Mathematik müssen Gleichungen gelöst werden. Beispiele sind

$$5x+7=13-2x \qquad \frac{u}{u+4}+\frac{4}{5}=\frac{4u}{u-3} \qquad Y-C=I$$

Die erste Gleichung enthält die *Variable* x, die zweite die Variable u und die dritte die Variablen Y,C und I.

Die Gesamtheit aller Werte, die die Gleichung erfüllen, heißt *Lösungsmenge*; sie wird mit $\mathbb{L}$ bezeichnet.

In diesem Kapitel finden Sie Methoden, nach denen Sie zu Gleichungen unterschiedlichen Typs die Lösungsmenge bestimmen können.

Wir werden zunächst Gleichungen in einer Variablen betrachten.

2.1 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Die erste Gleichung formen wir in den folgenden Schritten um:

$$\begin{aligned} 5x+7 &= 13-2x && \text{subtrahiere 7 auf beiden Seiten} \\ 5x &= 6-2x && \text{addiere } 2x \text{ auf beiden Seiten} \\ 7x &= 6 && \text{dividiere beide Seiten durch 7} \\ x &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

Wie Sie vorgehen, ist Ihrer Fantasie überlassen; so kann man auch den folgenden Weg gehen.

$$\begin{aligned} 5x+7 &= 13-2x && |+2x \\ 7x+7 &= 13 && |\text{ausklammern} \\ 7(x+1) &= 13 && |:7 \\ x+1 &= \frac{13}{7} && |-1 \\ x &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

Hier wird eine Folge von Gleichungen erzeugt, bis in der letzten die Variable auf einer Seite isoliert steht. Die verwendeten Operationen sind von der Art, dass zwei benachbarte Gleichungen dieselbe Lösungsmenge haben. Das bedeutet, dass weder Lösungen verloren gehen noch dazukommen.

Eine Änderung einer Gleichung, bei der die Lösungsmenge unverändert bleibt, heißt *Äquivalenzumformung*.
Umformungen dieser Art sind

- Zusammenfassungen auf einer Seite,
- Multiplikation beider Seiten mit einer Konstanten oder einem Term, die aber nicht null sein dürfen,
- Addition einer Konstanten oder eines Terms zu beiden Seiten,
- Vertauschen der Seiten.

Oben ist aus der letzten Gleichung die Lösung $\frac{6}{7}$ unmittelbar abzulesen und weil nur Äqivalenzumformungen angewandt wurden, muss man daraus schließen, dass sie auch die Ausgangsgleichung erfüllt. In diesem Fall hat die Lösungsmenge genau ein Element.

Um sicher zu gehen, dass die Lösung korrekt ist, setzt man die berechneten Werte in die Ausgangsgleichung ein und prüft, ob die Gleichung erfüllt ist.

$$\begin{aligned} 5\cdot\frac{6}{7}+7 &= 13-2\cdot\frac{6}{7} \\ \frac{30}{7}+7 &= 13-\frac{12}{7} \\ \frac{30}{7}+\frac{49}{7} &= \frac{91}{7}-\frac{12}{7} \\ \frac{79}{7} &= \frac{79}{7} \qquad \text{ist offensichtlich wahr.} \end{aligned}$$

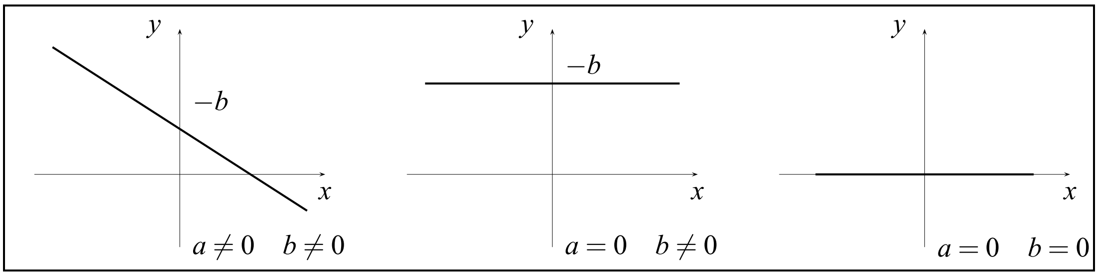
Eine Gleichung heißt *linear* in x, wenn sie durch Äquivalenzumformungen in die Gestalt

$$ax = b$$

gebracht werden kann. Dabei stehen a, b für feste Zahlen oder Terme ohne die Variable.
Zur Lösung sind drei Fälle zu unterscheiden.

$$a \begin{cases} \neq 0 & \text{genau eine Lösung} \quad x=\frac{b}{a} \quad \mathbb{L}=\{\frac{b}{a}\} \\ = 0 \ \text{und} \ b & \begin{cases} \neq 0 & 0\cdot x=b \ \text{ ist für kein } x \text{ erfüllt} \quad \mathbb{L}=\emptyset \\ =0 & 0\cdot x=0 \ \text{ ist für jedes } x \text{ erfüllt} \quad \mathbb{L}=\mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$$

Eine andere Sichtweise: Die Lösungen von $ax = b$ sind die Nullstellen der Funktion $y = f(x) = ax - b$, also die Schnittstellen der Geraden mit der x-Achse. Die Graphen zeigen die drei Fälle.



Beispiel 1:

$$\begin{aligned} 6x - 5 &= 3x + 4 && \mid +5 \\ 6x &= 3x + 9 && \mid -3x \\ 3x &= 9 && \mid :3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x + 3 - 4x + 4 &= 5x + 9 - 3x && \mid \text{ zusammenfassen} \\ 2x + 7 &= 2x + 9 && \mid -2x \\ 7 &= 9 \\ \mathbb{L} &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(x+2) + 3x + 4 &= 5(x+1) + 3 && \mid \text{ zusammenfassen} \\ 5x + 8 &= 5x + 8 && \mid -5x \\ 8 &= 8 \\ \mathbb{L} &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lineare Ungleichungen

Beispiel 2:

$$
\begin{aligned}
6x-5 &< 3x+4 && \mid +5\\
6x &< 3x+9 && \mid -3x\\
3x &< 9 && \mid :3\\
x &< 3\\
\mathbb{L} &= \{x\in\mathbb{R} \mid x<3\} = (-\infty;3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
6x+3-4x+4 &< 5x+9-3x && \mid \text{zusammenfassen}\\
2x+7 &< 2x+9 && \mid -2x\\
7 &< 9\\
\mathbb{L} &= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2(x+2)+3x+4 &< 5(x+1)+3 && \mid \text{zusammenfassen}\\
5x+8 &< 5x+8 && \mid -5x\\
8 &< 8\\
\mathbb{L} &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Die Äquivalenzumformungen für Gleichungen werden auch bei Ungleichungen angewendet, jedoch mit einer Besonderheit:
Wird die Ungleichung $u < v$ mit einer *negativen* Zahl oder einem negativen Term multipliziert, *kehrt sich das Relationszeichen um*.

$$
\begin{aligned}
15 &< 25 && \mid \cdot(-0{,}2)\\
-3 &> -5
\end{aligned}
$$

Beispiel 3: Die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung soll berechnet werden.

$$\frac{x+1}{x-3} < 2\,; \qquad x \neq 3$$

Zunächst werden wir mit dem Nenner multiplizieren. Hier müssen wir beachten, dass $x-3$ in Abhängigkeit von x positiv oder negativ sein kann. Im ersten Fall bleibt das $<$ -Zeichen erhalten und im zweiten wird es durch das $>$ -Zeichen ersetzt.

1. Fall $x-3>0$; $x>3$ und

$$
\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-3} &< 2 && \mid \cdot(x-3)\\
x+1 &< 2(x-3) && \mid \text{zusammenfassen}\\
x+1 &< 2x-6 && \mid +6-x\\
7 &< x
\end{aligned}
$$

Es sind gleichzeitig $3 < x$ und $7 < x$ zu erfüllen. Das heißt, die schärfere Einschränkung $7 < x$ bestimmt die Lösungsmenge $\mathbb{L}_1$.

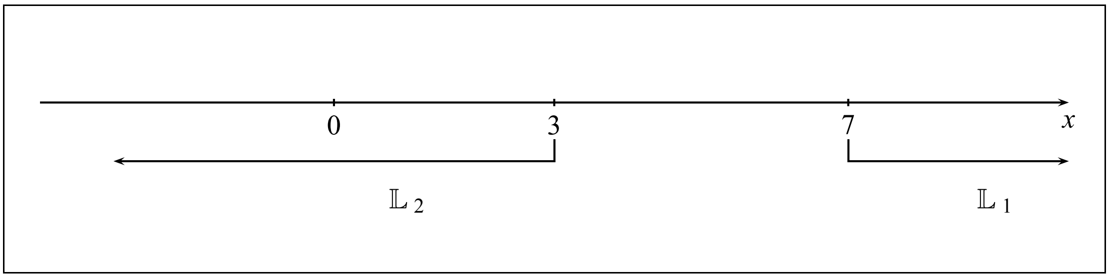
2. Fall $x - 3 < 0$; $x < 3$ und

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-3} &< 2 && |\cdot(x-3) \\ x+1 &> 2(x-3) && |\text{zusammenfassen} \\ x+1 &> 2x-6 && |+6-x \\ 7 &> x \end{aligned}$$

Es sind gleichzeitig $x < 3$ und $x < 7$ zu erfüllen, das geht mit $x < 3$ und bestimmt $\mathbb{L}_2$.

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der vorgegebenen Ungleichung enthält die Zahlen, die in $\mathbb{L}_1$ oder in $\mathbb{L}_2$ liegen.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \mid 7 < x\} \cup \{x \mid x < 3\} = \{x \mid x < 3 \vee 7 < x\}$$



2.2 Quadratische Gleichungen

Eine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

kann durch Division mit a auf die *Normalform*

$$\begin{gathered} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ p = \frac{b}{a} \quad , \quad q = \frac{c}{a} \\ \boxed{x^2 + px + q = 0} \end{gathered}$$

gebracht werden, diese wiederum durch die Addition von $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ auf beiden Seiten

$$x^2 + px + q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$
$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Dieser Schritt wird *quadratische Ergänzung* genannt. Mit der Binomischen Formel folgt schließlich

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

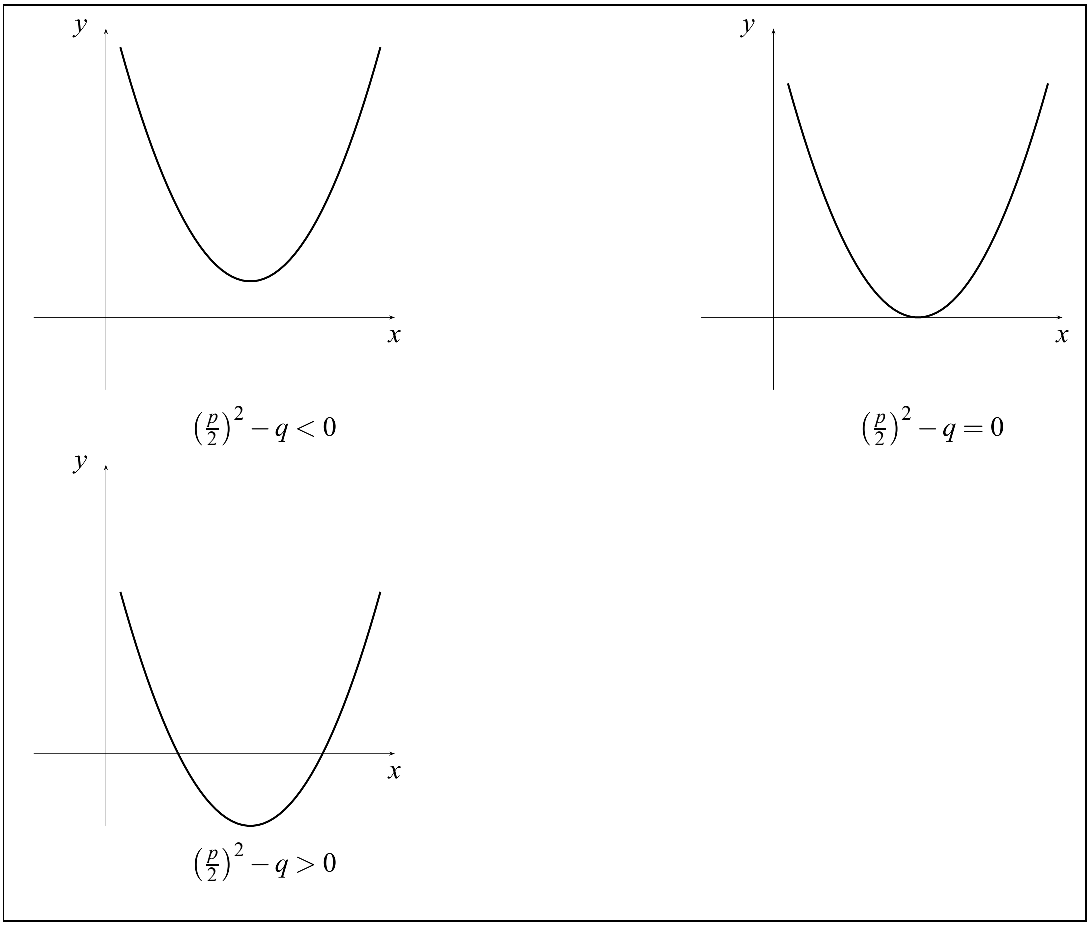
An der letzten Form ist die Lösungsmenge (fast) unmittelbar abzulesen: Beachten wir, dass die linke Seite – weil Quadrat– positiv oder null ist, so haben wir drei Fälle der rechten Seite zu unterscheiden.

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \begin{cases} < 0 & \text{leere Menge} \\ = 0 & \text{genau eine Lösung} \quad x = -\frac{p}{2} \\ > 0 & \text{zwei Lösungen} \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \vee \quad x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{cases}$$

Die dritte Zeile — die allgemeine p-q-Formel — ist nur für $b \neq 0$ und $c \neq 0$ sinnvoll, denn

- für $b = 0$ erhält man aus $ax^2 + c = 0$ sofort $x^2 = -\frac{c}{a}$,
- für $c = 0$ wird x ausgeklammert: $ax^2 + bx = x \cdot (ax + b)$, d.h. $x = 0$ oder $x = \frac{-b}{a}$

Die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind die Nullstellen der Funktion $y = f(x) = x^2 + px + q$, also die Schnittstellen der Parabel mit der x -Achse. Die Graphen zeigen die drei möglichen Fälle.



$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$

2.3 Bruchgleichungen

Wenn in einer Gleichung die Variable im Nenner eines Bruchterms steht, spricht man von einer *Bruchgleichung*.

Durch Multiplikation beider Seiten mit dem Hauptnenner überführen wir sie in eine ganz-rationale Gleichung. Wenn dabei eine lineare oder quadratische Gleichung entsteht, können wir die entsprechenden Lösungsmethoden anwenden.

Beispiel 4: In der folgenden Gleichung kann für die Variable u weder -4 noch 3 eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{u}{u+4}+\frac{4}{5} &= \frac{4u}{u-3} && \text{multipliziere mit } 5(u+4)(u-3)\\
5(u-3)u+4(u+4)(u-3) &= 5(u+4)4u && \text{löse die Klammern auf}\\
5u^2-3u+4u^2+4u-48 &= 20u^2+80u && \text{fasse gleiche Potenzen zusammen}\\
9u^2+u-48 &= 20u^2+80u && \text{subtrahiere } 20u^2+80u\\
-11u^2-79u-48 &= 0 && \text{dividiere durch } (-11)\\
u^2+\frac{79}{11}u+\frac{48}{11} &= 0 && \text{wende die p-q-Formel an}
\end{aligned}$$

$$u = -\frac{79}{22} \pm \sqrt{\left(\frac{79}{22}\right)^2 - \frac{48}{11}}$$

$$u = 4{,}94008264463 \qquad u = -12{,}1219008264$$

Die Ergebnisse sollten je nach Zusammenhang auf eine angemessene Stellenzahl gerundet werden, z.B. $u = 4{,}94$ und $u = -12{,}12$.

Beispiel 5: Im Laufe der Rechnung zeigt sich, dass die folgende Bruchungleichung auf lineare Ungleichungen zurückzuführen ist.

$$\frac{x+1}{x-3} < \frac{x-1}{x+2}$$

Die Bruchungleichung formen wir in eine ganze Ungleichung um. Dabei muss *unterschieden* werden, ob der Hauptnenner $(x-3)(x+2)$ *positiv oder negativ* ist.

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-3}\cdot(x-3)(x+2) &< \frac{x-1}{x+2}\cdot(x-3)(x+2) \quad \text{für} \quad (x-3)(x+2)>0\\
\frac{x+1}{x-3}\cdot(x-3)(x+2) &> \frac{x-1}{x+2}\cdot(x-3)(x+2) \quad \text{für} \quad (x-3)(x+2)<0
\end{aligned}$$

Jede Ungleichung wird nun einzeln bearbeitet. Wegen der kürzeren Schreibweise sind hier die logischen Zeichen angenehm: $\vee$ steht für „oder“ und $\wedge$ für „und“.

1. Fall: Hier ist $(x-3)(x+2) > 0$.

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2) &< (x-1)(x-3)\\ x^2+3x+2 &< x^2-4x+3\\ x &< \frac{1}{7}\end{aligned}$$

Hier sind wieder zwei Fälle zu unterschieden.

$$(x-3)(x+2) > 0$$

$$\begin{array}{ccc}(x+2>0 \wedge x-3>0) & \vee & (x+2<0 \wedge x-3<0)\\ (x>-2 \wedge x>3) & \vee & (x<-2 \wedge x<3)\\ x>3 & \vee & x<-2\end{array}$$

Diese Ungleichungen müssen gleichzeitig mit $x < \frac{1}{7}$ gelten.

$$(x<\frac{1}{7} \wedge x>3) \qquad \vee \qquad (x<\frac{1}{7} \wedge x<-2)$$

Die erste Bedingung ist nicht zu erfüllen und die letzte Bedingung wird vereinfacht zu

$$x < -2.$$

2. Fall: Hier ist $(x-3)(x+2) < 0$.

$$(x+1)(x+2) > (x-1)(x-3)$$
$$x^2+3x+2 > x^2-4x+3$$
$$x > \frac{1}{7}$$

Hier haben wir wieder zwei Fälle zu unterschieden.

$$(x-3)(x+2) < 0$$

$$(x+2<0 \wedge x-3>0) \quad \vee \quad (x+2>0 \wedge x-3<0)$$
$$(x<-2 \wedge x>3) \quad \vee \quad (x>-2 \wedge x<3)$$
$$-2 < x < 3$$

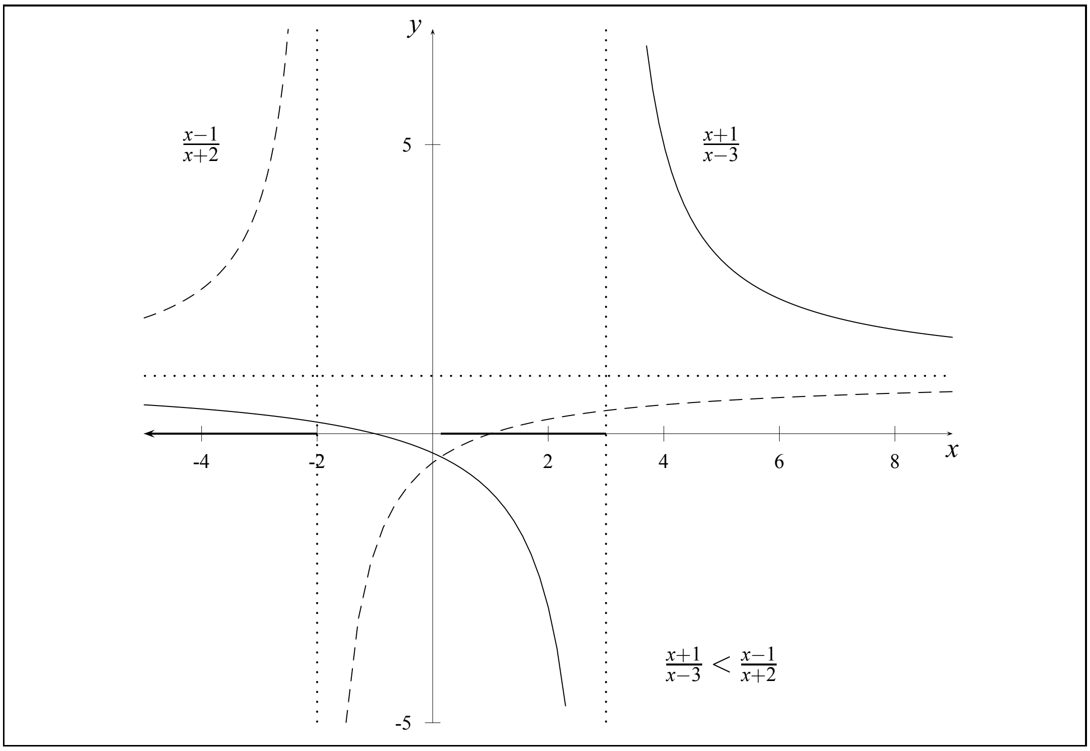
Diese Ungleichungskette muss gleichzeitig mit $x > \frac{1}{7}$ gelten.

$$\frac{1}{7} < x < 3$$

Als Zusammenfassung der beiden Fälle erhalten wir

$$x < -2 \quad \vee \quad \frac{1}{7} < x < 3.$$

Die Graphen der beiden Funktionen, die aus den Bruchtermen der linken und rechten Seite gebildet sind, veranschaulichen die Situation.



3. Funktionen einer Variablen

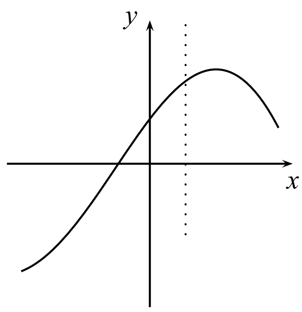
Funktionen sind die wichtigsten Hilfsmittel in den Anwendungen der Mathematik. Sie präzisieren den Zusammenhang zwischen zwei Größen, indem sie eine Vorschrift angeben, nach der eine Größe aus einer anderen zu berechnen ist. Beispiele sind: Der Ernteertrag hängt von der ausgebrachten Düngermenge ab. Der Zinssatz bestimmt die Jahresrendite eines Guthabens. Die Konzentration eines Wirkstoffes im Blut verändert sich im Laufe der Zeit nach der Verabreichung des Medikaments.

Eine Abbildung einer Zahlenmenge $\mathbb{D}$ in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass jeder Zahl aus $\mathbb{D}$ genau eine Zahl aus $\mathbb{R}$ zugeordnet ist, heißt *Funktion* einer reellen Variablen.

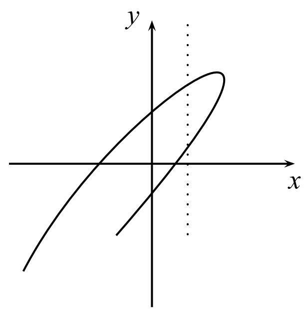
$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \qquad f : x \mapsto f(x) \qquad y = f(x)$$

Der *Graph* einer Funktion f ist die Menge der Punkte der xy-Ebene, mit den Koordinaten (x,y), falls $y = f(x)$, also die y-Koordinate der Wert der Funktion an der x-Koordinate ist.

Der Graph einer Funktion wird von einer Parallelen zur y-Achse in höchstens einem Punkt geschnitten.



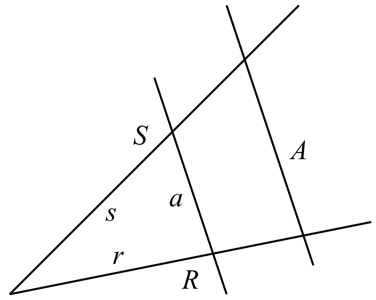
Funktion



Keine Funktion

3.1 Lineare Funktionen

In der Figur schneidet ein Parallelenpaar ein Strahlenpaar, dabei entstehen zwei Dreiecke. Sie stimmen in entsprechenden Winkelgrößen überein; zwei Dreiecke mit dieser Beziehung nennt man *ähnlich*. Aus der Figur sollen die Längenverhältnisse entsprechender Dreiecksseiten abgelesen werden.

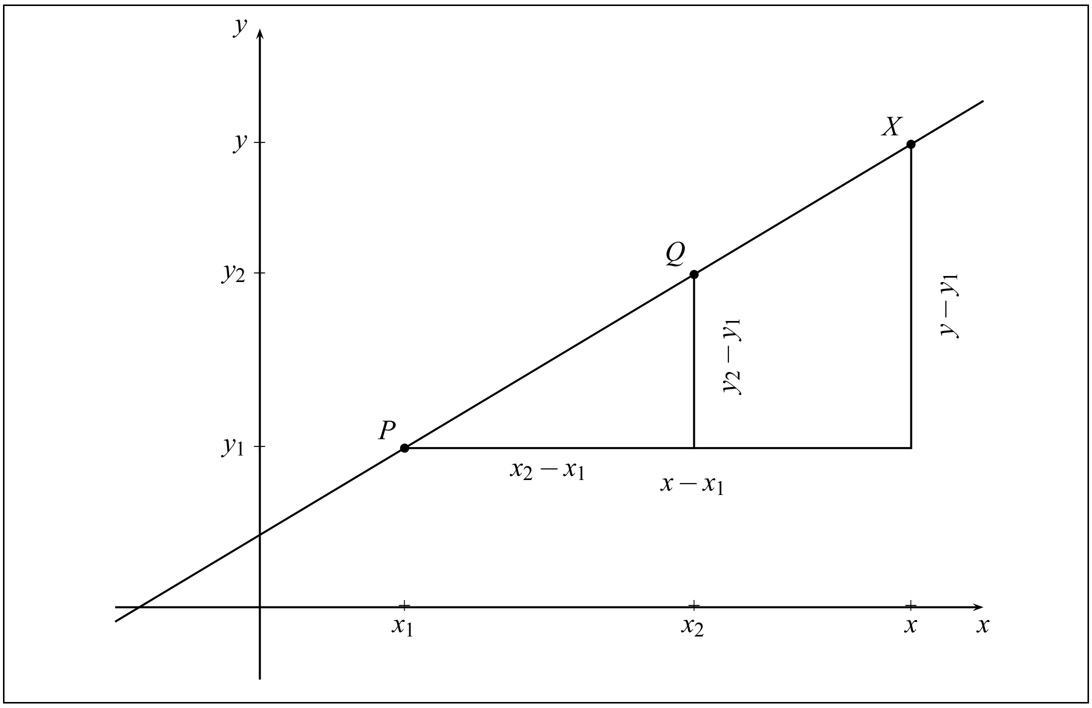


(Strahlensatz)
Es gelten die Streckenverhältnisse:

$$\frac{A}{R} = \frac{a}{r} \quad \text{und} \quad \frac{A}{S} = \frac{a}{s}$$

$$\frac{A}{a} = \frac{R}{r} = \frac{S}{s}$$

In einem Koordinatenkreuz sei die Gerade durch die Punkte $P(x_1, y_1)$ und $Q(x_2, y_2)$ gegeben. Weiter sei $X(x, y)$ ein beliebiger Punkt auf dieser Geraden. Die Parallele zur Abszissenachse durch P bildet mit der Geraden das Strahlenpaar und die beiden Parallelen zur Ordinatenachse durch Q und X schneiden die beiden Strahlen.



Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Das ist die *Zwei-Punkte-Form* der Geradengleichung. Hier sind auch negative Differenzen zugelassen. Auf dieser Geraden PQ liegen genau die Punkte X, deren Koordinaten (x,y) diese Gleichung erfüllen.

Nach Multiplikation mit $(y_2 - y_1)$ erhält man

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$ die *Zwei-Punkte-Form*

indem man $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ setzt,

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$ die *Punkt-Steigungs-Form*

und schließlich mit $y = mx + (y_1 - mx_1)$

$$\boxed{y = mx + b}$$ die *Steigungs-Abschnitts-Form* .

m heißt die *Steigung* und b der y *-Achsenabschnitt* der Geraden.

$f(x) = mx + b$ heißt *lineare Funktion*.

Sei x eine beliebige Zahl.

$$f(x+1) = m(x+1) + b = mx + b + m = f(x) + m$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Steigung m die Änderung des Funktionswertes misst, wenn das Argument x um 1 erhöht wird.

Beispiel 1: Eine Firma stellt pro Woche x Mengeneinheiten eines Gutes her und verkauft zu einem Preis von 2 Geldeinheiten pro Mengeneinheit. Die Produktionskosten setzen sich aus Fixkosten 40 und von der Produktionsmenge bestimmten variablen Kosten zusammen. Eine Einheit zu produzieren kostet $0{,}75$ Geldeinheiten. Der Gewinn ist der Erlös vermindert um die Kosten.

Kostenfunktion	$K(x) = 0{,}75x + 40$
Erlösfunktion	$E(x) = 2x$
Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x) = 1{,}25x - 40$

Die Funktionen sollen nur für nichtnegative Argumente definiert sein. Die Gewinnfunktion nimmt negative und positive Werte an, sie gibt also Auskunft darüber, bei welchen Produktionsniveaus die Firma mit Verlust oder Gewinn arbeitet. Zur Ermittlung dieser Bereiche wird die Stelle berechnet, an der $G(x)$ das Vorzeichen wechselt.

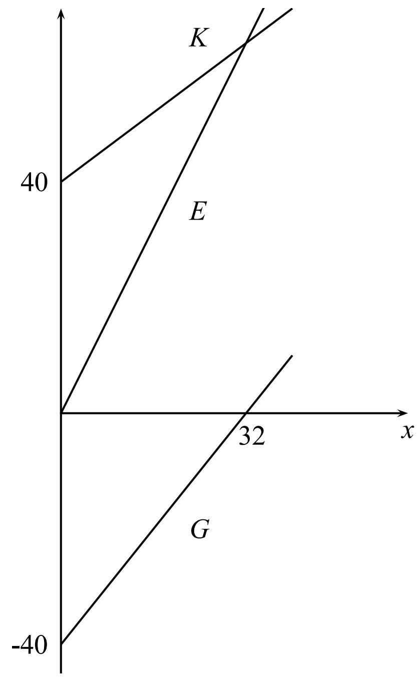
$G(x) = 1{,}25x - 40 = 0$

$1{,}25x = 40$

$x = 32$

$G(x) < 0 \quad$ für $\quad x < 32$

$G(x) > 0 \quad$ für $\quad x > 32$



3.2 Quadratische Funktionen

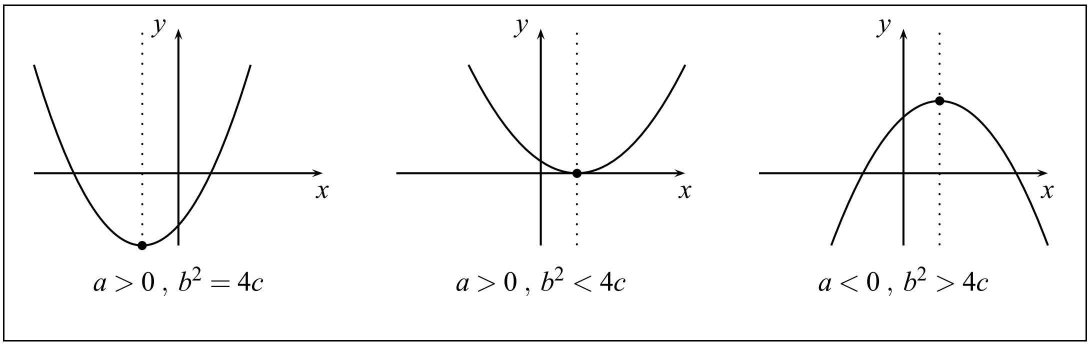
Die linearen Funktionen liefern keine brauchbaren Modelle, wenn eine Funktion bis zu einem Minimum fallen soll, um danach wieder anzusteigen. Die einfachsten Funktionen mit dieser Eigenschaft sollen hier untersucht werden.

Eine Funktion der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; \quad a, b, c \quad \text{sind Konstanten mit} \quad a \neq 0$$

heißt *quadratische Funktion*.

Der Graph einer quadratischen Funktion wird *Parabel* genannt. Für positives a ist die Parabel nach oben geöffnet und für negatives nach unten. Sie hat einen tiefsten bzw. einen höchsten Punkt – den *Scheitel*. Die Parabel ist symmetrisch zu der Parallelen zur y-Achse durch den Scheitel.



Eine Parabel schneidet die x-Achse in keinem, einem oder zwei Punkten. Diese Nullstellen der Funktion sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

Beispiel 2: Ein Supermarkt bezieht Brötchen zu 30 Cent pro Stück. Aus Erfahrung weiß der Kaufmann, dass er bei einem Verkaufspreis von x Cent täglich $80-x$ Stück absetzt.

Wenn er den Preis x festgelegt , kann er die Bestellmenge, die Bezugskosten, die Einnahmen und den Gewinn pro Tag berechnen.

Zunächst wird er genau so viel bestellen, wie er absetzen kann, also $80-x$ Stück.

Die Bezugskosten sind $K(x)=(80-x)\cdot 30$.

Die Einnahmen sind $E(x)=(80-x)\cdot x$.

Der Gewinn ist $E(x)-K(x)=(80-x)\cdot x-(80-x)\cdot 30$. Damit ist der tägliche Gewinn durch die quadratische Funktion

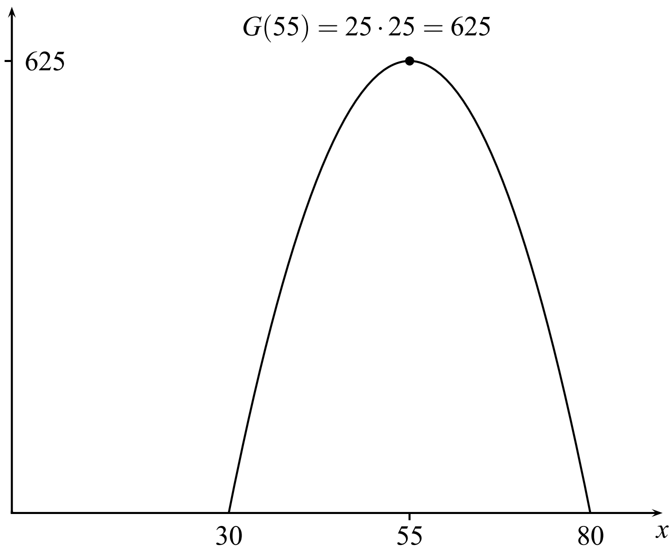
$$\begin{aligned} G(x) &= (80-x)(x-30) \\ &= -x^2+110x-2400 \end{aligned}$$

gegeben. Man sieht, dass es für den Kaufmann nur interessant ist, den Preis zwischen 30 und 80 Cent zu legen, weil er andernfalls Verlust machte.

$$\begin{aligned} G(40) &= (80-40)(40-30) = 40\cdot 10 = 400 \\ G(60) &= (80-60)(60-30) = 20\cdot 30 = 600 \\ G(70) &= (80-70)(70-30) = 10\cdot 40 = 400 \end{aligned}$$

Die Beispiele zeigen, dass ein höherer Preis nicht zwangsläufig zu mehr Gewinn führt. Wir berechnen also den Preis, der den größten Gewinn bringt.

Die Gewinnfunktion ist quadratisch, also ist ihr Graph eine Parabel, die wegen des Koeffizienten -1 bei x^2 nach unten geöffnet ist. Da nur ganze Brötchen gehandelt werden, können wir hier nur die Punkte mit ganzahligen x -Koordinaten interpretieren.



Der Scheitel ist der höchste Punkt dieser Parabel, seine x -Koordinate liegt auf der Symmetrieachse mitten zwischen den Nullstellen der Funktion.
Hier liegt offensichtlich der größte Gewinn.

Koordinaten des Scheitelpunkts

Im letzten Beispiel kannten wir die Nullstellen der quadratischen Funktion $G(x) = (80 - x)(x - 30)$ und konnten die x-Koordinate des Scheitelpunkts als deren Mittelwert leicht angeben. Das versagt aber, wenn es keine Nullstellen gibt.

Wir wollen berechnen, wie die Scheitelpunktskoordinaten für

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{mit} \qquad a \neq 0$$

von den Koeffizienten a, b, c abhängen.

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Wir nutzen aus, dass das Quadrat jeder Zahl nicht-negativ ist,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \begin{cases} = 0 & \text{für} \quad x = -\frac{b}{2a} \\ > 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $a > 0$ hat $f(x) = ax^2 + bx + c$ bei $x = -\dfrac{b}{2a}$ das Minimum $c - \dfrac{b^2}{4a}$.

Für $a < 0$ hat $f(x) = ax^2 + bx + c$ bei $x = -\dfrac{b}{2a}$ das Maximum $c - \dfrac{b^2}{4a}$.

In beiden Fällen hat der Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel die Koordinaten

$$x = -\frac{b}{2a} \qquad y = c - \frac{b^2}{4a} \qquad \text{oder} \qquad S\left(-\frac{b}{2a},\, c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

3.3 Ganzrationale Funktionen

$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ heißt *ganzrationale Funktion*. Die rechte Seite der Gleichung wird *Polynom* genannt. Hier ist n eine natürliche Zahl; die a_i heißen *Koeffizienten*, sie bestimmen die Funktion. Der höchste Exponent n heißt *Grad*, dabei ist vorausgesetzt, dass der entsprechende Koeffizient a_n ungleich Null ist.

Die linearen und quadratischen Funktionen gehören zu dieser Klasse. Wegen ihrer großen Bedeutung und weil sie im Vergleich zu Funktionen höheren Grades leicht zu handhaben sind, wurden sie in eigenen Abschnitten dargestellt.

3.3.1 Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Die Berechnung der Nullstellen von Polynomen mit dem Grad größer als zwei ist auf einfache Weise nicht mehr möglich. Die folgenden Tatsachen sind in diesem Zusammenhang wichtig.

> Ein Polynom n-ten Grades hat höchsten n Nullstellen. Ein Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.
> Sei ein Polynom n-ten Grades $p_n(x)$ und eine Nullstelle x_1 gegeben. Dann gibt es ein Polynom $(n-1)$-ten Grades, sodass
>
> $$p_n(x) = p_{n-1}(x) \cdot (x - x_1).$$
>
> Damit ist dieses Polynom der Quotient
>
> $$p_{n-1}(x) = p_n(x) : (x - x_1).$$

Beispiel 3: Polynomdivision

$$p_3(x) = 4x^3 - 16x^2 + 4x + 24 \quad \text{und} \quad p_3(-1) = 0$$

$$\begin{array}{llll}
(4x^3 & -16x^2 & +4x & +24) : (x+1) = 4x^2 - 20x + 24 \\
4x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
 & -20x^2 & & \\
 & -20x^2 & -20x & \\
\hline
 & & 24x & \\
 & & 24x & +24 \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$$p_2(x) = (4x^3 - 16x^2 + 4x + 24) : (x+1) = 4x^2 - 20x + 24$$

Das Polynom $p_2(x) = 4(x^2 - 5x + 6)$ hat die Nullstellen $x_2 = 2, x_3 = 3$. In diesem Fall gelingt es, das Ausgangspolynom als ein Produkt seiner Linearfaktoren darzustellen, an denen die Nullstellen unmittelbar abzulesen sind.

$$p_3(x) = 4(x+1)(x-2)(x-3)$$

Nicht jedes Polynom lässt sich vollständig in Linearfaktoren aufspalten, es gibt jedoch die Darstellung

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = a_n(x-x_1)\cdot\cdots\cdot(x-x_r)\cdot(x^2+p_1x+q_1)\cdots(x^2+p_sx+q_s)$$

mit Faktoren zweiten Grades ohne Nullstellen. Sowohl die Linearfaktoren als auch die Faktoren zweiten Grades können mehrfach auftreten. Die Zahl der Faktoren erfüllt die Gleichung $r+2s=n$.

3.4 Gebrochen-rationale Funktionen

In den Wissenschaften werden Verhältnisse zweier Größen also Brüche benutzt. Selbstverständlich können dann Zähler und Nenner auch Funktionen sein.

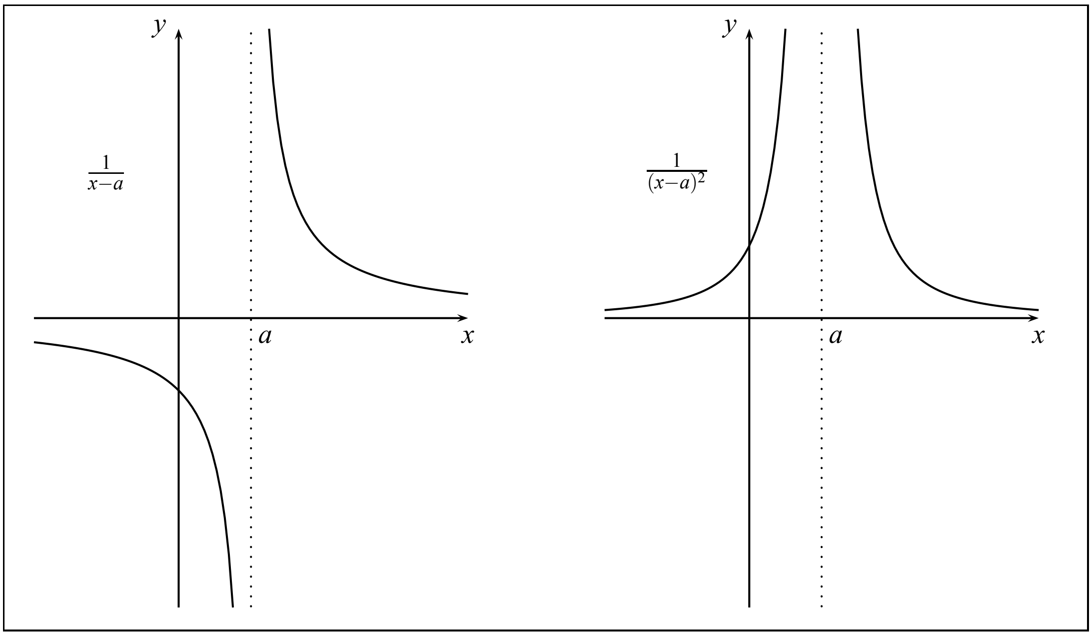
Der Quotient zweier ganzrationaler Funktionen

$$q(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0}$$

heißt *gebrochen-rationale Funktion*.
Sie ist für alle reellen Zahlen, außer den Nullstellen des Nenners definiert.

Beispiel 4: Die beiden Graphen zeigen schon die typischen Eigenschaften gebrochener Funktionen:

1. Sie wachsen unbeschränkt in der Umgebung einer Nullstelle des Nenners.
2. Für große Beträge des Arguments nähern sie sich asymptotisch einem einfacheren Graphen.

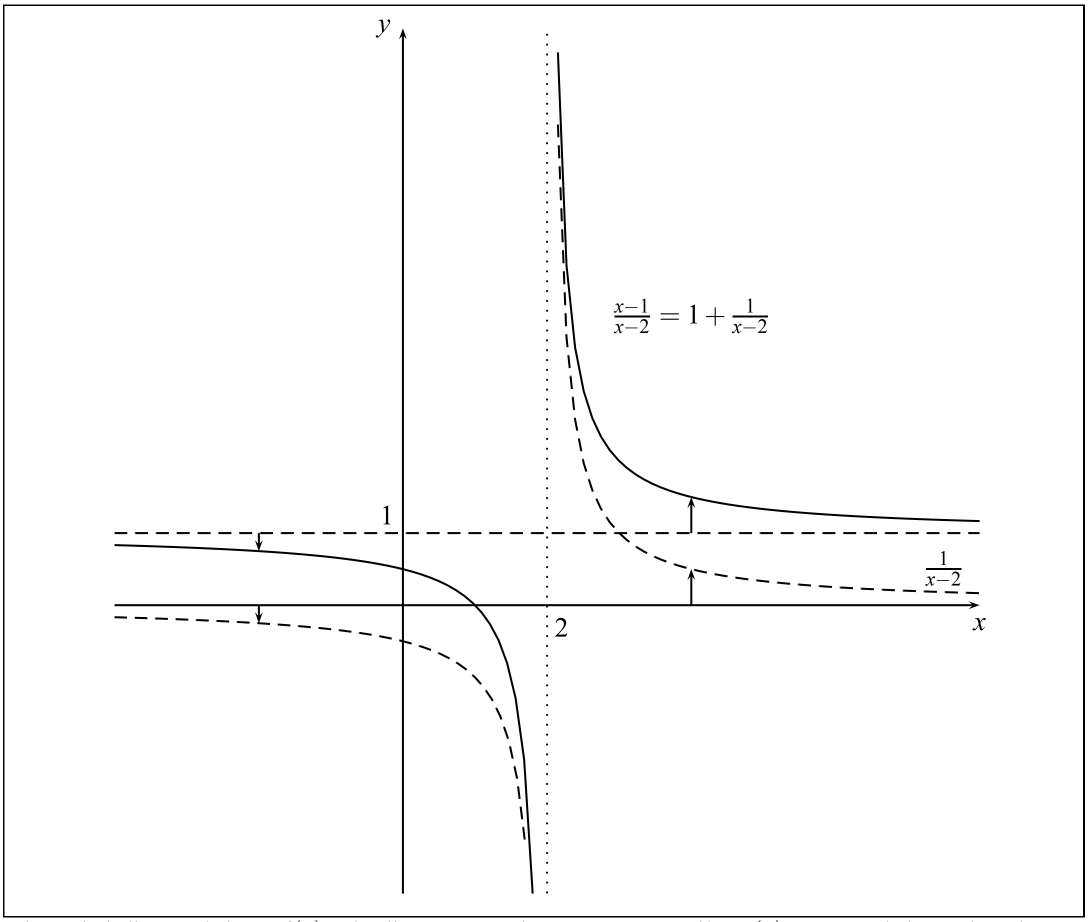


Beide Funktionen sind an der Stelle a nicht definiert und wachsen in der Umgebung unbeschränkt. Diese Stelle heißt *Pol*. Im ersten Fall hat der Nenner eine einfache Nullstelle und im zweiten liegt eine doppelte Nullstelle vor. Wir sprechen von einem Pol *ungerader* oder *gerader* Ordnung. An einer Polstelle ungerader Ordnung wechselt die Funktion ihr Vorzeichen und an einer Polstelle gerader Ordnung behält sie das Vorzeichen.

Beide Funktionsgraphen schmiegen sich an die x-Achse; sie ist die *Asymptote* und die zugehörige Asyptotenfunktion ist die Nullfunktion.

Beispiel 5: Wenn der Grad des Zählers größer oder gleich dem Grad des Nenners ist, empfiehlt sich eine Aufspaltung in eine ganze Funktion und einen echt gebrochenen Anteil. Dazu führt man meistens die Polynomdivision durch, aber manchmal geht es einfacher.

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2+1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$$



Hier wird die Funktion $f(x)$ als die Summe des ganzen Anteils $g(x) = 1$ und des gebrochenen Anteils $b(x) = \frac{1}{x-2}$ dargestellt. Die Funktion $g(x)$ ist die Asymptotenfunktion.

3.5 Potenzfunktionen – Wurzelfunktionen

In diesem Abschnitt stehen die Potenzfunktionen mit Brüchen im Exponenten im Vordergrund.

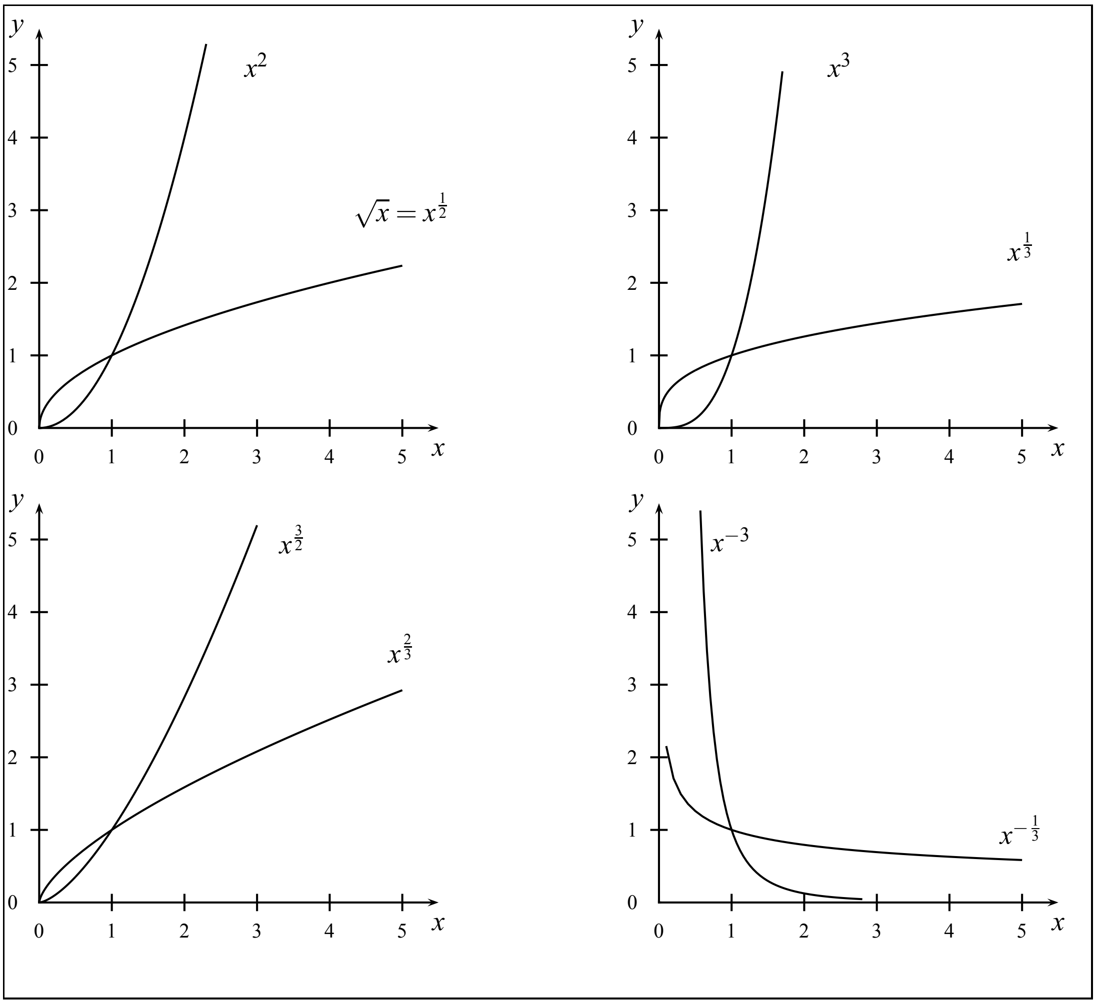
Die allgemeine *Potenzfunktion* $f(x) = x^r$ mit einer reellen Zahl als Exponent wird aus Gründen der Einheitlichkeit nur für postive Werte des Arguments x erklärt. Für spezielle Exponenten kann der Definitionsbereich auf alle reellen Zahlen erweitert werden.

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $x^{\frac{1}{n}}$ die n-te Wurzel und wird auch $\sqrt[n]{x}$ geschrieben, sie ist die Inverse zu x^n .

Zeichnen Sie die Graphen für $0 \le x$! Überzeugen Sie sich, dass die Paare Umkehrfunktionen von einander sind!

$$x^2 \quad \text{und} \quad x^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad x^3 \quad \text{und} \quad x^{\frac{1}{3}}$$
$$x^{\frac{3}{2}} \quad \text{und} \quad x^{\frac{2}{3}} \qquad\qquad x^{-\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad x^{-3}$$

Berechnen Sie die Funktionswerte mit der $\boxed{y^x}$ - Taste Ihres Taschenrechners!



Welche Bedeutung hat der Punkt $(1,1)$?

Zeichnen Sie die Winkelhalbierende des ersten Quadranten und interpretieren Sie!

Vergleichen Sie die Graphen der Potenzfunktionen für die verschiedenen Exponenten!

$$\begin{aligned} r &< 0 \\ 0 < r &< 1 \\ 1 < r& \\ r &= 0 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

3.6 Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen

3.6.1 Exponentialfunktion

Eine Population von Pflanzen, Bakterien, Tieren oder Menschen möge in einer geeigneten Zeiteinheit auf das q-Fache wachsen. Mit A werde ihre Größe zum Beobachtungsbeginn bezeichnet und mit $P(x)$ bezeichnen wir die Größe nach x Perioden.

$$\begin{aligned} &P(1) = A \cdot q \\ &P(2) = P(1) \cdot q = A \cdot q \cdot q = Aq^2 \\ &P(3) = P(2) \cdot q = A \cdot q \cdot q \cdot q = Aq^3 \\ &\qquad \vdots \\ &P(x) = P(x-1) \cdot q = Aq^x \end{aligned}$$

Die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit während einer Periode ist

$$\frac{P(x+1)-P(x)}{1} = Aq^{x+1} - Aq^x = Aq^x(q-1) = P(x)(q-1) = P(x)\cdot r.$$

Die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit von P während einer Periode ist proportional zum ihrem Wert am Periodenanfang.

Der Faktor r wird häufig in Prozenten ausgedrückt: Der Bestand wächst in einer Periode um $100\cdot r\%$.

Eine Größe, die sich nach diesem Gesetz ändert, zeigt ein *exponentielles Wachstum*.

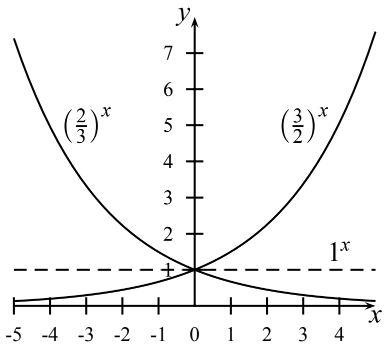
Die allgemeine *Exponentialfunktion*

$$f(x) = a^x$$

ist für jede positive Basis a für alle reellen Exponenten x erklärt. Sie nimmt daher nur positive Werte an.

Der Taschenrechner stellt sie über die $\boxed{y^x}$ -Taste zur Verfügung.

- Für $a > 1$ steigt a^x monoton.
- Für $a < 1$ fällt a^x monoton.
- Für $a = 1$ ist $a^x = 1$ für alle x .



Beispiel 6: Seit 200 Jahren wird für die Weltbevölkerung ein exponentielles Wachstum diskutiert. Zu Beginn des Jahres 1986 betrug sie 4,8 Milliarden und wuchs in den Jahrzehnten davor durchschnittlich um 2% pro Jahr.

Es ist $A = 4{,}8$ und $q = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$ und $r = 0{,}02$. Sei x die Zeit nach 1986 in Jahren.

$$P(x) = Aq^x = 4{,}8\cdot 1{,}02^x$$

Zu Beginn 2006 sind 20 Jahre vergangen.

$$P(20) = 4{,}8\cdot 1{,}02^{20} = 4{,}8\cdot 1{,}48594739598 = 7{,}132547500$$

Im Jahr 2006 leben ungefähr 7,1 Milliarden Menschen.

(Im Dezember 2005 teilte die Deutsche Stiftung Weltbevölkerung mit, dass am 1. Januar 2006 gut 6,5 Milliarden Menschen auf der Erde leben.)

Wir fragen nach der Weltbevölkerung im Jahr 1976.

$$P(-10) = 4{,}8 \cdot 1{,}02^{-10} = 4{,}8 \cdot 0{,}820348299875 = 3{,}9376718394 \approx 3{,}9$$

In 1976 lebten ungefähr 3,9 Milliarden Menschen.

3.6.2 Logarithmusfunktion

Zur Beantwortung der Fragen, zu welchem Zeitpunkt ist 10 Milliarden erreicht oder in welcher Zeit verdoppelt sich die Anzahl, müssen wir den Exponenten, d.h. das Argument der Funktion berechnen, das zu den vorgegebenen Werten der Exponentialfunktion führt.

$$\begin{aligned}
P(x) &= 10 \\
4{,}8 \cdot 1{,}02^x &= 10 \\
1{,}02^x &= 10 : 4{,}8 = \frac{25}{12} \\
x &= \log_{1{,}02}\left(\frac{25}{12}\right) \\
x &= \frac{\ln(\frac{25}{12})}{\ln(1{,}02)} = 37{,}0642321396 \\
x &\approx 37
\end{aligned}$$

Im Jahr 2023 werden 10 Milliarden erreicht sein.

$$\begin{aligned}
P(x) &= 2 \cdot 4{,}8 \\
4{,}8 \cdot 1{,}02^x &= 2 \cdot 4{,}8 \\
1{,}02^x &= 2 \\
x &= \log_{1{,}02}(2) \\
x &= \frac{\ln 2}{\ln 1{,}02} = 35{,}0027887811 \\
x &\approx 35
\end{aligned}$$

Ungefähr alle 35 Jahre verdoppelt sich die Weltbevölkerung.

Es folgt die Erklärung der letzten Rechnungen.

Die Umkehrfunktion zu $y = f(x) = a^x$ ist nur für positive Argumente definiert und nimmt alle Werte aus $(-\infty, \infty)$ an. Sie heißt *Logarithmusfunktion*.

$$x = \log_a(y) \qquad \text{mit der Eigenschaft} \qquad \log_a(a^x) = x \qquad \text{oder} \qquad a^{\log_a(y)} = y$$

Achtung: Wir werden im folgenden doch wieder $\log(x)$ schreiben. Weiter ist es erlaubt, $\log x$ zu schreiben, solange das nicht zu Mehrdeutigkeiten führt.

Die Umkehrfunktion zu 10^x heißt *dekadischer* Logarithmus. Er wird auf dem Taschenrechner mit der Taste $\boxed{\text{log}}$, $\boxed{\text{lg}}$ oder $\boxed{\text{LOG}}$ aufgerufen.

Beispiel 7: Die *Stärken von Erdbeben* werden mit Hilfe der Richterskala verglichen.

Ein Erdbeben der Intensität I hat auf der Richterskala die Stärke

$$R = \log \frac{I}{I_0}.$$

Die Standardintensität I_0 dient zum Vergleich.

Für ein Erdbeben der Stärke $R = 5$ auf der Richterskala gilt

$$5 = \log \frac{I}{I_0}$$

oder

$$\frac{I}{I_0} = 10^5$$

also

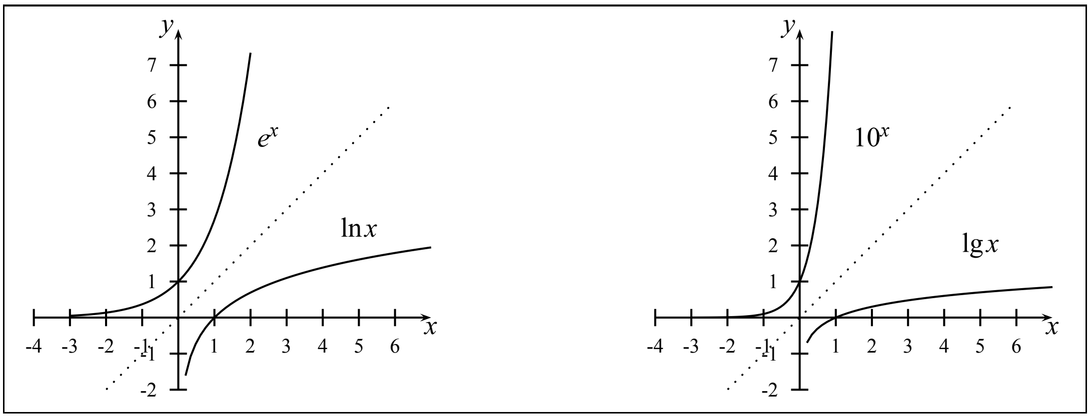
$$I = 10^5 I_0 = 10\,000 I_0 .$$

Dieses Erdbeben hat eine $10\,000$ mal so hohe Intensität wie das Beben mit der Standardintensität.

Im Jahr 1906 zerstörte ein Erdbeben der Stärke 8,25 auf der Richterskala die Stadt San Francisco. Das wievielfache der Standardintensität hatte es?

Ein Beben mit der Intensität $10^{7,7} I_0$ erschütterte 1978 den Iran.
Welche Stärke auf der Richterskala hatte es?

Eine besondere Rolle spielt der *natürliche* Logarithmus. Er ist die Umkehrfunktion der e-Funktion e^x , deren Basis die *Eulersche Zahl* $e \approx 2{,}718\ldots$ ist.
Er wird auf dem Taschenrechner mit der Taste $\boxed{\ln}$ aufgerufen.



Die Graphen von Funktionen, die einander umkehren, liegen spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden.

Jede Exponentialfunktion ist auch mit der Basis 10 oder mit Hilfe der e-Funktion darstellbar.

$$a^x = \left(10^{\lg a}\right)^x = 10^{x \lg a} \qquad \text{oder} \qquad a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a}$$

Jeder Logarithmus kann mit Hilfe des dekadischen oder des natürlichen Logarithmus berechnet werden.

$$\log_a(x) = \frac{\lg(x)}{\lg(a)} \qquad \text{oder} \qquad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Diese Gleichungen sind der Schlüssel zum praktischen Rechnen mit Exponential- und Logarithmusfunktionen. Wir werden im folgenden die e-Funktion und den natürlichen Logarithmus verwenden.

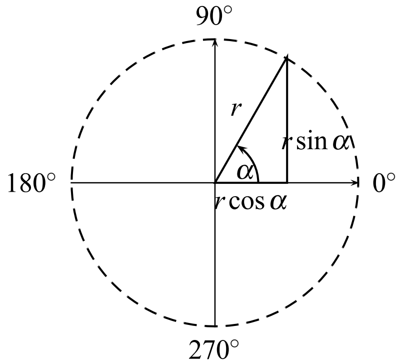
3.7 Winkelfunktionen

Die Steigung einer Geraden ist definiert als der Differenzenquotient

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Wenn stattdessen der Winkel zwischen der Abszisse und der Geraden benutzt werden soll, muss man die Winkelfunktionen benutzen. Für Winkel zwischen $0°$ und $90°$ sind sie definiert als Streckenverhältnisse der Katheten zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

Das Dreieck fügen wir in einen Kreis um den Ursprung ein.



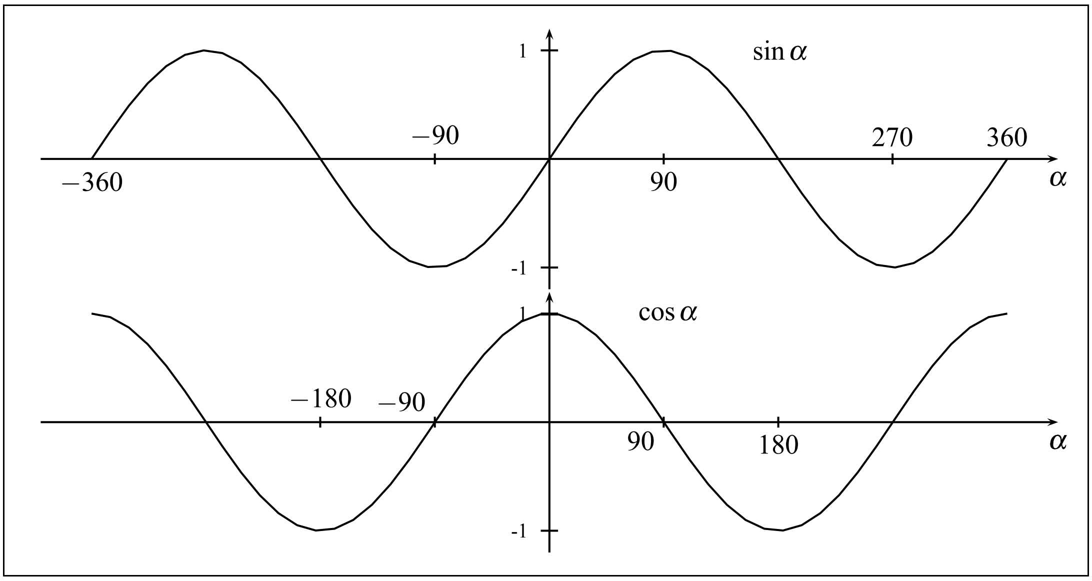
$$m = \frac{r \sin\alpha}{r \cos\alpha} = \tan\alpha$$

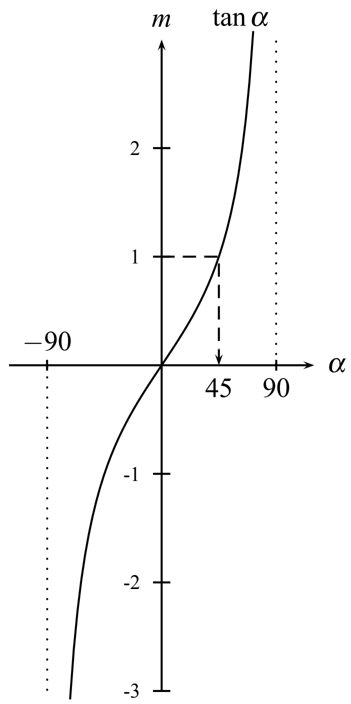
$$\alpha = \arctan m$$

Der Winkel wird von der positiven Abszisse gegen den Uhrzeigersinn gemessen.

Die Winkelfunktionen sind nach der Skizze bis zu dem rechten Winkel erklärt, sie lassen sich jedoch bis auf den Vollwinkel fortsetzen.

Danach wiederholen sich die Werte bei jeder weiteren Volldrehung. Die Funktionen heißen *periodisch*.





Zu jedem $-\infty < m < \infty$ liefert die Arcustangensfunktion einen Winkel zwischen -90 und 90 Grad.
Die Gerade mit der Steigung m bildet mit der positiven x-Achse diesen Winkel.
Die Skizze zeigt für $m = 1$ die Zuordnung $\alpha = \arctan(1) = 45°$.

Die Winkelfunktionen sin, cos, tan und ihre Umkehrfunktionen finden Sie auf dem Taschenrechner; die Umkehrfunktion des Tangens – Arcustangensfunktion – ist meistens über die $\boxed{INV}$ -Taste aufzurufen.

4. Differentialrechnung

4.1 Differenzieren von Funktionen

Im Fall der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

heißt die Funktion f an der Stelle x *differenzierbar* und der Grenzwert heißt *Ableitung* der Funktion an der Stelle x und wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

Es ist wichtig, die Ableitung neben den unten angegebenen Regeln auch direkt aus der Definition berechnen zu können, z.B. um die Nichtexistenz zu zeigen. Dazu gehen wir in drei Schritten vor.

1. Berechne $f(x+h) - f(x)$ und vereinfache!
2. Schreibe den Bruch $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ und vereinfache ihn so weit wie möglich!
3. Bestimme $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, falls dieser Grenzwert existiert!

Beispiel 1: Bestimmen Sie für die Funktionen durch Grenzwertbildung die Ableitungen!

$$f(x) = mx + b \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = \sqrt{x}$$

$$\frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h} = \frac{mx+mh+b-mx-b}{h} = \frac{mh}{h} = m = f'(x)$$

Die Ableitung der linearen Funktion ist

$$\boxed{(mx+b)' = m}.$$

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h \longrightarrow 2x = g'(x)$$

Die Ableitung der quadratischen Funktion ist

$$\boxed{(x^2)' = 2x}.$$

Im folgenden benutzen wir die binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, um den Term auf eine für die Grenwertbetrachtung geeeignete Form zu bringen.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = h'(x) \end{aligned}$$

Die Ableitung der Wurzelfunktion ist

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

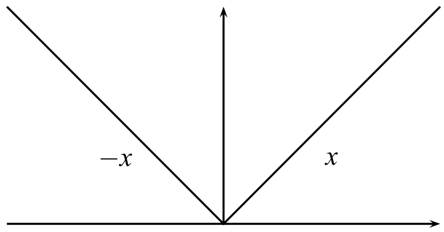
Aus dem ersten Beispiel $f(x) = mx+b$ folgt, dass die *Betragsfunktion* a bis auf die Stelle $x = 0$ überall differenzierbar ist.

$$|x| = a(x) = \begin{cases} -x & \text{für} \quad x < 0 \\ x & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Danach gilt

$$|x|' = a'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0. \end{cases}$$

Die Ableitung springt bei null von -1 nach 1, ihr kann dort kein Wert zugeordnet werden.



Selbstverständlich kann man an dem Knick keine sinnvolle Tangente zeichnen.

Ableitungsregeln

Die folgenden Regeln ermöglichen, die Ableitung einer Funktion auf die Ableitungen ihrer Teilfunktionen zurückzuführen.

$\left[c \cdot u(x)\right]' = c \cdot u'(x)$	Faktor $\quad c \in \mathbb{R}$
$\left[u(x) + v(x)\right]' = u'(x) + v'(x)$	Summe
$\left[u(x) \cdot v(x)\right]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	Produkt
$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$	Quotient
$\left[u(v(x))\right]' = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$	verkettete Funktionen

In der letzten Regel ist der Ableitungsstrich in zwei Bedeutungen gebraucht: Im Fall $u'\big(v(x)\big)$ ist die Funktion u nach ihrem Argument v abzuleiten, ohne zu berücksichtigen, dass es eine Funktion von x ist. An den beiden anderen Stellen ist die Ableitung nach x gemeint, das wird in der folgenden Notation deutlich.

$$\boxed{\frac{d}{dx}u(v(x)) = \frac{d}{dv}u(v) \cdot \frac{d}{dx}v(x)}$$

Eine gute Merkregel ist: *äußere Ableitung mal innere Ableitung*.

Beispiel 2:

Die Funktion $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$ soll abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}
(3x^2 - 4x + 7)' &= (3x^2)' + (-4x)' + 7' && \text{Summe} \\
&= 3(x^2)' + (-4)x' + 7' && \text{Faktor} \\
&= 3 \cdot 2x + (-4) = 6x - 4 \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

Die Funktion $g(z) = \sqrt{3z^2 - 4z + 7}$ soll abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3z^2 - 4z + 7}' &= \frac{1}{2\sqrt{3z^2 - 4z + 7}} \cdot (3z^2 - 4z + 7)' && \text{Kettenregel} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3z^2 - 4z + 7}} \cdot (6z - 4) && \text{siehe oben} \\
&= \frac{3z - 2}{\sqrt{3z^2 - 4z + 7}} = g'(z)
\end{aligned}$$

Ableitungsfunktionen

Man benutzt die folgenden Funktionen als Bausteine, um kompliziertere Funktionen zusammenzusetzen. Nach den Ableitungsregeln führen wir die Differentiation auf die Ableitungen dieser Grundfunktionen zurück.

Ihre Ableitungen können mit Hilfe der Definition gewonnen werden.

$\left(x^r\right)' = r \cdot x^{r-1}$	für $r \in \mathbb{R}$	Potenzfunktion
$\left(e^x\right)' = e^x$		Exponentialfunktion
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x} \quad ; 0 < x$		natürlicher Logarithmus
$\left(\sin x\right)' = \cos x$		Winkelfunktionen mit x im Bogenmaß
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$		

Beispiel 3:

Polynomfunktion oder ganz-rationale Funktion:

$$
\begin{aligned}
&(3x^4 - 8x^3 - 17x + 5)' \\
&\qquad = 3 \cdot 4x^3 - 8 \cdot 3x^2 - 17 \cdot 1 + 0 \\
&\qquad = 12x^3 - 24x^2 - 17
\end{aligned}
$$

Produkt zweier Funktionen:

$$
\begin{aligned}
&\left[4x^{\frac{4}{3}} \cdot e^x\right]' \\
&\qquad = 4\left[(x^{\frac{4}{3}})'e^x + x^{\frac{4}{3}}(e^x)'\right] \\
&\qquad = 4\left[\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}e^x + x^{\frac{4}{3}}e^x\right] \\
&\qquad = 4\left[\frac{4}{3} + x\right]x^{\frac{1}{3}}e^x
\end{aligned}
$$

Produkt zweier Funktionen:

$$
\begin{aligned}
&\left[(u^3+4u^2+1)\cdot(u^2-2u)\right]'\\
&\qquad= (u^3+4u^2+1)'(u^2-2u)+(u^3+4u^2+1)(u^2-2u)'\\
&\qquad= (3u^2+8u)(u^2-2u)+(u^3+4u^2+1)(2u-2)\\
&\qquad= (3u^4+2u^3-16u^2)+(2u^4+6u^3-8u^2+2u-2)\\
&\qquad= 5u^4+8u^3-24u^2+2u-2
\end{aligned}
$$

Quotient zweier Funktionen:

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{5x^4-2x^5}{x^2+1}\right]'\\
&\qquad= \frac{(5x^4-2x^5)'\cdot(x^2+1)-(5x^4-2x^5)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\\
&\qquad= \frac{(20x^3-10x^4)\cdot(x^2+1)-(5x^4-2x^5)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\\
&\qquad= \frac{20x^5-10x^6+20x^3-10x^4-10x^5+4x^6}{(x^2+1)^2}\\
&\qquad= \frac{-6x^6+10x^5-10x^4+20x^3}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

Verkettete Funktionen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sqrt{e^t-t}\\
&\qquad= \left[(e^t-t)^{\frac{1}{2}}\right]'\\
&\qquad= \frac{1}{2}(e^t-t)^{-\frac{1}{2}}\cdot(e^t-1)\\
&\qquad= \frac{e^t-1}{2\sqrt{e^t-t}}
\end{aligned}
$$

Beispiel 4: In besonderen Fällen muss man die Funktion auf eine Darstellung durch die Standardfunktionen umschreiben, um sie differenzieren zu können.

Exponentialfunktion mit beliebiger, positiver Basis:

$$
\begin{aligned}
a^x &= \left[e^{\ln a}\right]^x = e^{x\cdot\ln a}\\
[a^x]' &= \left[e^{x\cdot\ln a}\right]'\\
&= e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a = a^x\ln a
\end{aligned}
$$

Allgemeine Wurzel:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{f(x)} &= [f(x)]^{\frac{1}{n}} \\
\left[\sqrt[n]{f(x)}\right]' &= \frac{d}{dx}[f(x)]^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{n}[f(x)]^{\frac{1}{n}-1} \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

Die dritte Wurzel:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{2x^3 - 3x + 5} &= \left(2x^3 - 3x + 5\right)^{\frac{1}{3}} \\
\frac{d}{dx}\left(2x^3 - 3x + 5\right)^{\frac{1}{3}} & \\
&= \frac{1}{3}\left(2x^3 - 3x + 5\right)^{\frac{1}{3}-1}(6x - 3) \\
&= \left(2x^3 - 3x + 5\right)^{-\frac{2}{3}}(2x - 1)
\end{aligned}$$

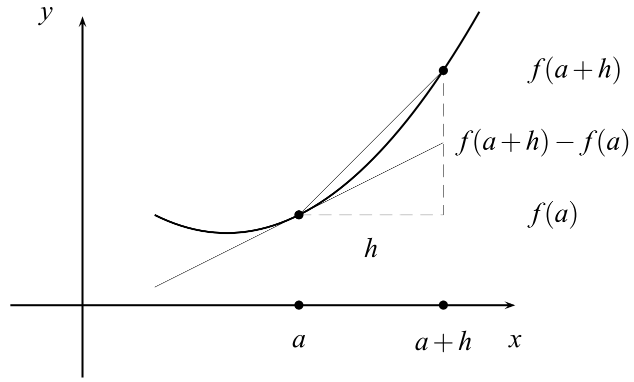
4.1.1 Tangenten

Die Steigung der Geraden durch die beiden Punkte des Graphen ist

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Für $h \to 0$ fällt der rechte Punkt $(a+h, f(a+h))$ mit dem Punkt $(a, f(a))$ zusammen, andererseits ist $f'(a)$ der Grenzwert der Geradensteigung. Die Gerade mit dieser Steigung durch $(a, f(a))$ berührt dort den Graph, sie heißt Tangente.

Die Ableitung $f'(a)$ liefert die *Steigung der Tangente* an den Graph im Punkt $(a, f(a))$.



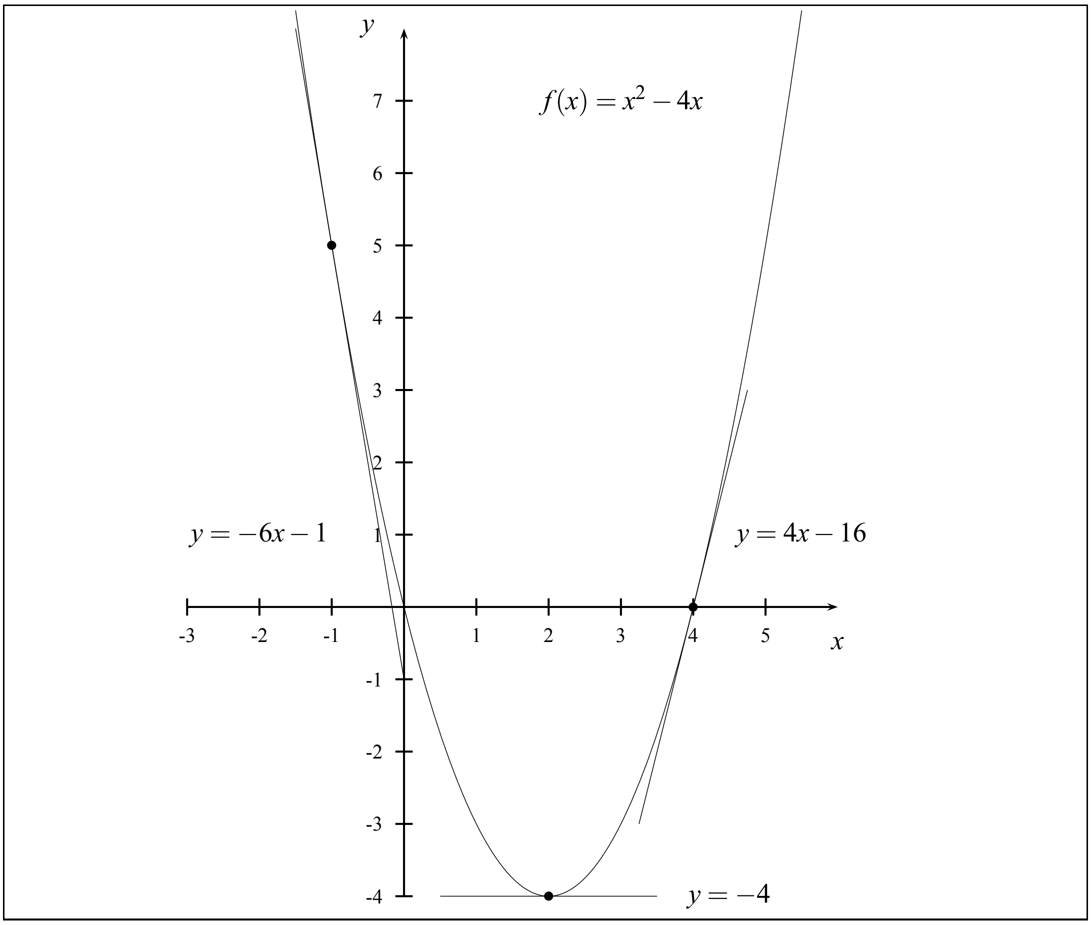
Die *Gleichung der Tangente* an den Graph der Funktion f im Punkt $(a, f(a))$ wird zweckmäßig nach der Punkt-Steigungs-Form aufgeschrieben.

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \qquad y = \ell(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Beispiel 5: Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 - 4x$ ist $f'(x) = 2x - 4$. Damit sind die Steigungen der Tangenten in den Punkten $(-1;5), (2;-4), (4;0)$ durch $-6;0;4$ gegeben.

Der Funktionsgraph ist eine Parabel, sie ist mit den drei Tangenten und deren Gleichungen in der folgenden Skizze dargestellt.

Stellen Sie sich vor, man zeichnet zunächst die Tangenten und danach die Parabel! Es gelingt viel besser als ohne Tangenten.



4.1.2 Näherung mit der Tangente und das Differential

Die lineare Funktion $\ell(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ kann in der Umgebung von a als Näherung (Approximation) der Funktion f dienen.

Wir setzen für die Ableitung deren Näherung ein.

$$
\begin{aligned}
f'(a) &\approx \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{für} \quad a-h \le x \le a+h \\
\ell(x) &\approx f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f(a) + f(x) - f(a) \\
\ell(x) &\approx f(x)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)}$$

Beispiel 6: Zur Berechnung von $\sqrt{17}$ nutzen wir aus, dass $\sqrt{16} = 4$ und 17 nahe bei 16 liegt.

Hier ist $f(x)=\sqrt{x}$ zu setzen.

$$\begin{aligned} f(17) &= f(16+1) \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(16) &= \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8} \\ \sqrt{17} &= \sqrt{16+1} \\ &\approx \sqrt{16} + f'(16)\cdot(17-16) \\ &= 4 + \frac{1}{8}\cdot 1 = 4{,}125 \end{aligned}$$

Die Tangentennäherung liefert die Schätzung

$$\sqrt{17} \approx 4{,}125$$

und der Taschenrechner die „bessere“ Näherung 4,12310562562. Die Differenz der beiden Werte

$$4{,}125 - 4{,}12310562562 = 0{,}00189437438234$$

gibt eine Abschätzung des Fehlers.

4.1.3 Das Differential einer Funktion

Für jede reelle Zahl h heißt das Produkt $f'(x) \cdot h$ das *Differential* der Funktion f in x und wird mit

$$df = f'(x)h$$

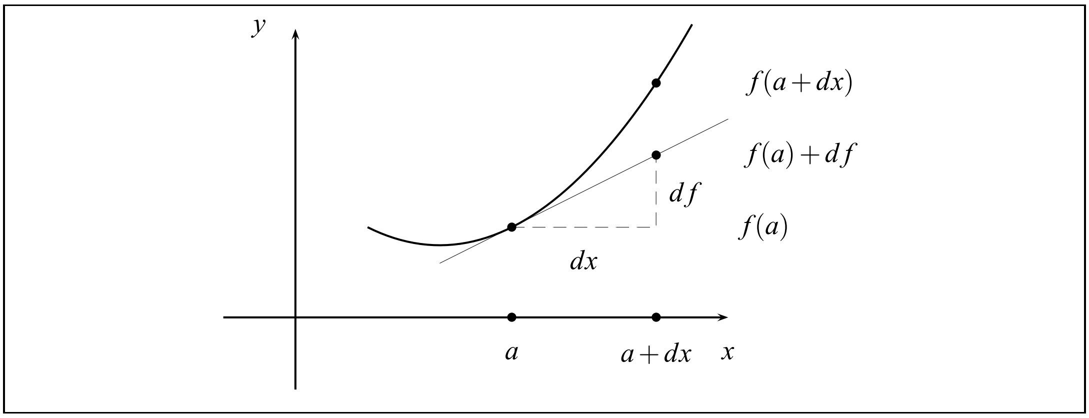
bezeichnet. Das Differential ist somit eine Funktion der Stelle x und des Zuwachses h.

Für die Funktion $f(x) = x$ folgt $df = dx = f'(x)h = 1 \cdot h = h$, hier ist $dx = h$ und auf Grund dieser Tatsache wird das Differential gewöhnlich als

$$\boxed{df = f'(x)dx}$$

geschrieben.

In der folgenden Skizze ist zu sehen, wie der Zuwachs dx des Arguments sich einerseits als Zuwachs $f(a+dx) - f(a)$ der Funktion und andererseits als Zuwachs df der linearen Näherung ℓ auswirkt.



Beispiel 7: In einer Stadt hat man die Erfahrung gemacht, dass die jährlichen Ausgaben für Arbeitsbeschaffung A die jährlichen Ausgaben für das Gefängnis G sinken lässt. Man nimmt den folgenden Zusammenhang an.

$$G(A) = 16 - A^{\frac{2}{3}} \quad \text{für} \quad 6 \leq A \leq 27$$

Wir werden das Differential benutzen, um abzuschätzen, um wieviel die Jahreausgaben für das Gefängnis sinken, wenn die Jahresausgaben für Arbeit von 8 auf 8,5 Millionen Euro steigen.

$$G'(A) = -\frac{2}{3}A^{-\frac{1}{3}} \qquad dG = -\frac{2}{3}A^{-\frac{1}{3}}dA$$

Mit den Werten folgt

$$dG = -\frac{2}{3}8^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Danach sinkt die Ausgabe für das Gefängnis um $\frac{1}{6}$ Millionen Euro.

Beispiel 8: Die Kantenlänge eines Würfels wurde mit 20 cm gemessen, dabei war ein Fehler von 0,02 cm möglich. Wie groß kann der Fehler für das berechnete Volumen des Würfels sein?

Seien k die Kantenlänge und $V = k^3$ das Volumen.

$$\begin{aligned} V'(k) &= 3k^2 \\ dV &= 3k^2 \cdot dk \\ dV &= 3(20)^2 \cdot (\pm 0{,}02) \\ &= \pm 24 \end{aligned}$$

Das Volumen bei exakt 20 cm Kantenlänge ist

$$V(20\,\text{cm}) = (20\,\text{cm})^3 = 8\,000\,\text{cm}^3.$$

Der mögliche Fehler des berechneten Volumens wird mit $24\,\text{cm}^3$ geschätzt.

4.2 Anwendungen der Ableitung

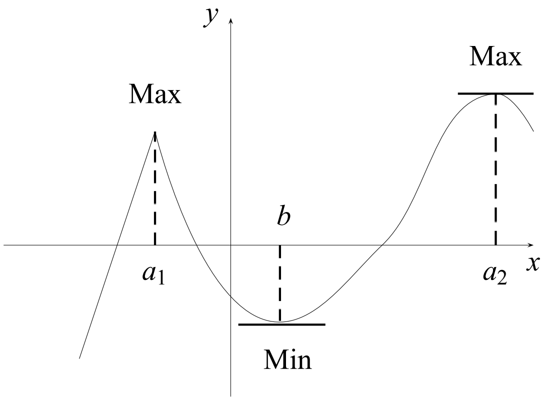
Bei der Untersuchung von Funktionen und ihrer Graphen benutzen wir die Ableitung, um steigende und fallende Funktionen zu unterscheiden, um größte und kleinste Werte zu finden oder um den Funktionsgraph zu zeichnen. Die lineare Näherung wurde oben schon kurz erwähnt.

4.2.1 Relative Extrema von Funktionen

Eine Funktion f besitzt an der Stelle $x = a$ ein *relatives Maximum* oder *lokales Maximum*, wenn es um a ein Intervall gibt, in dem $f(x) \leq f(a)$ für jedes x. Der Graph hat an diesen Stellen einen *Hochpunkt* oder Gipfel.

Eine Funktion f besitzt an der Stelle $x = b$ ein *relatives Minimum* oder *lokales Minimum*, wenn es um b ein Intervall gibt, in dem $f(b) \leq f(x)$ für jedes x. Der Graph hat an diesen Stellen einen *Tiefpunkt* oder ein Tal.

Es ist offensichtlich, dass in einem Extrempunkt des Graphen die Tangente parallel zur x-Achse verläuft, das setzt aber voraus, dass es eine Tangente gibt, also f an dieser Stelle differenzierbar ist. Neben diesen Punkten können auch Spitzen des Graphen Extrempunkte sein, dort ist die Funktion nicht differenzierbar und die Tangente existiert nicht.



Wenn die Funktion f an der Stelle c ein relatives Extremum hat, muss man schließen

$f'(c) = 0$ oder $f'(c)$ existiert nicht.

4.2.2 Absolute Extrema von Funktionen

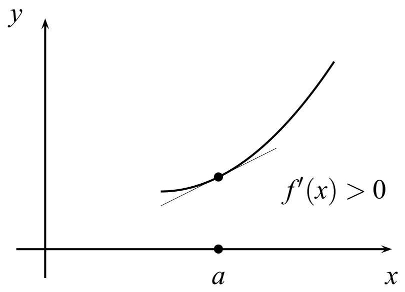
Unter den relativen Maxima ist mindestens eines das größte. Dieser Wert kann also nur noch in den Endpunkten des Definitionsbereichs übertroffen werden. Der größte Wert unter den relativen Maxima und den Werten auf dem Rand wird *absolutes Maximum* genannt.

Entsprechend erklären wir das *absolute Minimum*.

4.2.3 Funktionsdiskussionen

Die Ableitung ist ein Werkzeug zur genaueren Untersuchung von Funktionseigenschaften als es direkt aus der Funktionsgleichung, aus der Tabelle oder dem Graphen möglich wäre.

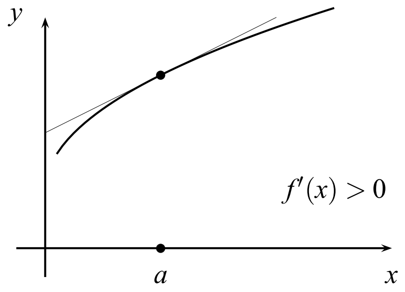
In diesem Abschnitt sind die Methoden der Differentialrechnung zur Untersuchung von Funktionen dargestellt. Die Ableitung gibt Auskunft über die lokale (momentane) Änderungsrate einer Funktion: ist sie positiv steigt die Funktion, ist sie negativ fällt die Funktion.



$\boxed{f''(x) > 0}$

- Die Ableitung ist überall positiv:
  die Funktion steigt monoton.
- Die Ableitung nimmt zu.

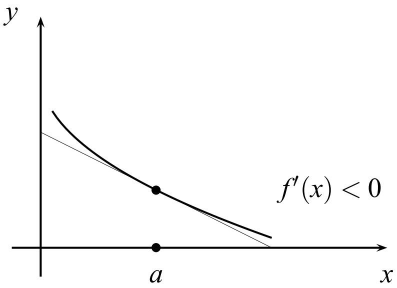
  Der Graph wird steiler.
  Er ist *links gekrümmt*.



$\boxed{f''(x) < 0}$

- Die Ableitung ist überall positiv:
  die Funktion steigt monoton.
- Die Ableitung nimmt ab.

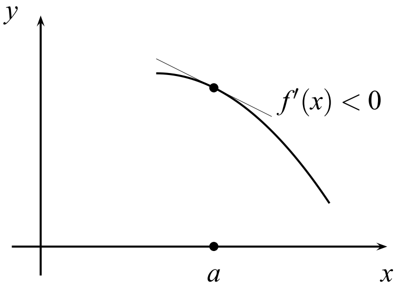
  Der Graph wird flacher.
  Er ist *rechts gekrümmt*.



$\boxed{f''(x) > 0}$

- Die Ableitung ist überall negativ:
  die Funktion fällt monoton.
- Die Ableitung nimmt zu.

  Der Graph wird flacher.
  Er ist *links gekrümmt*.



$\boxed{f''(x) < 0}$

- Die Ableitung ist überall negativ:
  die Funktion fällt monoton.
- Die Ableitung nimmt ab.

  Der Graph wird steiler.
  Er ist *rechts gekrümmt*.

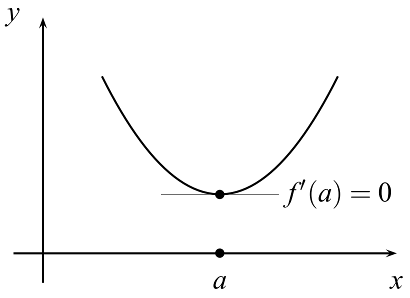
In den vier Beispielen spielt die Änderung der Ableitung $f'(x)$ eine wichtige Rolle.
Es liegt nahe die Ableitung $f'(x)$ zu differenzieren.

Der Term

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}f(x)\right] = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \left[f'(x)\right]' = f''(x)$$

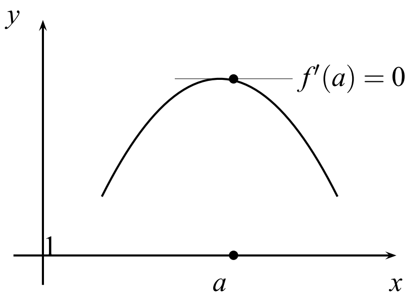
heißt *zweite Ableitung* der Funktion an der Stelle x und die damit gegebene Funktion *Ableitungsfunktion zweiter Ordnung*.

Hat die Ableitung den Wert Null, kann die Funktion an dieser Stelle weder steigen noch fallen, wir sprechen daher von einer *stationären Stelle*.



$\boxed{f''(x) > 0}$

- Die Ableitung steigt von negativen zu positiven Werten.
- $f''(x) > 0$
  Der Graph ist *links gekrümmt*.
- Lokales **Minimum** der Funktion



$\boxed{f''(x) > 0}$

- Die Ableitung fällt von positiven zu negativen Werten.
- $f''(x) < 0$
  Der Graph ist *rechts gekrümmt*.
- Lokales **Maximum** der Funktion

Die Frage, ob eine stationäre Stelle a (mit $f'(a) = 0$) auch eine Extremstelle ist, können Sie auf zwei Wegen beantworten.

1. f' wechselt bei a sein Vorzeichen

   von $-$ nach $+$: Minimum

   von $+$ nach $-$: Maximum

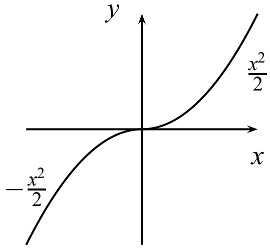
2. Vorzeichen von $f''(a)$

   $f''(a) > 0$: Minimum

   $f''(a) < 0$: Maximum

Die erste Variante führt immer zur Entscheidung. Die zweite kann nicht angewendet werden, wenn $f''(a) = 0$ oder wenn f' an der Stelle a nicht differenzierbar ist, also $f''(a)$ nicht existiert.

Beispiel 9: Die Funktion f sei stückweise definiert durch $-\frac{x^2}{2}$ für $x < 0$ und $\frac{x^2}{2}$ für $x \geq 0$.



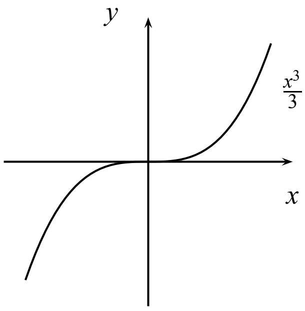
$f'(x) = -x > 0$ und $f''(x) = -1$ für $x < 0$

$f'(x) = x > 0$ und $f''(x) = 1$ für $x > 0$

$f'(0) = 0$

Die Funktion hat kein Extremum,
weil f' bei 0 sein Vorzeichen nicht wechselt.
Die zweite Ableitung f'' springt an der Stelle 0 von -1 nach 1 , also existiert $f''(0)$ nicht.

Beispiel 10: Auch bei $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ versagt der f''-Test.



$f'(x) = x^2 > 0$ für alle $x \neq 0$

$f''(x) = 2x$

$f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$
Keine Entscheidung

Die Funktion hat kein Extremum,
weil f' bei 0 sein Vorzeichen nicht wechselt.

4.2.4 Ganzrationale Funktionen

In diesem Abschnitt finden Sie Untersuchungsmethoden für ganzrationale Funktionen dritter und höherer Ordnung. Die linearen und quadratischen Funktionen sind schon in eigenen Abschnitten beschrieben worden.

Beispiel 11: Wir untersuchen die ganzrationale Funktion dritter Ordnung

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x.$$

Nullstellen:

Umwandeln in ein Produkt durch Ausklammern von $\frac{x}{6}$

$$f(x) = \frac{1}{6}x(x^2 - 12)$$

$$\begin{aligned} &x(x^2 - 12) = 0 \\ &x = 0 \vee x^2 - 12 = 0 \\ &x = 0 \vee x = -\sqrt{12} \vee x = -\sqrt{12} \end{aligned}$$

Extrema:

$$\begin{aligned} &f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 \\ &f'(x) = 0 \quad x^2 - 4 = 0 \quad x = -2 \vee x = 2 \\ &f''(x) = x \end{aligned}$$

$$f''(-2) = -2 \quad \text{Maximum mit dem Wert} \quad f(-2) = \frac{-8}{6} + 4 = \frac{16}{6}$$

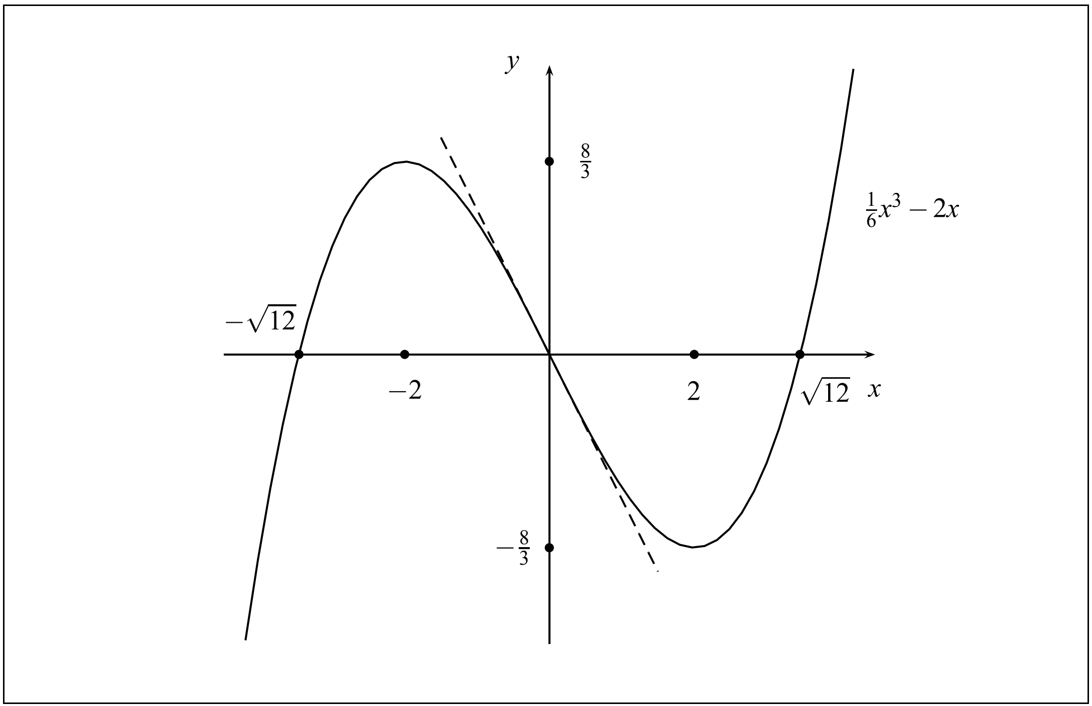
$$f''(2) = 2 \quad \text{Minimum mit dem Wert} \quad f(2) = \frac{8}{6} - 4 = -\frac{16}{6}$$

Globale Extrema gibt es nicht, weil die Funktion beliebig kleine und beliebig große Werte annimmt.

Krümmungsverhalten: Für negative Argumente ist $f''(x) < 0$ und damit ist der Funktionsgraph in der linken Halbebene rechtsgekrümmt. Entsprechend folgt aus $f''(x) > 0$ für $x > 0$ die Linkskrümmung in der rechten Halbebene.

An der Stelle $x = 0$ ändert $f''(x)$ sein Vorzeichen und daher wendet der Graph seine Krümmungsrichtung. Der Punkt $W(0,0)$ heißt *Wendepunkt* des Graphen. In diesem Punkt ist der Graph zwischen den beiden Extrempunkten am steilsten, die erste Ableitung hat an dieser Stelle ein lokales Minimum.

Die Tangente im Wendepunkt $(0,0)$ hat die Steigung $f'(0) = -2$. Sie nähert den Graphen erstaunlich gut an.



Der Graph zeigt eine *Punktsymmetrie* zum Nullpunkt: Dreht man ihn um $180°$, deckt sich das Bild mit dem Graph. Die beiden Schnittpunkte des Graphen mit einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt haben zu ihm gleiche Abstände.

Diese Eigenschaft der Funktion kann am Funktionsterm abgelesen werden. Die Gleichung

$$f(-x) = -f(x)$$
$$f(-x) = \frac{1}{6}(-x)^3 - 2(-x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x = -f(x)$$

gilt für alle x, weil nur ungerade Exponenten auftauchen. Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heißt *ungerade*.

In diesem Fall kann man die Diskussion vereinfachen: Man berücksichtigt zunächst nur positive Argumente und überträgt die Ergebnisse auf die entsprechenden negativen Argumente.

4.2.5 Wurzelfunktionen

Die Potenzfunktionen $f(x) = c \cdot x^r$ mit einem gebrochenen Exponenten z.B. $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ heißen hier Wurzelfunktionen. Sie sind nur für positive Argumente x definiert.

4.2.6 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion spielt in den Naturwissenschaften und den Wirtschaftswissenschaften eine herausragende Rolle, weil sie viele Wachstums- und Abklingvorgänge beschreibt; dabei ist es üblich die Zeitvariable mit t zu bezeichnen.

Die Exponentialfunktion $f(t) = ce^{kt}$ erfüllt die Gleichung

$$\frac{d}{dt}f(t) = f'(t) = k \cdot f(t).$$

Jede Funktion, die diese Gleichung erfüllt, hat die Form

$$f(t) = ce^{kt}.$$

Die Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist wegen $f(0) = ce^0 = c$ der Funktionswert bei $t = 0$ also der Anfangswert.

Eine Größe, die sich nach diesem Gesetz ändert zeigt *exponentielles Wachstum* oder *exponentielle Abnahme*.

Beispiel 12:

$$p(t) = 5e^{0,3t}$$
$$p'(t) = 0,3 \cdot 5e^{0,3t} = 0,3 \cdot p(t)$$

$$q(t) = 2,4e^{-0,05t}$$
$$q'(t) = -0,05 \cdot 2,4e^{-0,05t} = -0,05 \cdot q(t)$$

Beispiel 13: Unter idealen Laborbedingungen wächst eine Bakterienkultur, indem jedes Bakterium sich bei einem bestimmten Alter teilt. Je mehr Bakterien zu einem Zeitpunkt vorhanden sind, desto mehr Teilungen werden in der folgenden kurzen Zeitspanne stattfinden, desto höher ist also die Wachstumsgeschwindigkeit. Dabei ist der Zuwachs proportional zur Größe; deswegen nehmen wir exponentielles Wachstum für die Größe $B(t)$ der Bakterienkultur an.

$$B(t) = B_0 e^{kt}$$

Bei einem Versuch „zählen" wir zu Beginn $t = 0$ ungefähr 20 000 Bakterien und 5 Stunden später 400 000. Wir haben die Konstanten B_0 und k zu bestimmen und verwenden dazu die beiden Messwerte

$$B(0) = 20\,000 \qquad \text{und} \qquad B(5) = 400\,000.$$

Die erste Bedingung bedeutet $B_0 = 20\,000$, also

$$B(t) = 20\,000 e^{kt}.$$

Benutzen wir dieses Ergebnis in der zweiten Bedingung, so folgt

$$\begin{aligned} B(5) = 20\,000 e^{k \cdot 5} &= 400\,000 \\ e^{5k} &= 20 \\ 5k &= \ln 20 \\ k &= \frac{\ln 20}{5} \approx 0{,}60. \end{aligned}$$

Die Exponentialfunktion

$$B(t) = 20\,000 e^{0{,}6t}$$

gibt die Zahl der Bakterien, solange die Lebensbedingungen unverändert bleiben.

Beispiel 14: Ein vollkommenes Beispiel für exponentielle Abnahme ist der Zerfall der radioaktiven Isotope, weil er unabhängig von äußeren Bedingungen stattfindet. Messungen zeigen, dass zu jedem Zeitpunkt die Zahl der im nächsten kleinen Zeitraum zerfallenden Nukleide proportional zur Zahl der noch nicht zerfallenen ist.

$$N'(t) = -\lambda N(t) \qquad \text{mit einer positiven Konstanten} \quad \lambda$$

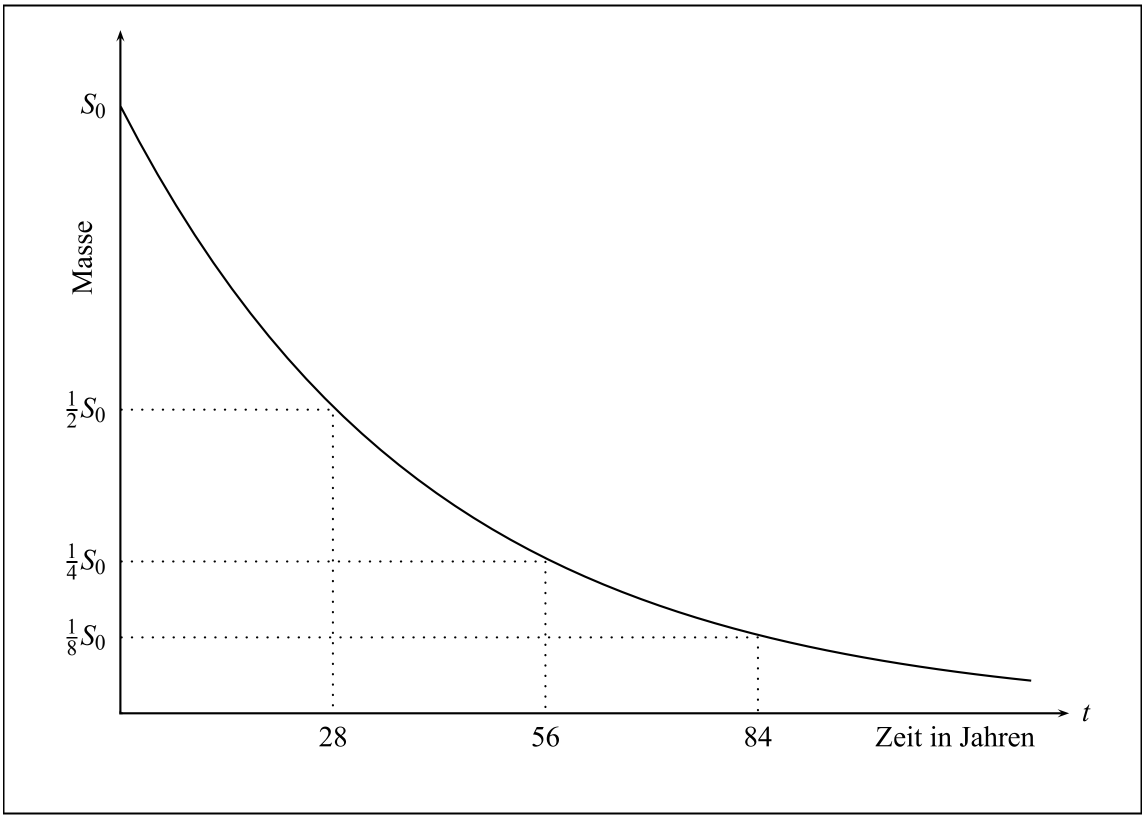
hat die allgemeine Lösung

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Die Konstante λ heißt *Zerfallskonstante*, sie ist charakteristisch für das radioaktive Isotop.

Das Isotop Strontium 90 hat die Zerfallskonstante $\lambda = 0{,}0244$, wenn die Zeit in Jahren gemessen wird.

$$S(t) = S_0 e^{-0{,}0244t}$$


S_0
Masse
$\frac{1}{2}S_0$
$\frac{1}{4}S_0$
$\frac{1}{8}S_0$
28
56
84
Zeit in Jahren
t

Wie lange dauert es, bis eine bestimmte Masse Strontium 90 auf die Hälfte zerfällt?

$$S(t) = S_0 e^{-0{,}0244t} \qquad \text{und} \qquad S(t) = \frac{1}{2} S_0$$

$$\begin{aligned} S_0 e^{-0{,}0244t} &= \frac{1}{2} S_0 \\ e^{-0{,}0244t} &= \frac{1}{2} \\ -0{,}0244t &= \ln \frac{1}{2} \\ t &= \ln \frac{1}{2} \;:\; (-0{,}0244) \approx 28 \end{aligned}$$

Man nennt diese Konstante *Halbwertzeit* von Strontium 90; sie beträgt gut 28 Jahre.

4.2.7 Relative Änderungsrate

Die Änderungsrate $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist unter Umständen nicht aussagekräftig genug.

Der Preis eines Liters Whisky sei $w(t) = 22{,}50$ und der eines Kühlschranks $k(t) = 330{,}00$; die Preissteigerungen werden mit $w'(t) = 1{,}5$ und $k'(t) = 11$ festgesetzt. Bei einem Vergleich dieser Steigerungen verwenden wir die *relativen Änderungsraten*

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \qquad \text{und} \qquad \frac{k'(t)}{k(t)}$$

und geben sie in Prozent an:

$$\frac{1{,}5}{22{,}5} \approx 0{,}067 \approx 7\% \qquad \text{und} \qquad \frac{11}{330} \approx 0{,}033 \approx 3\%.$$

4.2.8 Elastizität

Wenn wir fragen, um wie viele Einheiten die nachgefragte Menge von Whisky oder Kühlschränken zurückgeht, wenn der Preis um 1 Euro steigt, erhalten wir jeweils eine gewisse Anzahl von Einheiten, die eine in Liter und die andere in Stück. Diese Zahlen können allein kein klares Bild geben, da der Anstieg um 1 Euro bei Whisky als stark einzuschätzen ist im Vergleich zu demselben Anstieg bei dem Kühlschrank.

Wir sollten fragen, um welchen Prozentsatz sich die nachgefragte Menge ändert, wenn der Preis um 1% steigt. Wir werden also relative Änderungsraten heranziehen.

Die nachgefragte Menge eines Gutes sei durch die Funktion $N(p)$ des Preises p beschrieben.

Das Verhältnis zwischen der relativen Nachfrageänderung und der relativen Preisänderung bei einer absoluten Preisänderung h

$$\frac{N(p+h)-N(p)}{N(p)} : \frac{h}{p} = \frac{N(p+h)-N(p)}{h} \cdot \frac{p}{N(p)}$$

heißt die *durchschnittliche Elastizität* von $N(p)$ im Intervall $[p, p+h]$.

Man erhält ein bequemeres Ergebnis, wenn man den Grenzwert für $h \to 0$ bildet.

$$\frac{N(p+h)-N(p)}{N(p)} : \frac{h}{p} \approx N'(p) \cdot \frac{p}{N(p)}$$

Das führt zu der allgemeinen Definition.

Der Term

$$E_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

heißt *Elastizität* der Funktion f an der Stelle x.

4.2.9 Winkelfunktionen

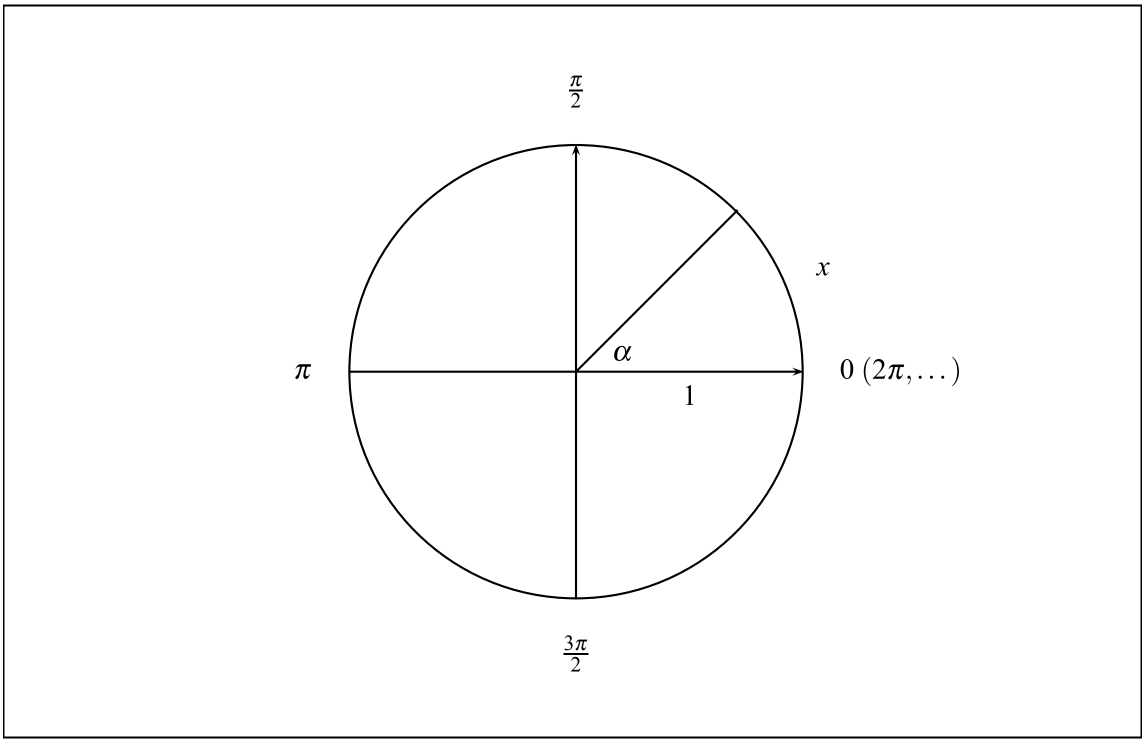
Die Winkelmessung durch Einteilung des Vollwinkels in 360° ist willkürlich und historisch bedingt. In der Differentialrechnung der Winkelfunktionen $\sin x, \cos x$ wird der Winkel x im *Bogenmaß* angegeben, das ist das Verhältnis der Länge des entsprechenden Bogens zum Radius des Kreises, also eine dimensionslose Zahl. Für den vollen Winkel bedeutet das

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi.$$

Auf dem Taschenrechner müssen Sie den Modus *Deg(ree)* für Gradmaß oder *Rad(ian)* für Bogenmaß wählen.

Gradmaß α	0°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

$$\boxed{\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}}$$


$\frac{\pi}{2}$
x
α
π
$0\ (2\pi, \dots)$
1
$\frac{3\pi}{2}$

4.2.10 Das Newton-Verfahren zur Approximation von Nullstellen

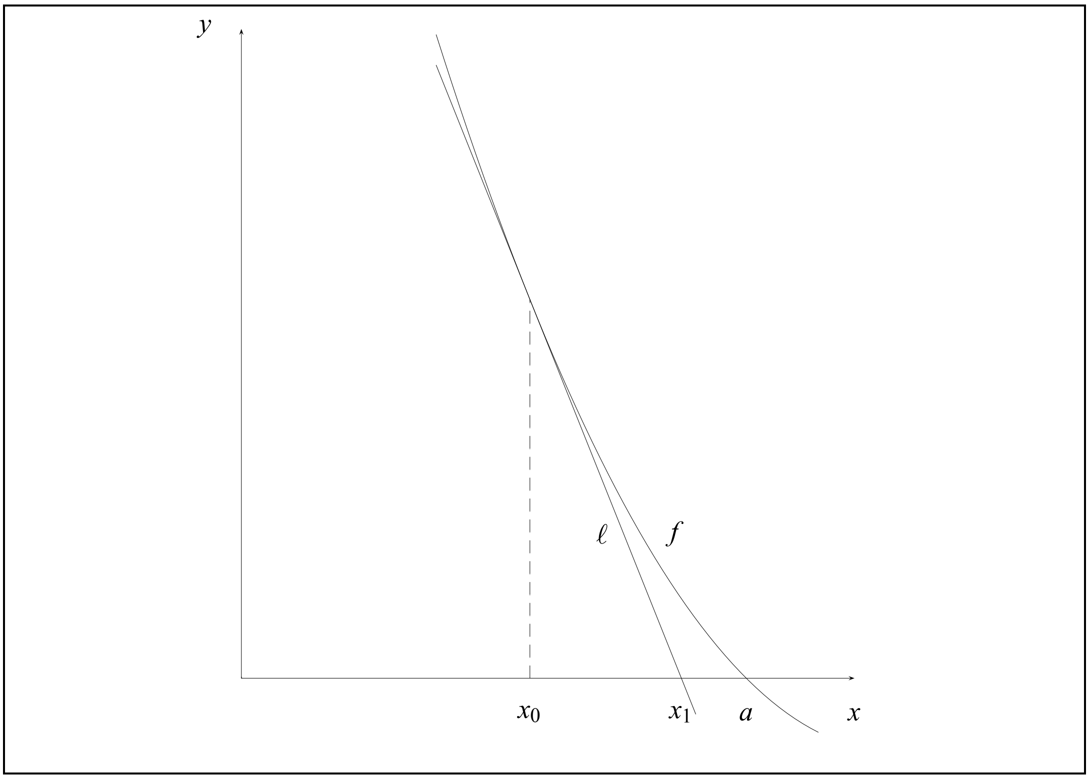
Bis auf die linearen und quadratischen Funktionen ist es meistens schwierig oder sogar unmöglich, die Nullstellen – die Lösungen der Gleichung $f(x)=0$ – durch die Grundrechenarten, Wurzeln oder Logarithmen zu berechnen. Man muss dann numerische Verfahren anwenden.

Aus einer Wertetabelle oder einem Graphen mögen wir wissen, dass die Funktion an den zwei Stellen s und t unterschiedliche Vorzeichen hat. Wenn f in dem Intervall (s,t) stetig ist, also nicht springt, muss sie irgendwo zwischen s und t mindestens eine Nullstelle a haben und der Graph dort die x-Achse schneiden.

Man schätzt „über den Daumen" mit $s \leq x_0 \leq t$ die Lage der Nullstelle a möglichst gut ab.

Danach soll aus x_0 eine genauere Schätzung berechnet werden.

Wenn die Funktion im Intervall (s,t) differenzierbar ist, können wir sie bei x_0 linear approximieren. Die Nullstelle x_1 der linearen Funktion ℓ soll als Näherung für die Nullstelle a der Funktion f gelten. Meistens liegt diese Zahl bedeutend näher an der Nullstelle als die Anfangsschätzung.



Die Nullstelle der linearen Funktion ℓ ist der Schnitt der Tangente mit der x-Achse.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ m &= f'(x_0) \quad y_0 = f(x_0) \quad y_1 = 0 \\ f'(x_0) &= \frac{-f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Mit x_1 als Ausgangswert berechnet man auf dieselbe Weise eine weitere Näherung x_2. Dieser Schritt muss so oft wiederholt werden, bis aufeinander folgende Werte sich im Rahmen der verlangten Genauigkeit nicht mehr unterscheiden.

Das Newtonsche Iterationsverfahren ist erklärt durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{für} \quad n = 0,1,\ldots$$
$$\text{falls} \quad f'(x_n) \neq 0.$$

Wenn der Startwert x_0 geeignet nahe bei einer Nullstelle a gewählt wurde, liefern die Zahlen x_n in der Regel Näherungswerte, die mit steigendem n immer genauer sind.

Beispiel 15: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}(x-9)^2 - 1$ hat im Intervall $(3,9)$ eine Nullstelle, weil $f(3) = 11$ und $f(9) = -1$. Obwohl die Nullstellen bei 7 und 11 exakt berechnet werden können, wollen wir sie durch das Newtonverfahren approximieren.

Dazu setzen wir $f(x)$ und

$$f'(x) = \frac{x-9}{2}$$

in die rechte Seite der Iterationsformel ein und versuchen durch Vereinfachung einen für das Rechnen günstigeren Term zu bilden.

$$\begin{aligned} & x - \frac{\frac{1}{4}(x-9)^2 - 1}{\frac{1}{2}(x-9)} \\ &= x - \frac{1}{2}(x-9) + \frac{2}{x-9} \\ &= x : 2 + 2 : (x-9) + 4{,}5 \end{aligned}$$

Damit hat die Newtonsche Iterationsformel für die hier gewählte Funktion eine für den Taschenrechner geeignete Form

$$x_{n+1} = x_n : 2 + 2 : (x_n - 9) + 4{,}5.$$

Als Startwert sei $x_0 = 4$ gewählt.

Erster Schritt:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= x_0 : 2 + 2 : (x_0 - 9) + 4{,}5 \\ &= 4 : 2 + 2 : (4 - 9) + 4{,}5 \\ &= 6{,}1 \end{aligned}$$

Zweiter Schritt:

$$\begin{aligned} x_2 &= 6{,}1 : 2 + 2 : (6{,}1 - 9) + 4{,}5 \\ &= 6{,}86034482759 \end{aligned}$$

Dritter Schritt:

$$\begin{aligned} x_3 &= 6{,}86034482759 : 2 + 2 : (6{,}86034482759 - 9) + 4{,}5 \\ &= 6{,}99544235739 \end{aligned}$$

Vierter Schritt:

$$x_4 = 6{,}99999481879$$

Weitere Schritte:

$$x_5 = 7 \quad x_6 = 7 \quad \ldots$$

Zur Probe bestätigen wir, dass $f(7) = \frac{1}{4}(7-9)^2 - 1 = 0$ gilt.

Beispiel 16: Die Gleichung $(2x)^x = 200$ ist nicht durch Umformungen nach x aufzulösen. Wegen $(2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$ und $(2 \cdot 2)^2 = 4^2 = 16$ ist klar, dass die Lösung zwischen 2 und 3 liegt.

Die Funktion $f(x) = (2x)^x - 200$ hat im Intervall $(2;3)$ eine Nullstelle.

Die Ableitung läßt sich nach einem kleinen Trick berechnen: Wir schreiben $(2x)^x$ als $e^{x\ln(2x)}$.

$$\begin{aligned} (2x)^x - 200 &= e^{x\cdot\ln(2x)} - 200 \\ \left(e^{x\cdot\ln(2x)} - 200\right)' &= e^{x\cdot\ln(2x)} \cdot (x\ln(2x))' \\ &= e^{x\cdot\ln(2x)} \left[\ln(2x) + x \cdot \frac{2}{2x}\right] \\ &= e^{x\cdot\ln(2x)} \left[\ln(2x) + 1\right] \end{aligned}$$

Die Iterationsformel lautet in diesem Fall

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n \cdot \ln(2x_n)} - 200}{e^{x_n \cdot \ln(2x_n)} \left[\ln(2x_n) + 1\right]}.$$

Wenn wir mit 3 starten, erhalten wir die weiteren Näherungen

$$2{,}973 \qquad 2{,}972388 \qquad 2{,}972387$$

und deren Einsetzungen in f ergeben Werte sehr nahe bei Null.

5. Funktionen mehrerer Variablen

In den Anwendungen hängt eine Größe meistens von mehr als einer Variablen ab. Der Absatz eines Gutes hängt ggf. nicht nur vom eigenen Preis, sondern auch von den Preisen konkurrierender Produkte ab, weiter könnte auch der Werbungsaufwand Einfluss haben. Die Herstellungskosten eines Gutes setzen sich zusammen aus Materialkosten, Löhnen und den Unterhaltskosten der Produktionsanlagen.

Eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n Variablen ist eine Abbildung, die jedem n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reeller Zahlen aus einer Definitionsmenge $\mathbb{D}$ genau eine reelle Zahl zuordnet.

$$f(x,y) = e^x(x^2 + 2y) \quad \text{und} \quad g(x_1,x_2,x_3) = 5x_1x_2^2x_3$$

sind Funktionen von zwei bzw. drei Variablen.

Die meisten gegenüber Funktionen einer Variablen neuen Eigenschaften zeigen sich schon bei Funktionen mit nur zwei Variablen und die Übertragung auf Funktionen von mehr als zwei Variablen ist in der Regel offensichtlich ist.

Beispiel 1: Jedem Zahlenpaar (x,y) sei die Zahl $3x - x^2y + 1$ zugeordnet. Damit ist eine Funktion f gegeben.

$$f(x,y) = 3x - x^2y + 1$$

Geben Sie die Funktionswerte $f(0,0)$, $f(1,2)$, $f(-2,-3)$, $f(a+3, b-1)$ an!

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 3 \cdot 0 - 0^2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f(1,2) &= 3 \cdot 1 - 1^2 \cdot 2 + 1 = 2 \\ f(-2,-3) &= 3 \cdot (-2) - (-2)^2(-3) + 1 = -17 \\ f(a+3, b-1) &= 3(a+3) - (a+3)^2(b-1) + 1 \end{aligned}$$

Beispiel 2: Die folgende Funktion kann einen Produktionsprozess beschreiben.

$$F(x,y) = Cx^ay^b \qquad C, a, b \quad \text{sind Konstanten}$$

Dabei werden x, y die *Inputfaktoren* genannt und $F(x,y)$ gibt den zugehörigen *Output* an.

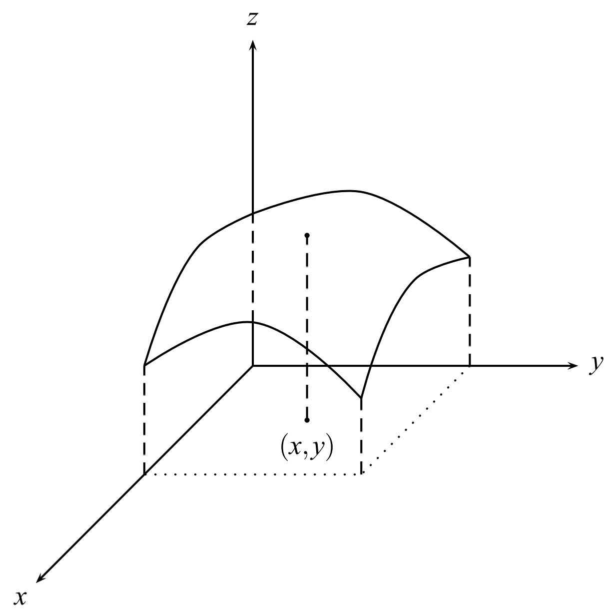
5.1 Graphische Darstellung

Eine Funktion von zwei Variablen kann graphisch dargestellt werden.

- Dazu benötigt man ein dreidimensionales Koordinatensystem, in dem zu jedem Punkt des Raumes drei Koordinaten (x, y, z) gehören. Umgekehrt bestimmt jedes Zahlentripel genau einen Punkt.

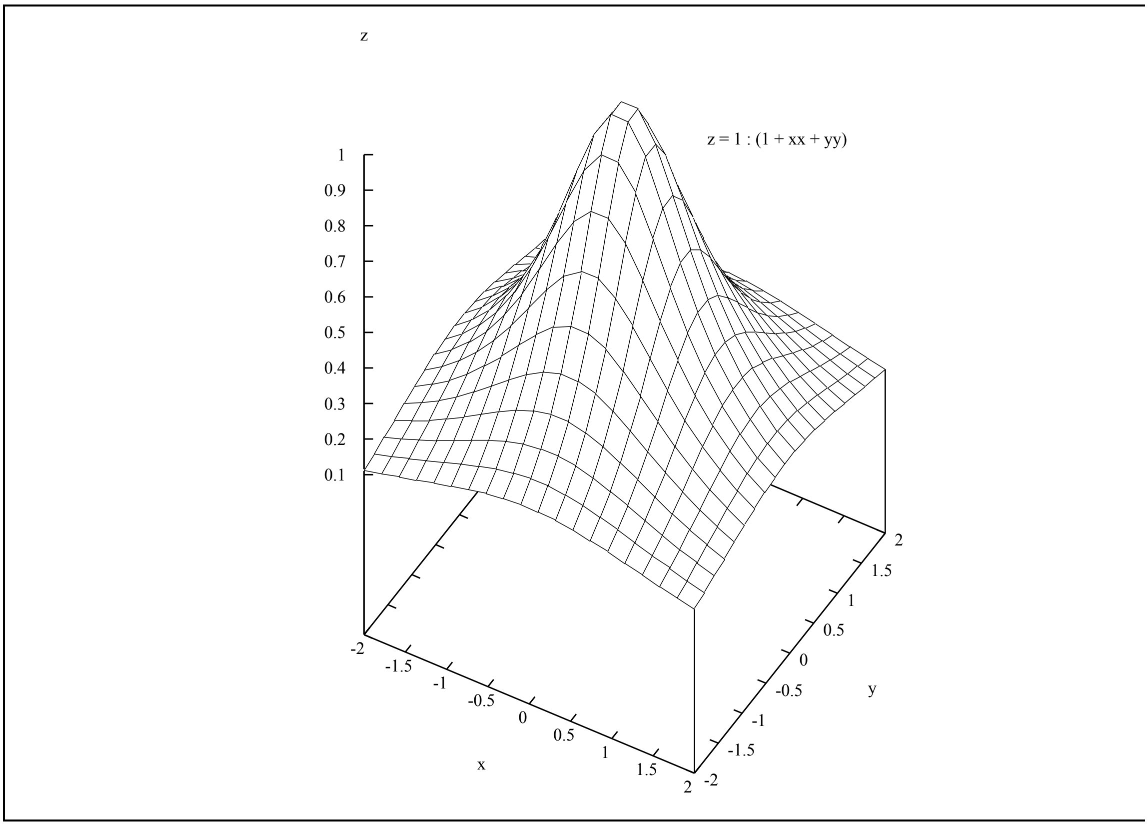
- Der Graph der Funktion $f(x,y)$ besteht aus den Raumpunkten mit den Koordinaten $(x,y,f(x,y))$, wenn (x,y) das zulässige Gebiet durchläuft. Der Graph ist eine Fläche im dreidimensionalen Raum, die sich über dem zulässigen Gebiet in der xy-Ebene wölbt.
- Ein interessierendes Raumstück (Achsen und Fläche) wird wie mit einer Kamera auf eine Ebene projiziert.

Im Raum dienen drei Geraden durch einen Punkt, die paarweise senkrecht auf einander stehen, als Koordinatensystem. Wir bezeichnen sie als *Koordinatenachsen* und die von je zwei Achsen aufgespannten Ebenen als *Koordinatenebenen*.

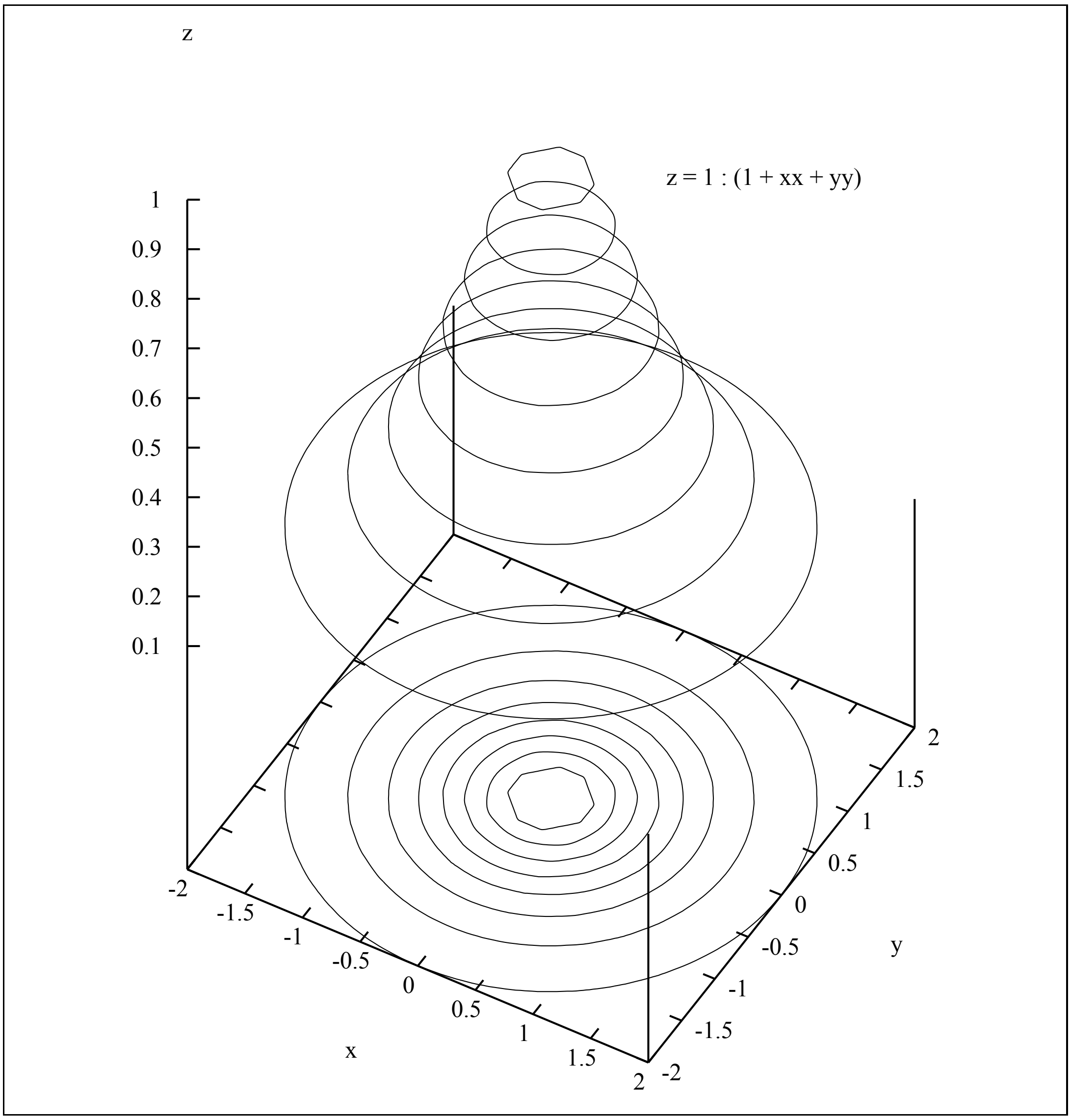


Über einem Rechteck der xy -Ebene wölbt sich die Fläche. Hier werden ihre Schnittkurven mit vier Ebenen senkrecht zur xy -Ebene gezeigt.

Dieses Verfahren wird von Zeichenprogrammen verwendet, indem sie die Schnittkurven der Funktionsfläche mit den Ebenenscharen $x = c$ und $y = k$ zeichnen. Dabei entsteht auf der Fläche ein Gitternetz.



Funktionsfläche zu $z = f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ mit dem Zeichenprogramm `gnuplot`.



Eine weiteres Verfahren zeichnet die Linien auf der Funktionsfläche, die durch ebene Schnitte parallel zur Grundfläche entstehen. Die eine halbe Einheit über der Grundfläche verlaufende Ebene schneidet die Funktionsfläche in den Punkten mit den Koordinaten $(x;y;0{,}5)$.

Üblicherweise benutzt man nur deren Projektion in die xy -Ebene; diese Kurven heißen *Isoquanten, Niveaulinien* oder *Höhenlinien*. Sie sind aus der Kartographie bekannt als Isobaren, Isotherme oder Isohypsen. Dort werden z.B. die Höhenverhältnisse einer Landschaft auf diese Weise dargestellt.

Wenn an jede Isoquante der Funktionswert geschrieben wird, hat man eine Darstellung der Funktion, mit der auch quantitativ gearbeitet werden kann.

5.2 Partielle Ableitungen

Sei $z = f(x,y)$ eine Funktion der Variablen x und y. Wir fragen nach der lokalen Änderungsrate von z bezüglich der Variablen x, wenn y konstant gehalten wird, und andererseits nach der lokalen Änderungsrate von z bezüglich der Variablen y mit festgehaltenem x. In beiden Fällen betrachten wir $z = f(x,c) = g(x)$ oder $z = f(d,y) = h(y)$ als Funktionen von nur einer Variablen. Wir haben also jeweils die Ableitungen $g'(x)$ oder $h'(y)$ zu bestimmen. Sie heißen *partielle Ableitungen* der Funktion $f(x,y)$.

Für eine Funktion von zwei Variablen $z = f(x,y)$ heißt der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$

falls er existiert, die *partielle Ableitung von f nach x*. an der Stelle (x,y) und wird mit

$$f_x \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{bezeichnet.}$$

Entsprechend heißt der Grenzwert

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k},$$

falls er existiert, die *partielle Ableitung von f nach y* an der Stelle (x,y) und wird mit

$$f_y \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{bezeichnet.}$$

Wie bei Funktionen einer Variablen benutzen wir diese Definition selten direkt, sondern wenden die daraus hergeleiteten Regeln an.

Beispiel 3: Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = 6\sqrt{x} : y^3$ die partiellen Ableitungen!

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{6x^{\frac{1}{2}}}{y^3} \\ &= \frac{6}{y^3}\frac{\partial}{\partial x}x^{\frac{1}{2}} \qquad (y \text{ ist konstant}) \\ &= \frac{6}{y^3}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x}\cdot y^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{6\sqrt{x}}{y^3} \\ &= 6\sqrt{x}\frac{\partial}{\partial y}y^{-3} \qquad (x \text{ ist konstant}) \\ &= 6\sqrt{x}\cdot(-3y^{-4}) \\ &= \frac{-12\sqrt{x}}{y^4}\end{aligned}$$

Beispiel 4: Für $f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^3$ sind $f_x(1,2)$ und $f_y(1,2)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy^2 + y^3) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + y^2 \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}(y^3) \\
&= 2x + y^2 \cdot 1 + 0 \\
&= 2x + y^2 \\
f_x(1,2) &= 2 \cdot 1 + 2^2 = 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy^2 + y^3) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + x \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) \\
&= 0 + x \cdot 2y + 3y^2 \\
&= 2xy + 3y^2 \\
f_y(1,2) &= 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 16
\end{aligned}$$

Beispiel 5: Für $f(x,y) = xe^{2x^2+y^2}$ sind $f_x(1,0)$ und $f_y(1,-1)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot e^{2x^2+y^2}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x) \cdot e^{2x^2+y^2} + x\frac{\partial}{\partial x}e^{2x^2+y^2} && \text{Produktregel} \\
&= 1 \cdot e^{2x^2+y^2} + x \cdot e^{2x^2+y^2} \cdot (4x) && \text{Kettenregel} \\
&= (4x^2+1)e^{2x^2+y^2} \\
f_x(1,0) &= (4 \cdot 1^2 + 1)\, e^{2\cdot 1^2+0^2} = 5e^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y &= \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot e^{2x^2+y^2}) \\
&= x\frac{\partial}{\partial y}e^{2x^2+y^2} && x \text{ ist konstant} \\
&= x \cdot e^{2x^2+y^2} \cdot (2y) && \text{Kettenregel} \\
&= 2xye^{2x^2+y^2} \\
f_y(1,-1) &= (2 \cdot 1 \cdot (-1))\, e^{2\cdot 1^2+(-1)^2} = -2e^3
\end{aligned}$$

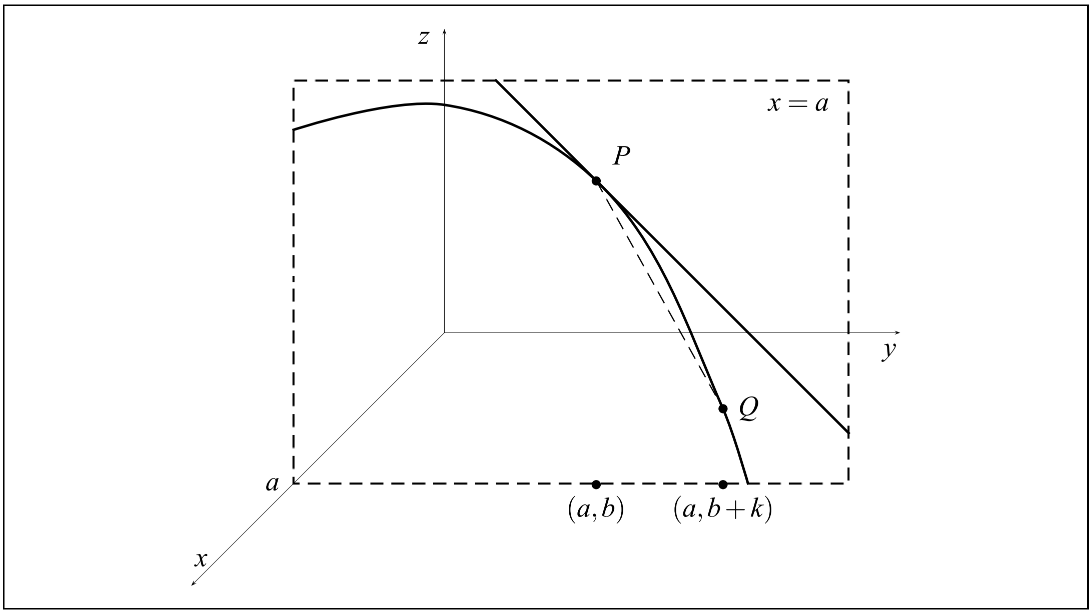
5.2.1 Tangenten und Tangentialebene

Die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x,y)$ mögen existieren. Dann ist nach der Definition an der Stelle (a,b)

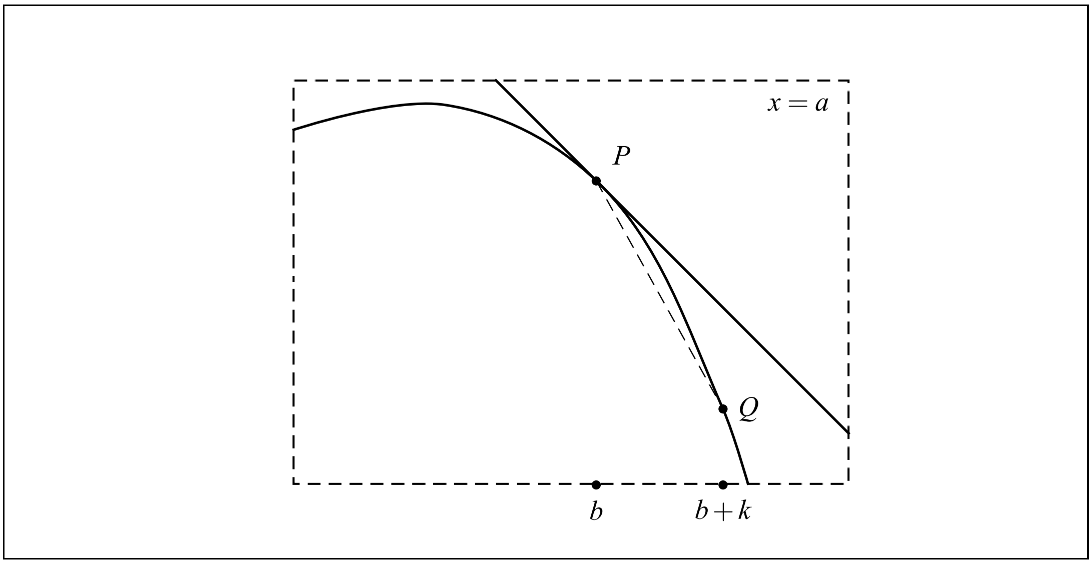
$$f_y(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}.$$

Wir bewegen uns mit (x,y) von der Stelle (a,b) nach $(a,b+k)$, indem wir $x = a$ festhalten und y von b nach $b+k$ wandern lassen; wir bewegen uns auf der Strecke $(a,b)(a,b+k)$ parallel zur y-Achse.

Dabei wandert auf der Funktionsfläche der Punkt $R(a,y,f(a,y))$ längs einer Kurve von $P(a,b,f(a,b$ nach $Q(a,b+k,f(a,b+k))$. Dieses Kurvenstück ist ein Teil der Schnittkurve der Fläche mit der Ebene, die parallel zur yz-Ebene läuft und die x-Achse bei a schneidet.



Für den obigen Grenzübergang reicht es folglich, diese Schnittebene zu betrachten.



Wenn k gegen null strebt, wandert Q auf der Kurve in Richtung von P und die Steigung der Sekante durch Q und P nähert sich der Tangentensteigung in P.

Interpretieren Sie

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

als Tangentensteigung, indem Sie entsprechende Skizzen anfertigen!

5.2.2 Richtungsableitung

Diese beiden speziellen Tangenten an die Funktionsfläche im Punkt $P(a,b,f(a,b))$ spannen die *Tangentialebene* an die Fläche im Punkt P auf. Jede Gerade in dieser Ebene durch den Punkt P ist Tangente und ihre Projektion in die xy-Ebene ist eine Gerade durch den Punkt (a,b) .

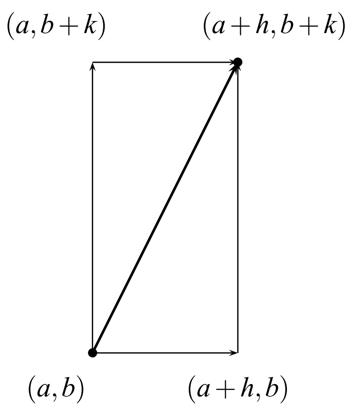
Hier haben wir tatsächlich etwas Neues gegenüber Funktionen einer Variablen, denn die Steigung dieser Tangente gibt die lokale Änderungsrate der Funktion f an der Stelle (a,b) an und zwar in der *Richtung* der Projektion.

Wie können wir die Ableitung in einer beliebigen Richtung berechnen? Dazu stehen uns nur die beiden Ableitungen parallel zur x -Achse und in die Richtung der y -Achse zur Verfügung. Sie reichen auch aus, diese Aufgabe zu lösen.

Wir haben nach der Änderungsrate der Funktion $f(x,y)$ zu suchen, wenn wir von der Stelle (a,b) geradlinig zu einer benachbarten Stelle $(a+h,b+k)$ übergehen.
Diese Strecke wird durch

$$(a+th,b+tk) \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 1$$

gegeben.



Die mittlere Änderungsrate der Funktion f ist durch den Quotient aus Funktionswertedifferenz und Abstand der Argumentpunkte gegeben.

$$\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} \qquad \text{Gesamtstrecke}$$

$$\frac{f(a+th,b+tk)-f(a,b)}{t\sqrt{h^2+k^2}} \qquad \text{Teilstrecke}$$

Wir berechnen den Grenzwert für den letzten Bruch.

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th,b+tk)-f(a,b)}{t} = f_x(a,b)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + f_y(a,b)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

5.2.3 Lineare Approximation und Totales Differential

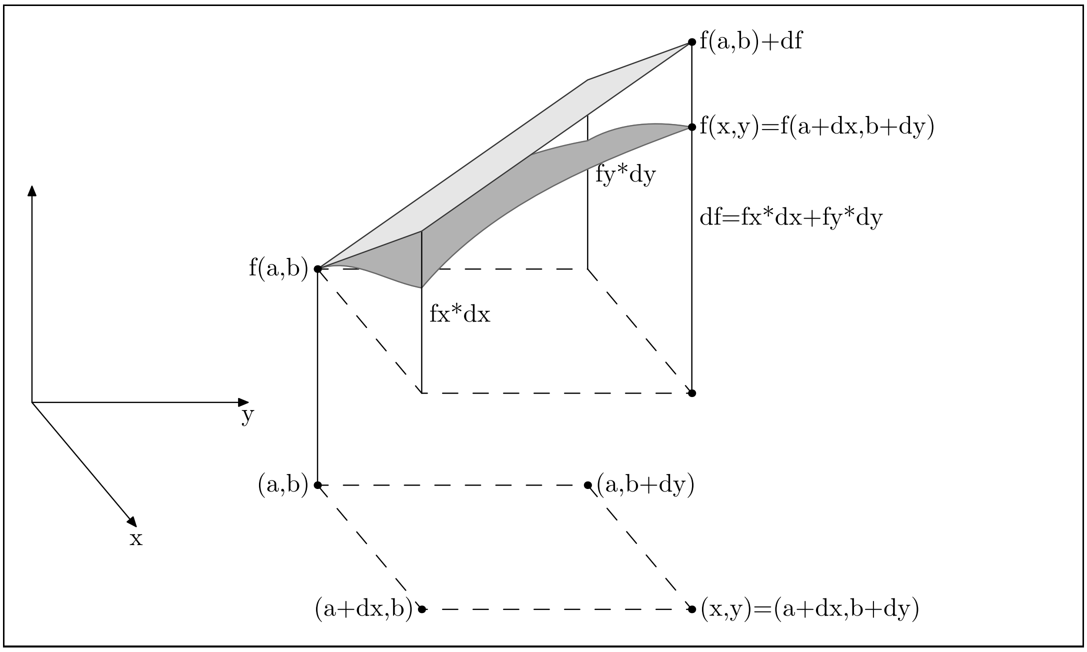
Der Graf G der Funktion $f(x,y)$ habe im Punkt $P(a,b,f(a,b))$ die Tangentialebene T, dann kann in einer Umgebung von P die Ebene T als Näherung für die Fläche G dienen.

$$t(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \qquad \text{Gleichung der Tangentialebene}$$

In einer Umgebung von (a,b) kann die Funktion $f(x,y)$ durch die lineare Funktion $t(x,y)$ angenähert werden.

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Der Term $df = f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b) = f_x(a,b)dx+f_y(a,b)dy$ heißt *totales Differential*.



In der Skizze wird deutlich, dass die Näherung $f(a,b)+df$ in diesem Beispiel einen größeren Wert liefert als $f(x,y)=f(a+dx,b+dy)$, den exakten Funktionswert an der betrachteten Stelle. Die Größe des Fehlers soll hier nicht untersucht werden, jedoch ist die Näherung meistens um so besser, je näher x an a und y an b rückt.

Beispiel 6: Für die Funktion $f(x,y)=5x^2+3xy+y^3$ berechnen wir die Änderung des Funktionswertes beim Übergang von der Stelle $(2;1)$ zur Stelle $(1{,}98;1{,}03)$.

Exakter Wert:

$$\begin{aligned} f(1{,}98;1{,}03)-f(2;1) & \\ &= 5(1{,}98)^2+3(1{,}98)(1{,}03)+(1{,}03)^3 \\ &= -5(2)^2-3(2)(1)-(1)^3 \\ &= -0{,}187 \end{aligned}$$

Näherung mit Hilfe des Differentials:

$$\begin{aligned} df &= f_x(2;1)(1{,}98-2)+f_y(2;1)(1-1{,}03) \\ &= [10(2)+3(1)](-0{,}02)+[3(2)+3(1)^2](0{,}03) \\ &= 23(-0{,}02)+9(0{,}03) \\ &= -0{,}19. \end{aligned}$$

5.3 Extrema

Zu den wichtigsten Merkmalen einer Funktion gehören ihre kleinsten und größten Werte — ihre Extrema. Dazu müssen wir die Stellen finden, die Funktionswerte berechnen und jeweils entscheiden, ob es ein *Minimum* oder ein *Maximum* ist.

Eine Besonderheit dieser Aufgabe ist, dass es entscheidend auf die Teilmenge der Definitionsmenge ankommt, bezüglich der wir nach Extremstellen suchen. Diese Teilmenge kann ein Rechteck oder ein Kreis in der xy-Ebene sein oder nur eine Kurve.

5.3.1 Freie Extrema

Nehmen wir eine Funktion an, die in einem Gebiet der xy-Ebene definiert ist und ihren größten Wert (Maximum) an einer inneren Stelle $P(a,b)$ des Gebiets hat. Auf der Funktionsfläche überragt der Punkt $H(a,b,f(a,b))$ jeden anderen (oder wird von keinem überragt). In diesem Hochpunkt muss die Tangentialebene parallel zur Grundebene verlaufen, dasselbe gilt für die beiden Tangenten, die parallel zur x-Achse bzw. zur y-Achse sind. Die Steigungen dieser Tangenten müssen also Null sein.

Das bedeutet: die beiden partiellen Ableitungen der Funktion an der Stelle (a,b) haben den Wert null. Eine Stelle mit dieser Eigenschaft heißt *stationäre Stelle* oder stationärer Punkt.

Wenn ein kleinster Wert (Minimum) an einer inneren Stelle angenommen wird, zeigt eine analoge Überlegung, dass es eine stationäre Stelle sein muss.

Eine differenzierbare Funktion kann an einer inneren Stelle $P(a,b)$ nur dann ein Extremum (Maximum oder Minimum) annehmen, wenn diese eine *stationäre Stelle* ist — d.h. wenn die Koordinaten a und b Lösung der folgenden Gleichungen sind.

$$f_x(x,y) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x,y) = 0$$

Die inneren Extremstellen sind unter den stationären Stellen zu finden. Allerdings gibt es stationäre Stellen, an denen die Funktion keinen Extremwert annimmt.

Finden Sie die stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = -3x^2 - 2xy - 3y^2 + 24x + 48y + 2!$$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -6x - 2y + 24 = 0 \\ f_y(x,y) &= -2x - 6y + 48 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + y &= 12 \\ x + 3y &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 12 - 3x \\ x + 3(12 - 3x) &= 36 - 8x = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 12 - 3\frac{3}{2} = \frac{15}{2} \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Das Zahlenpaar $(x,y) = (1{,}5; 7{,}5)$ erfüllt beide Gleichungen, es ist die stationäre Stelle der Funktion.

Zur Unterscheidung der stationären Stellen müssen die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung herangezogen werden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) &= f_{xx}(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) &= f_{xy}(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) &= f_{yx}(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) &= f_{yy}(x,y) \end{aligned}$$

Für die hier verwendeten Funktionen gilt

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

Für eine stationäre Stelle (a,b) der Funktion $f(x,y)$ liefert das folgende Kriterium weitere Aussagen. Aus den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung wird die *Diskriminante* $D(x,y)$ gebildet.

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$$

$$D(a,b) \begin{cases} < 0 & \text{Sattelpunkt} \\ = 0 & \text{keine Entscheidung} \\ > 0 & \begin{cases} f_{xx}(a,b) > 0 & \text{Minimum} \\ f_{xx}(a,b) < 0 & \text{Maximum} \end{cases} \end{cases}$$

Untersuchen Sie die oben gefundene stationäre Stelle!

$$f(x,y) = -3x^2 - 2xy - 3y^2 + 24x + 48y + 2!$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -6 \\ f_{xy}(x,y) &= -2 \\ f_{yy}(x,y) &= -6 \end{aligned}$$

$$D(1{,}5;7{,}5) = (-6)(-6) - (-2)^2 = 32 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx} = -6 < 0$$

Damit ist entschieden, dass die Funktion an der Stelle ein relatives Maximum hat. Dort nimmt sie den Wert $f(1{,}5;7{,}5) = 200$ an.

Beispiel 7: Die folgende Funktion ist symmetrisch in x und y. Das sollte man ausnutzen, um sich die Arbeit zu erleichtern: Die Ableitungen nach y werden genauso berechnet wie die nach x.

$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{y}{1+y^2}$$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{y}{1+y^2} \\ f_{xx}(x,y) &= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \cdot \frac{y}{1+y^2} \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{2y(y^2-3)}{(1+y^2)^3}$$
$$f_{yx}(x,y) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$$

$$f_x = 0 \Longleftrightarrow (1-x^2)y = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee y = 0$$

$$f_y = 0 \Longleftrightarrow x(1-y^2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee y = -1 \vee y = 1$$

Wir betrachten nacheinander die drei Fälle der ersten Gleichung.

Sei $x=-1$, dann folgt aus der zweiten Gleichung, dass $y=-1 \vee y=1$. Damit $(-1;-1)$ und $(-1;1)$.

Sei $x=1$, dann folgt aus der zweiten Gleichung, dass $y=-1 \vee y=1$. Damit $(1;-1)$ und $(1;1)$.

Sei $y=0$, dann folgt aus der zweiten Gleichung, dass $x=0$. Damit $(0;0)$.

Die Zahlenpaare $\{(0,0),(1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1)\}$ sind die stationären Stellen.

Bei der Untersuchung dieser fünf Stellen verwenden wir eine tabellarische Darstellung. Wir verzichten darauf, die Diskriminante aufzuschreiben, sondern benutzen die Zahlen der dritten bis fünften Spalte in $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$.

x	y	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	D	Art	Wert
0	0	0	0	1	-1	Sattelpunkt	0
1	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{16}$	Maximum	$\frac{1}{4}$
-1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{16}$	Minimum	$-\frac{1}{4}$
1	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{16}$	Minimim	$-\frac{1}{4}$
-1	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{16}$	Maximum	$\frac{1}{4}$

Die Funktion nimmt Werte zwischen $-\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}$ an; im ersten und dritten Quadranten ist sie positiv und in dem zweiten und vierten negativ; auf den Achsen ist sie null.

Beispiel 8: Bei der folgenden Funktion hilft das Diskriminantenkriterium nicht weiter.

$$f(x,y) = (x^2 - y) \cdot (y - 2x^2) = -2x^4 - y^2 + 3x^2 y$$

$$\begin{aligned} f_x &= -8x^3 + 6xy \\ f_{xx} &= -24x^2 + 6y \\ f_{xy} &= 6x \\ f_y &= -2y + 3x^2 \\ f_{yy} &= -2 \\ f_{yx} &= 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_x &= -8x^3 + 6xy = 0 \\ f_y &= -2y + 3x^2 = 0 \end{aligned}$$

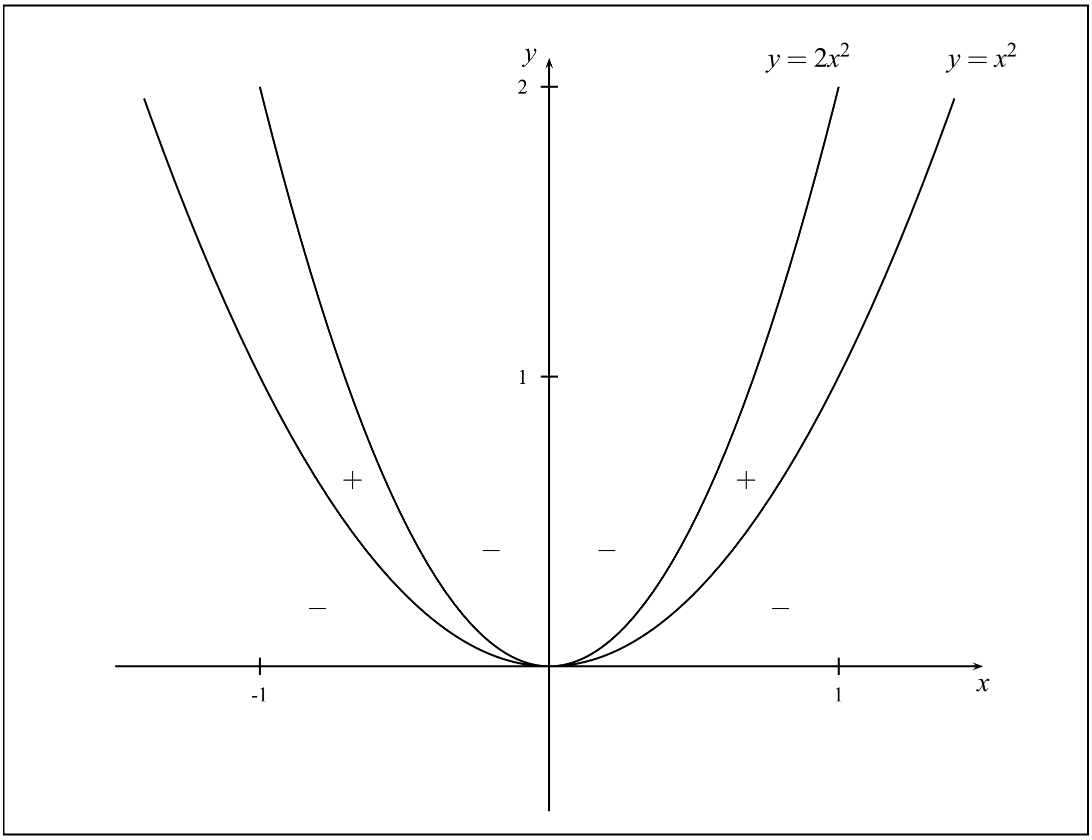
$$\begin{aligned} -8x^3 + 6xy &= 0 \\ y &= \frac{3}{2}x^2 \end{aligned}$$

$$-8x^3 + 6x\frac{3}{2}x^2 = -8x^3 + 9x^3 = x^3 = 0$$

Damit ist $(0;0)$ die stationäre Stelle der Funktion.

$$D(0,0) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \cdot 0 - 0^2 = 0$$

In diesem Fall gibt das Kriterium keine Auskunft über die Art der stationären Stelle; es könnte ein Extremum oder ein Sattel(punkt) vorliegen.



Die Funktion $f(x,y) = (x^2 - y) \cdot (y - 2x^2)$ nimmt auf den Parabeln den Wert null an, zwischen ihnen ist sie positiv und sonst negativ. In der Umgebung des Nullpunktes nimmt sie positive wie negative Werte an, es liegt kein Extremum sondern ein Sattelpunkt vor.

5.3.2 Gebundene Extrema

Wenn der Gewinn maximiert oder die Kosten minimiert werden sollen und bei anderen Optimierungsaufgaben, sind die Variablen häufig Einschränkungen unterworfen: Zeit, Geld und Arbeitskraft sind nur begrenzt verfügbar.

Diese Einschränkungen –Restriktionen– lassen sich gelegentlich durch Gleichungen in den Variablen darstellen. Die können wir immer in der Form $g(x,y) = 0$ schreiben.

Damit haben wir den Aufgabentyp:

$$\text{Maximiere (minimiere)} \quad f(x,y) \quad \text{unter der Bedingung} \quad g(x,y) = 0!$$

5.3.3 Die Methode der Variablensubstitution

Beispiel 9: Sie können zwei Güter kaufen, um Ihren Nutzen zu mehren, aber dafür können Sie nur bis zu einem festen Geldbetrag ausgeben.

Wenn Sie meinen, dass der Nutzen mit der Menge der erworbenen Güter steigt und Sie den größten Nutzen erzielen wollen, sollten Sie das verfügbare Geld restlos ausgeben, denn mit jedem Cent werden Sie Ihren Nutzen steigern.

Seien x und y die Mengen der Güter, p_1 bzw. p_2 ihre Preise und B der Geldbetrag. Dann haben Sie bei der Entscheidung für die Mengen x,y die *Einschränkung*

$$p_1 \cdot x + p_2 \cdot y = B$$

zu beachten.

Nehmen wir an, dass die doppelte Menge eines Gutes auch den doppelten Nutzen verspricht, dann ist die folgende *Nutzenfunktion* plausibel.

$$N(x,y) = x \cdot y$$

Die Optimierungsaufgabe ist

$$\text{Maximiere} \quad N(x,y) = x \cdot y \quad \text{, wenn} \quad p_1 \cdot x + p_2 \cdot y = B \quad \text{oder} \quad g(x,y) = p_1 x + p_2 y - B = 0\,!$$

Zunächst ein numerisches Beispiel: Vor einem Sommerfest wollen Sie für 120 EUR x Flaschen Rotwein zu 5 EUR und y Flaschen Weißwein zu 4 EUR einkaufen.

$$\text{Maximiere} \quad N(x,y) = x \cdot y \quad \text{, wenn} \quad 5x + 4y = 120\,!$$

Wir lösen die Nebenbedingung nach y auf und setzen das Ergebnis in die Nutzenfunktion ein.

$$\begin{aligned} y &= 30 - \frac{5}{4}x \\ f(x) &= N\big(x, y(x)\big) = x \cdot \left(30 - \frac{5}{4}x\right) \\ f(x) &= 30x - \frac{5}{4}x^2 \end{aligned}$$

Wir berechnen das Maximum von f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 30 - \frac{5}{2}x \\ f'(x) &= 0 \\ \iff \quad x &= \frac{2}{5}30 = 12 \end{aligned}$$

Wegen $f''(x) = -\frac{5}{2} < 0$ hat f bei 12 ein Maximum mit dem Wert $f(12) = 180$.

Der Wert der zweiten Variablen ist

$$y = 30 - \frac{5}{4}x = 30 - \frac{5}{4}12 = 15$$

und der Wert der Nutzenfunktion ist

$$N(12, 15) = 12 \cdot 15 = 180.$$

Sie sollten 12 Flaschen Rotwein und 15 Flaschen Weißen kaufen. Prost!

Es ist kein Zufall, dass für jede Weinsorte die Hälfte des Geldes ausgegeben wird. Die folgende Rechnung bestätigt das für beliebige Preise und Budgets p_1, p_2, B .

$$\text{Maximiere} \quad N(x,y) = x \cdot y \quad \text{, wenn} \quad p_1x + p_2y = B$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{B - p_1x}{p_2} \\ f(x) &= N\big(x, y(x)\big) = x \cdot \frac{B - p_1x}{p_2} \\ f(x) &= \frac{Bx - p_1x^2}{p_2} \end{aligned}$$

Das Maximum von f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{B - 2p_1x}{p_2} \\ f'(x) &= 0 \\ \iff \quad x &= \frac{B}{2p_1} \end{aligned}$$

Wegen $f''(x) = -\frac{2p_1}{p_2} < 0$ hat f bei $\frac{B}{2p_1}$ ein Maximum.

Der Wert der zweiten Variablen ist

$$y = \frac{B - p_1x}{p_2} = \frac{B - B/2}{p_2} = \frac{B}{2p_2}$$

und der Wert der Nutzenfunktion ist

$$N(x,y) = \frac{B}{2p_1} \cdot \frac{B}{2p_2}.$$

Hier das bemerkenswerte Ergebnis für diese Nutzenfunktion:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{B}{2p_1}}{\frac{B}{2p_2}} = \frac{p_2}{p_1} \qquad \iff \qquad x \cdot p_1 = y \cdot p_2 = \frac{B}{2}$$

Im Nutzenmaximum ist das Mengenverhältnis der Güter der Kehrwert des Preisverhältnisses. Für jedes der Güter wird das halbe Budget verwendet.

Die Variablensubstitution ist nicht praktikabel, wenn die Gleichung $g(x,y) = 0$ weder nach x noch nach y zu lösen ist.

Im folgenden Abschnitt wird eine Methode vorgestellt, bei der die Lösung von $g(x,y) = 0$ umgangen wird. Darüber hinaus läßt sie sich leicht auf Probleme mit drei oder mehr Variablen verallgemeinern.

5.3.4 Die Lagrangesche Methode

Die relativen Extrema der Funktion $f(x,y)$ unter der Bedingung, dass die Variablen durch die Gleichung $g(x,y)=0$ aneinander gebunden sind, können nach dem folgenden Verfahren ermittelt werden.

1. Bilde die Summe der Zielfunktion f und eines Vielfachen der Restriktionsfunktion g

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y),$$

   die *Lagrangesche Funktion* L !
   Der *Lagrangesche Multiplikator* λ (Lambda) ist eine noch zu bestimmende, reelle Zahl.

2. Löse das Gleichungssystem in den drei Variablen x,y,λ

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda)&=0\\ L_y(x,y,\lambda)&=0\\ L_\lambda(x,y,\lambda)&=0! \end{aligned}$$

3. Berechne für jede Lösung (x,y,λ) den Wert $f(x,y)$!

Die gesuchten relativen Extrema sind unter diesen Werten.

Beispiel 10: Finden Sie die Extrema der Funktion

$$f(x,y)=x^2+y$$

unter der Bedingung

$$x^2+y^2=4!$$

Wir formen die Restriktionsgleichung um:

$$g(x,y)=x^2+y^2-4=0$$

1. Schritt: Stelle die Lagrangesche Funktion auf!

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y+\lambda(x^2+y^2-4).$$

2. Schritt: Differenziere L und löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda)&=2x+2\lambda x=0\\ L_y(x,y,\lambda)&=1+2\lambda y=0\\ L_\lambda(x,y,\lambda)&=x^2+y^2-4=0! \end{aligned}$$

Die erste Gleichung in der Form

$$2x(1+\lambda)=0$$

führt auf

$$x=0 \quad \text{oder} \quad \lambda=-1.$$

Fallunterscheidung:

1. Fall
Betrachten wir zunächst $x=0$, ergibt die dritte Gleichung

$$y=-2 \quad \text{oder} \quad y=2.$$

Die zweite Gleichung lösen wir nach λ auf.

$$\lambda=-\frac{1}{2y}$$

Mit den Werten für y folgt

$$\lambda=\frac{1}{4} \quad \text{oder} \quad \lambda=-\frac{1}{4}.$$

Damit sind $(0,-2,\frac{1}{4})$ und $(0,2,-\frac{1}{4})$ Lösungen des Gleichungssystems; $(0,-2)$ und $(0,2)$ sind Kandidaten für Extremstellen.

2. Fall
Es bleibt noch, die Konsequenzen von $\lambda=-1$ zu diskutieren.

$$y=-\frac{1}{2\lambda}=\frac{1}{2}$$

und aus der dritten Gleichung

$$x^2+\frac{1}{4}-4=0 \Longleftrightarrow x^2=\frac{15}{4}$$

folgt

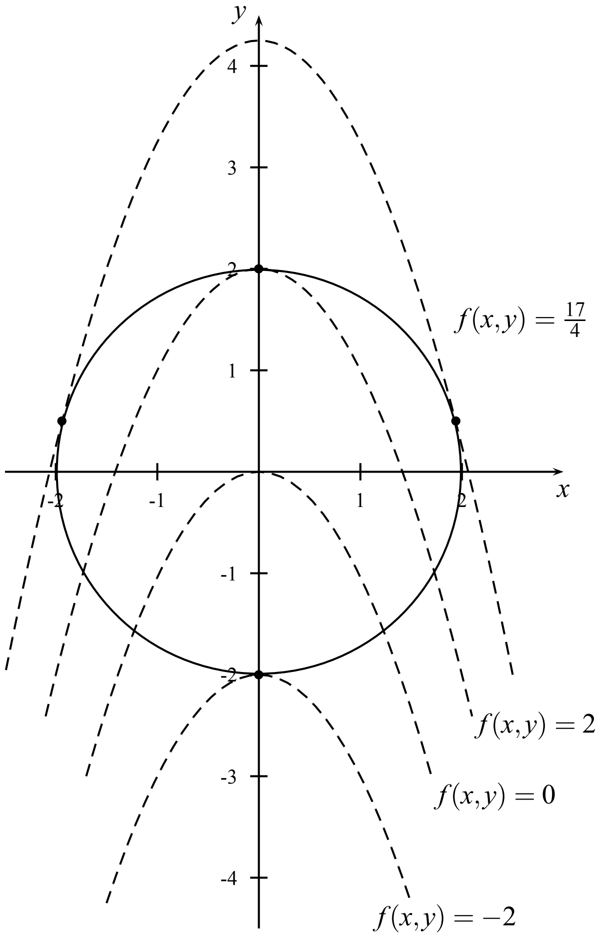
$$x=\frac{\sqrt{15}}{2} \quad \text{oder} \quad x=-\frac{\sqrt{15}}{2}$$

Die Zahlentripel $(-\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{1}{2},-1)$ und $(-\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{1}{2},-1)$ sind weitere Lösungen des Gleichungssystems und die Stellen $(-\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{1}{2})$ und $(\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{1}{2})$ sind Kandidaten für Extrema.

3. Schritt: Berechne die Funktionswerte an den vier Stellen und vergleiche!

(x,y)	$(0,2)$	$(0,-2)$	$(-\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{1}{2})$
$f(x,y)=x^2+y$	2	-2	$\frac{17}{4}$	$\frac{17}{4}$

Der größte Wert $\frac{17}{4}$ wird an den zwei Stellen $(-\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{1}{2})$ und $(\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{1}{2})$ angenommen; an der Stelle $(0,-2)$ mit dem Wert -2 liegt das globale Minimum. In $(0,2)$ liegt ein nur lokales Minimum.



Die Restriktionsgleichung ist durch den Kreis $x^2+y^2=4$ dargestellt.
Die Linien für $f(x,y)=x^2+y=c$ sind Parabeln mit den Gleichungen $y=-x^2+c$.
In der Skizze sind diese Isoquanten gestrichelt gezeichnet und nur solche Parabeln, die mit dem Kreis mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Hier können wir ablesen, welche Werte die Funktion $f(x,y)$ auf dem Kreis annimmt: Die tiefste Parabel gibt den kleinsten Wert und die höchste den größten.
Diese beiden Parabeln können den Kreis nicht schneiden, sondern nur berühren.
In den Extrempunkten berühren die Parabeln den Kreis.

Beispiel 11: Die Nutzenfunktion des folgenden Problems ist nicht durch subjektive Einschätzung bestimmt und enthält die beiden Variablen in Potenzen mit unterschiedlichen Exponenten.

Ein Paketzusteller legt in seinen Tarifen fest, dass bei einem Paket der Preisklasse A die Summe aus Höhe und Gürtellinie höchstens 90 cm sein darf.

Finden Sie die zylindrische Verpackung mit dem größten Rauminhalt, die diese Bedingung erfüllt!

Mit h und r werden die Höhe und der Radius dieser Röhre bezeichnet.

Das Volumen dieses Zylinders ist Grundfläche mal Höhe.

$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

Nur wenn die Maße die Bedingung $h + 2\pi r \leq 90$ erfüllen, fällt die Verpackung in die Preisklasse A. Da jede Verlängerung des Radius oder der Höhe das Volumen vergrößert, muss man

$$h + 2\pi r = 90$$

setzen, um das maximale Volumen zu erzeugen. Damit lautet die Aufgabe:

$$\boxed{\text{Maximiere} \quad V(r,h) = \pi r^2 h \quad \text{, wenn} \quad h + 2\pi r = 90\ !}$$

1. Die Lagrangesche Funktion ist

$$L(r,h,\lambda) = \pi r^2 h + \lambda(h + 2\pi r - 90)$$

2. Das System der ersten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} L_r(r,h,\lambda) &= 2\pi rh + \lambda 2\pi = 0 \\ L_h(r,h,\lambda) &= \pi r^2 + \lambda = 0 \\ L_\lambda(r,h,\lambda) &= h + 2\pi r - 90 = 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $2\pi(rh+\lambda) = 0$ also $rh = -\lambda$ und aus der zweiten $\lambda = -\pi r^2$. Damit gilt

$$rh = \pi r^2 \Longrightarrow h = \pi r$$

und eingesetzt in die dritte Gleichung

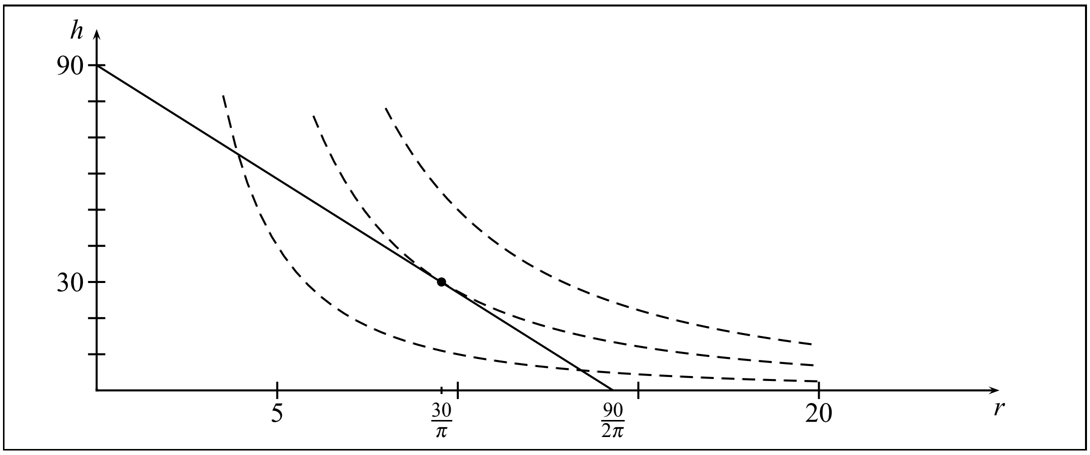
$$\pi r + 2\pi r - 90 = 0 \Longleftrightarrow 3\pi r - 90 = 0 \Longleftrightarrow 3\pi r = 90 \Longleftrightarrow r = \frac{30}{\pi}$$

$$h = \pi r = 30 \qquad \text{und} \qquad \lambda = -\pi r^2 = -\frac{30^2}{\pi} = -\frac{900}{\pi}.$$

3. Das maximale Volumen ist

$$V(r,h) = \pi r^2 h = \pi \frac{30^2}{\pi^2} 30 = \frac{30^3}{\pi}.$$

Es folgt die graphische Darstellung der Isoquanten $V = c$ und der Restriktionsgeraden.



Je größer der Wert der Funktion $V(r,h)$ ist, desto weiter außen liegt die zugehörige Isoquante. Nur die Isoquanten, die mit dem Dreieck mindestens einen Punkt gemeinsam haben, stellen zulässige Lösungen dar.

Von denen gehört die am weitesten außen liegende zum Maximalwert der Funktion; sie berührt die Restriktionsgerade. Der Berührpunkt $(r,h) = (\frac{30}{\pi}, 30)$ liefert die gesuchte Maximalstelle.

6. Lineare Gleichungssysteme

Es ist üblich, lineare Gleichungen in einer normierten Form zu schreiben.

Lineare Gleichung in einer Variablen:

$$\begin{aligned} 3x+5-7x &= 19-8x-11-4x \\ (3-7+8+4)x &= 19-11-5 \\ 8x &= 3 \end{aligned}$$

Lineare Gleichung in zwei Variablen:

$$\begin{aligned} 2x+3-y &= 6y-2-3x \\ (2+3)x+(-1-6)y &= -2-3 \\ 5x-7y &= -5 \end{aligned}$$

Lineare Gleichungen in n Variablen $(x_1,\ldots,x_n)$ schreiben wir in der Form

$$a_1x_1 \quad + \quad a_2x_2 \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_nx_n \quad = \quad b.$$

Die a_i und b sind konstante, reelle Zahlen und heißen *Koeffizienten*.

Wenn die Variablen $(x_1,\ldots,x_n)$ gleichzeitig in mehrere Gleichungen eingesetzt werden sollen, spricht man von einem *linearen Gleichungssystem*.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Die Koeffizienten a_{zs} haben zwei Indizes, der erste bezeichnet die Gleichung oder *Zeile* , während der zweite Index die Variable oder *Spalte* kennzeichnet.

Die Zahl der Gleichungen m kann gleich der Zahl der Variablen n sein, aber auch kleiner oder größer.

Die n-Tupel $(x_1,\ldots,x_n)$, die alle m Gleichungen erfüllen, bilden die *Lösungsmenge* des Gleichungssystems.

Dieses Kapitel stellt ein Verfahren vor, nach dem die Lösungsmenge für jedes lineare Gleichungssystem konstruiert werden kann.

6.1 Gaußsches Verfahren

6.1.1 Begründung des Verfahrens

Wir lösen das folgende System und entwickeln die wesentlichen Schritte des Verfahrens zunächst in der vollständigen Schreibweise und danach in einer kompakten Notation.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 7y & - & 5z & = & 19 \\ 3x & + & 6y & - & 2z & = & 28 \\ 4x & + & 12y & - & 8z & = & 36 \end{array}$$

Dividieren wir die dritte Gleichung auf beiden Seiten durch 4 und vertauschen sie mit der ersten Gleichung, ändert sich die Lösungsmenge nicht.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 2z & = & 9 \\ 3x & + & 6y & - & 2z & = & 28 \\ 2x & + & 7y & - & 5z & = & 19 \end{array}$$

Wir lösen die erste Gleichung nach x und setzen den Term in die beiden anderen Gleichungen für x ein.

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 9-3y+2z \\ 3(9-3y+2z) & + & 6y & - & 2z & = & 28 \\ 2(9-3y+2z) & + & 7y & - & 5z & = & 19 \end{array}$$

Die Varable x ist damit aus den beiden letzten Gleichungen eliminiert. Wir fassen nach den Variablen y,z zusammen. In der ersten Gleichung schreiben wir die Variablen wieder links.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & - & 2z & = & 9 \\ 3\cdot 9 & -3\cdot 3y & +3\cdot 2z & +6y & -2z & = & 28 \\ 2\cdot 9 & -2\cdot 3y & +2\cdot 2z & +7y & -5z & = & 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & - & 2z & = & 9 \\ & & (6-3\cdot 3)y & - & (2-3\cdot 2)z & = & 28-3\cdot 9 \\ & & (7-2\cdot 3)y & - & (5-2\cdot 2)z & = & 19-2\cdot 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & - & 2z & = & 9 \\ & & -3y & + & 4z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}$$

Dieses Ergebnis können wir viel einfacher herstellen, indem wir das Dreifache der ersten Gleichung von der zweiten Gleichung subtrahieren und entsprechend das Vierfache von der dritten Gleichung.

> Die *Addition eines Vielfachen einer Zeile* zu einer anderen ändert die Lösungsmenge nicht, ist also eine Äquivalenzumformung des Gleichungssystems.
> Wir wählen das Vielfache so, dass wir Variable eliminieren.

Im letzten System bilden die beiden letzten Gleichungen ein System mit nur zwei Variablen. Wir werden darin aus einer Gleichung eine Variable eliminieren. Dazu vertauschen wir zunächst die

Zeilen zwei und drei.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 2z & = & 9 \\ & & y & - & z & = & 1 \\ & & -3y & + & 4z & = & 1 \end{array}$$

Addition des 3-Fachen der zweiten Zeile zur dritten

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 2z & = & 9 \\ & & y & - & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 4 \end{array}$$

Wir elimimieren z aus den ersten beiden Gleichungen, indem wir das Einfache bzw. das Doppelte der dritten Zeile addieren.

$$\begin{array}{rcrrcr} x & + & 3y & & = & 17 \\ & & y & & = & 5 \\ & & & z & = & 4 \end{array}$$

Wir subtrahieren das Dreifache der zweiten Zeile von der ersten.

$$\begin{array}{rcrrcr} x & & & & = & 2 \\ & & y & & = & 5 \\ & & & z & = & 4 \end{array}$$

Aus diesem System ist die Lösungsmenge unmittelbar abzulesen, sie enthält als einziges Element das Zahlentripel $(x,y,z) = (2;5;4)$.

6.1.2 Das Tableau

Ein Gleichungssystem ist allein durch seine Koeffizienten bestimmt und oben haben wir nur mit ihnen gerechnet. Der Schreibaufwand wird erheblich verringert, wenn wir nur die Koeffizienten notieren.

Dazu schreiben wir das Gleichungssystem in einem sogenannten *Tableau* auf. Die Variablennamen sind nur einmal über ihrer Spalte notiert und die Additions- und Gleichheitszeichen entfallen.

Für das oben behandelte System

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 7y & - & 5z & = & 19 \\ 3x & + & 6y & - & 2z & = & 28 \\ 4x & + & 12y & - & 8z & = & 36 \end{array}$$

ergibt sich dabei das folgende Tableau.

Rechts notieren wir die Operationen, wie Zeilentausch, Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten und Addition des Vielfachen einer Zeile.

Das Verfahren besteht darin, unter dem markierten Element Nullen zu erzeugen.

$$\begin{array}{rrrrr} x & y & z & b & \\ \hline 2 & 7 & -5 & 19 & I \leftrightarrow III \\ 3 & 6 & -2 & 28 & \\ 4 & 12 & -8 & 36 & \mid :4 \\ \hline \boxed{1} & 3 & -2 & 9 & \\ 3 & 6 & -2 & 28 & \mid -3I \\ 2 & 7 & -5 & 19 & \mid -2I \\ \hline 1 & 3 & -2 & 9 & \\ 0 & -3 & 4 & 1 & II \leftrightarrow III \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 9 & \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & \\ 0 & -3 & 4 & 1 & \mid +3II \\ \hline 1 & 3 & -2 & 9 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \end{array}$$

Hier ist eine *Stufenform* erreicht. Absteigend enthalten die Gleichungen jeweils eine Variable weniger als die vorhergehende. Aus der letzten Zeile lesen wir ab, dass $z = 1$. Wir werden also z in die zweite und erste Gleichung einsetzen, indem wir die dritte Zeile zur zweiten addieren und das Doppelte der dritten zur ersten Zeile.

Von jetzt ab erzeugen wir oberhalb des markierten Elements Nullen in der Spalte.

x	y	z	b	
1	3	-2	9	$\mid +2III$
0	1	-1	1	$\mid +III$
0	0	$\boxed{1}$	4	
1	3	0	17	$\mid -3II$
0	$\boxed{1}$	0	5	
0	0	1	4	
1	0	0	2	
0	1	0	5	
0	0	1	4	

Aus diesem Endtableau in *Diagonalform* lesen wir die Lösung $(x,y,z) = (2;5;4)$ ab.

Zur Probe setzen wir die Werte in das Gleichungssystem ein.

$$\begin{array}{ccccccccc}
2\cdot 2 & + & 7\cdot 5 & - & 5\cdot 4 & = & 19 & \surd \\
3\cdot 2 & + & 6\cdot 5 & - & 2\cdot 4 & = & 28 & \surd \\
4\cdot 2 & + & 12\cdot 5 & - & 8\cdot 4 & = & 36 & \surd
\end{array}$$

6.1.3 Lösungsmenge mit mehr als einem Element

In dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 5x_2 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7 \end{array}$$

ist die dritte Gleichung die Summe der ersten beiden, sie ist überflüssig. Jedes Untersystem mit nur zwei der Gleichungen hat dieselbe Lösungsmenge.

Die Abhängigkeit der Gleichungen stellen wir auch mit dem Gaußschen Algorithmus fest, und zwar wenn eine Zeile erzeugt wird, die nur Nullen enthält.

x_1	x_2	x_3	b	
$\boxed{2}$	5	-3	4	$\mid :2$
3	-2	4	3	$\mid -3/2I$
5	3	1	7	$\mid -5/2I$
1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	
0	$\boxed{-\frac{19}{2}}$	$\frac{17}{2}$	-3	
0	$-\frac{19}{2}$	$\frac{17}{2}$	-3	$\mid -II$
1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	
0	$-\frac{19}{2}$	$\frac{17}{2}$	-3	
0	0	0	0	
1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	$\mid -5/19II$
0	$-\frac{19}{2}$	$\frac{17}{2}$	-3	
1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	$\mid -5/19II$
0	$\boxed{-\frac{19}{2}}$	$\frac{17}{2}$	-3	$\mid \cdot(-2/19)$
1	0	$\frac{28}{38}$	$\frac{61}{38}$	
0	1	$-\frac{17}{19}$	$\frac{3}{19}$	

Die Lösung:

$$x_1 = \frac{61}{38} - \frac{28}{38}s \qquad x_2 = \frac{3}{19} + \frac{17}{19}s \qquad x_3 = s \qquad \text{mit} \quad s \in \mathbb{R}$$

6.1.4 Leere Lösungsmenge

Zu dem System

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 7x_2 &= 9 \\
-6x_1 + 14x_2 &= 8
\end{aligned}
$$

gibt es kein Zahlenpaar (x_1,x_2) , das beide Gleichungen erfüllt, weil die linke Seite der zweiten das (-2) -Fache der ersten linken Seite ist, aber auf der rechten Seite $8 \neq (-2)\cdot 9$ gilt.

x_1	x_2	b	
3	-7	9	
-6	14	8	$\vert +2I$
3	-7	9	
0	0	26	

Die zweite Zeile enthält die falsche Aussage $0 = 26$ und das bedeutet hier, dass kein Zahlenpaar (x_1,x_2) die Gleichung

$$0x_1 + 0x_2 = 26$$

erfüllt. Wir sagen: die *Lösungsmenge ist leer* und schreiben kurz $\mathbb{L} = \emptyset$.

Beispiel 1: In dem Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\
x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= r \\
-x_1 + x_2 - x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

ist r eine beliebige Zahl. Wir untersuchen, wie die Lösungsmenge von r abhängt.

x_1	x_2	x_3	b	
$\boxed{1}$	2	3	5	
1	5	5	r	$\vert -I$
-1	1	-1	3	$\vert +I$
1	2	3	5	
0	$\boxed{3}$	2	$r-5$	
0	3	2	8	$\vert -II$
1	2	3	5	
0	3	2	$r-5$	
0	0	0	$13-r$	

Für $13 - r \neq 0$, also $r \neq 13$, gilt $\mathbb{L} = \emptyset$.

Für $r = 13$ fahren wir ohne die dritte Zeile fort. Es bleibt ein System mit zwei Gleichungen für drei Variable. Eine Variable kann beliebige Werte annehmen.Wir wählen mit $s = x_3$, $s \in \mathbb{R}$ den Parameter und lösen nach x_1, x_2 auf.

1	2	3	5	$\mid -\frac{2}{3}II$
0	$\boxed{3}$	2	8	$\mid :3$
1	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{3} - \frac{5}{3}s \\
x_2 &= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}s \\
x_3 &= s \quad \text{mit} \quad s \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

6.2 Matrizen

Ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & {}_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & {}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

von Zahlen heißt *Matrix*. Matrizen werden mit großen Buchstaben bezeichnet.

Das *Element* a_{kl} steht in der k-ten *Zeile* und l-ten *Spalte*. Der erste *Index* ist die Zeilennummer und der zweite bezeichnet die Spalte.

6.2.1 Matrizen und Gleichungssysteme

Beispiel 2: Ein Gleichungssystem wird mit der Koeffizientenmatrix und zwei einspaltigen Matrizen für die Variablen und die rechten Seiten folgendermaßen notiert.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & 3y & + & z & = & 17 \\ -2x & & & + & 2z & = & 23 \end{array}$$

in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 23 \end{pmatrix} \quad \text{oder kurz} \quad A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Einspaltige Matrizen schreibt man häufig in kleinen Buchstaben mit Pfeil und nennt sie *Vektoren*.

Die mit dem Multiplikationspunkt notierte Verknüpfung muss also bedeuten, dass jede Zeile der Koeffizientenmatrix mit der Variablenmatrix durch die Operation

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \end{pmatrix} = (b_i) \quad \text{für} \quad i = 1;2$$

die i-te Gleichung erzeugt: Jedes Element der Zeile wird mit dem entsprechenden Element der Spalte multipliziert und anschließend werden diese Produkte addiert. Das Ergebnis ist die linke Seite der Gleichung, deren rechte Seite b_i ist.

Diese Operation ist genau dann möglich, wenn die Spaltenzahl der Koeffizientenmatrix A gleich der Zeilenzahl der Variablenmatrix $\vec{x}$ ist.

Beispiel 3: Sie kaufen n Waren zu den Preisen $(p_1, \ldots, p_n)$ in den Mengen $(q_1, \ldots, q_n)$, dann berechnen Sie den zu zahlenden Betrag r wie oben.

$$p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_1q_1 = r$$

6.3 Rechnen mit Matrizen

6.3.1 Matrizenprodukt

Das Matrizenprodukt ist auch definiert, wenn der rechte Faktor eine Matrix mit mehr als einer Spalte ist.

Matrizenprodukt $AB = C$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} \cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \boxed{a_{i1}} \cdots \boxed{a_{ik}} \cdots \boxed{a_{in}} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mk} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \cdots \boxed{b_{1j}} \cdots b_{1r} \\ \vdots \\ b_{i1} \cdots \boxed{b_{ij}} \cdots b_{ir} \\ \vdots \\ b_{n1} \cdots \boxed{b_{nj}} \cdots b_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \cdots c_{1j} \cdots c_{1r} \\ \vdots \qquad \vdots \\ c_{i1} \cdots \boxed{c_{ij}} \cdots c_{ir} \\ \vdots \qquad \vdots \\ c_{m1} \cdots c_{mj} \cdots c_{mr} \end{pmatrix}$$

$$a_{i1}b_{1j} \quad + \quad a_{i2}b_{2j} \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_{in}b_{nj} \quad = \quad c_{ij}$$

Dieses Produkt ist genau dann definiert, wenn A soviel Spalten hat, wie B Zeilen besitzt. Das Ergebnis C „erbt“ von A die Zeilenzahl m und von B die Spaltenzahl r.

Beispiel 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 17 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -3 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie, dass die Multiplikation mit vertauschten Rollen nicht definiert ist!

Die Reihenfolge der Faktoren in Matrizenprodukt kann in der Regel nicht vertauscht werden.

Nur für *quadratische* Matrizen A und B sind beide Produkte AB und BA definiert, aber auch hier gilt in der Regel

$$AB \neq BA.$$

Beispiel 5:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -45 & -15 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass das Produkt zweier Matrizen die *Nullmatrix* liefern kann, obwohl beide Faktoren keine Nullmatrizen sind.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 27 \\ -9 & 32 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 27 \\ -9 & 32 \end{pmatrix}$$

Hier gilt die Gleichung

$$AB = BA.$$

6.3.2 Weitere Operationen mit Matrizen

> Eine Matrix wird mit einer Zahl multipliziert, indem jedes Element multipliziert wird.
> Zwei Matrizen gleichen Typs werden elementweise addiert.

Beispiel 6:

$$\sqrt{5}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{5} & 7\sqrt{5} \\ -7\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 4 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

6.3.3 Rechenregeln

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC) && \text{(assoziativ)} \\ A(B+C) &= AB+AC && \text{(distributiv)} \\ (A+B)C &= AC+BC \\ (A+B)+C &= A+(B+C) \\ A+B &= B+A && \text{(kommutativ)} \\ r(A+B) &= rA+rB && \text{(distributiv)} \\ (r+s)A &= rA+sA \end{aligned}$$

Beispiel 7: Ein Markt sei unter drei konkurrierenden Produkten P_k $(k = 1,2,3)$ aufgeteilt.

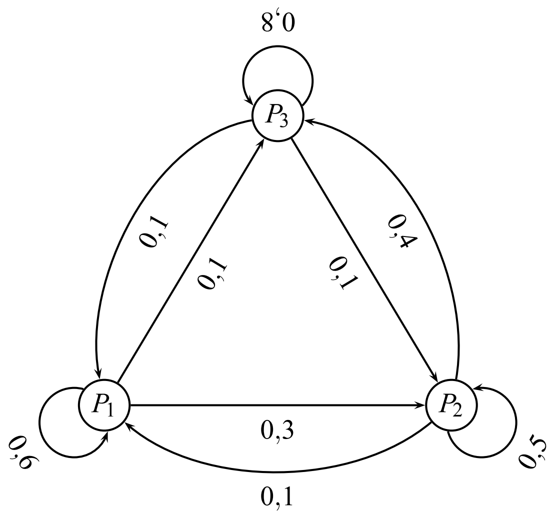
Der Vektor $(0{,}5\,;\,0{,}4\,;\,0{,}1)$ gibt die Marktanteile der Produkte zum Zeitpunkt t an.

Die Käuferfluktuation in der Zeitspanne von t bis $t+1$ ist durch die folgende Tabelle gegeben

		nach		
		P_1	P_2	P_3
	P_1	0,6	0,3	0,1
von	P_2	0,1	0,5	0,4
	P_3	0,1	0,1	0,8

a) Berechnen Sie die Marktanteile zu den Zeitpunkten $t+1$ und $t+2$!

b) Gibt es eine stationäre Verteilung, d.h. eine Aufteilung des Marktes, die trotz der Käuferfluktuation wieder zu denselben Marktanteilen für jedes Produkt führt? Berechnen Sie sie gegebenenfalls!



Der Graph stellt die anteilige Fluktuation dar und gibt dieselbe Information wie die vorgegebene Tabelle.

a) Sei $\vec{x}^T(t) = (0,5;0,4;0,1)$ der Marktanteilvektor zum Zeitpunkt t .
Damit werden die Marktanteile zum Zeitpunkt $t+1$ nach der folgenden Bilanz berechnet.

$$0{,}6x_1(t) + 0{,}1x_2(t) + 0{,}1x_3(t) = x_1(t+1)$$

$$0{,}3x_1(t) + 0{,}5x_2(t) + 0{,}1x_3(t) = x_2(t+1)$$

$$0{,}1x_1(t) + 0{,}4x_2(t) + 0{,}8x_3(t) = x_3(t+1)$$

$$A\vec{x}(t) = \vec{x}(t+1)$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}36 \\ 0{,}29 \end{pmatrix}$$

Bei unveränderten Fluktuationsanteilen gilt $A\vec{x}(t+1) = \vec{x}(t+2)$

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}36 \\ 0{,}29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}275 \\ 0{,}314 \\ 0{,}411 \end{pmatrix}$$

Man hätte auch wegen $\vec{x}(t+2) = A\vec{x}(t+1) = A(A\vec{x}(t)) = A^2\vec{x}$ zunächst

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}34 & 0{,}26 \\ 0{,}15 & 0{,}32 & 0{,}35 \\ 0{,}15 & 0{,}16 & 0{,}69 \end{pmatrix}$$

berechnen können und mit $A^2\vec{x}(t)$ die Käuferanteile zum Zeitpunkt $t+2$ bestimmen können.

b) Wenn $\vec{x}(t+1) = \vec{x}(t)$ gilt, heißt die Marktverteilung *stationär*.

In diesem Fall ist $\vec{x}$ Lösung des folgenden Gleichungssystems.

$$A\vec{x} = \vec{x} \Longleftrightarrow A\vec{x} - \vec{x} = \vec{o} \Longleftrightarrow (A-E)\vec{x} = \vec{o}$$

Hier bezeichnet E die *Einheitsmatrix* der Ordnung drei. Es ist eine quadratische Matrix, deren Diagonalelemente 1 sind, während die anderen Elemente null sind.

Eine Lösung dieses homogenen Gleichungssystems gibt die Anfangsverteilung, die trotz Fluktuation unverändert bleibt.

$$\begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & -0{,}2 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{o}$$

Da die dritte Matrixzeile die negative Summe der ersten beiden ist, hat das System eine Lösung ungleich $\vec{o}$.

Die Ergebnisspalte enthält nur Nullen und kann weggelassen werden. Nach Vertauschung der ersten und dritten Zeilen und Multiplikation mit 10, formen wir so um, dass x_1, x_2 in Abhängigkeit von der frei zu wählenden Variablen x_3 bestimmt werden.

x_1	x_2	x_3
$\boxed{1}$	4	-2
3	-5	1
-4	1	1
1	4	-2
0	$\boxed{-17}$	7
0	17	-7
1	4	-2
0	$\boxed{17}$	-7
1	0	$-\frac{6}{17}$
0	1	$-\frac{7}{17}$

Sei $r := x_3$ als Parameter gewählt:

$$x_1 = \frac{6}{17}r \quad , \quad x_2 = \frac{7}{17}r \quad , \quad x_3 = r$$

Der Markt ist vollständig unter den drei Produkten aufgeteilt. Diese Bedingung legt den Wert von r fest.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \text{also} \quad \frac{30}{17}r = 1 \quad \text{d.h.} \quad r = \frac{17}{30}$$

Damit ist die Verteilung

$$\vec{x} = \frac{17}{30}\begin{pmatrix} \frac{6}{17} \\ \frac{7}{17} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}23 \\ 0{,}57 \end{pmatrix}$$

eine stationäre Marktverteilung.

6.3.4 Inverse Matrix

Matrizen mit n Zeilen und n Spalten heißen *quadratisch*.

Für quadratische Matrizen der Ordnung n sind die beiden Produkte

$$AB \qquad \text{und} \qquad \mathrm{BA}$$

definiert und die Ergebnisse sind wieder Matrizen desselben Typs.

Die $n \times n$ Matrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit 1 auf der Diagonalen und sonst 0 heißt *Einheitsmatrix* der Ordnung n .

Für jede Matrix A mit n Zeilen gilt

$$EA = A.$$

Für jede Matrix A mit n Spalten gilt

$$AE = A.$$

Für jede $n \times n$ -Matrix A gilt

$$EA = AE = A.$$

Beispiel 8: Rechnen Sie im Kopf nach!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix bildet die Matrix, mit der sie multipliziert wird, auf sich selbst ab. Deshalb heißt sie auch die *identische Abbildung* oder die *Identität*.

Die Lösungen X und Y der Matrizengleichungen

$$AX = E \qquad \text{und} \qquad YA = E,$$

falls sie existieren, sind identisch $X = Y$ und heißen die *Inverse* der Matrix A. Diese Matrix wird als A^{-1} geschrieben.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Beispiel 9: Die beiden links stehenden Matrizen sind zueinander invers.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.3.5 Berechnung der Inversen

Die Inverse der Matrix A ist die Lösung des Gleichungssystems

$$AX = E.$$

Beispiel 10: Wir berechnen die Inverse zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc|cccr}
\boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & |-2I \\
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & |-3I \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & |+0,5II \\
0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & |-III \\
0 & 0 & \boxed{-2} & -3 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} &
\end{array}$$

Rechts lesen wir die Inverse ab.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ein Gleichungssystem mit der Matrix A können wir nun bequem mit Hilfe der Inversen A^{-1} lösen.

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 \\ 4+3-6 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 11: Das Verfahren stellt auch fest, dass keine Inverse existiert.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Inverse.

$$\begin{array}{rr|rr} \boxed{2} & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Die letze Zeile zeigt, dass die Lösungsmenge leer ist, d.h. die Matrix A hat keine Inverse.

7. Lineare Optimierung

Dieses Kapitel stellt spezielle Extremalaufgaben vor. Eine lineare Funktion in mehreren Variablen ist zu maximieren oder zu minimieren, wobei die Variablen gewisse lineare Ungleichungen erfüllen müssen.

1. Eine lineare Funktion der n Variablen $(x_1, \dots, x_n)$

$$z = f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

mit den Konstanten $(c_1, \dots, c_n)$ ist zu maximieren. Diese Funktion heißt *Zielfunktion*.

2. Dabei sind die folgenden Ungleichungen zu erfüllen.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

Die Koeffizienten a_{jk} und b_j sind konstante Zahlen.

In diesem Zusammenhang wird jede Ungleichung *Restriktion* genannt. Ihre Zahl m übertrifft meistens die Zahl der Variablen n, sie kann aber auch kleiner oder gleich sein.

3. Darüberhinaus fordern wir, dass die Variablen nur *nicht-negative Werte* annehmen dürfen.

$$0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2, \dots, 0 \leq x_n$$

Die n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$, die alle m Restriktionen und die n Nichtnegativitätsbedingungen erfüllen, bilden die *zulässige Menge* oder den zulässigen Bereich des Problems.

Eine Aufgabe dieses Typs heißt *Lineares Programm*.

Im folgenden beschränken wir uns auf die grundlegende Darstellung von einfachen Aufgaben der linearen Optimierung.

7.1 Graphisches Verfahren

Lineare Programme mit nur zwei Variablen (x_1, x_2) können graphisch gelöst werden.

Eine Firma produziert die Düngemittel D1 und D2 in den drei Anlagen A1,A2 und A3. Die für jede Tonne benötigten Maschinenstunden, die Kapazität der Anlagen und Erlöse wie Kosten pro Tonne sind in der Tabelle angegeben.

Dünger	Zeitbedarf in den Anlagen in Stunden pro Tonne			Erlös Euro/t	Kosten Euro/t
	A1	A2	A3		
D1	4	1	1	6000	3000
D2	3	2	4	10000	2000
Kapazität	30	10	16		

Wieviele Tonnen der Düngemittel müssen hergestellt werden, um den größten Gewinn zu erzielen?

Seien x_1, x_2 die Mengen der Dünger D1 und D2 in Tonnen.

Die Gewinnfunktion ist

$$G(x_1, x_2) = (6\,000 - 3\,000)x_1 + (10\,000 - 2\,000)x_2 = 3\,000x_1 + 8\,000x_2.$$

Die Nichtnegativitätsbedingungen und die Restriktionen sind die folgenden Ungleichungen

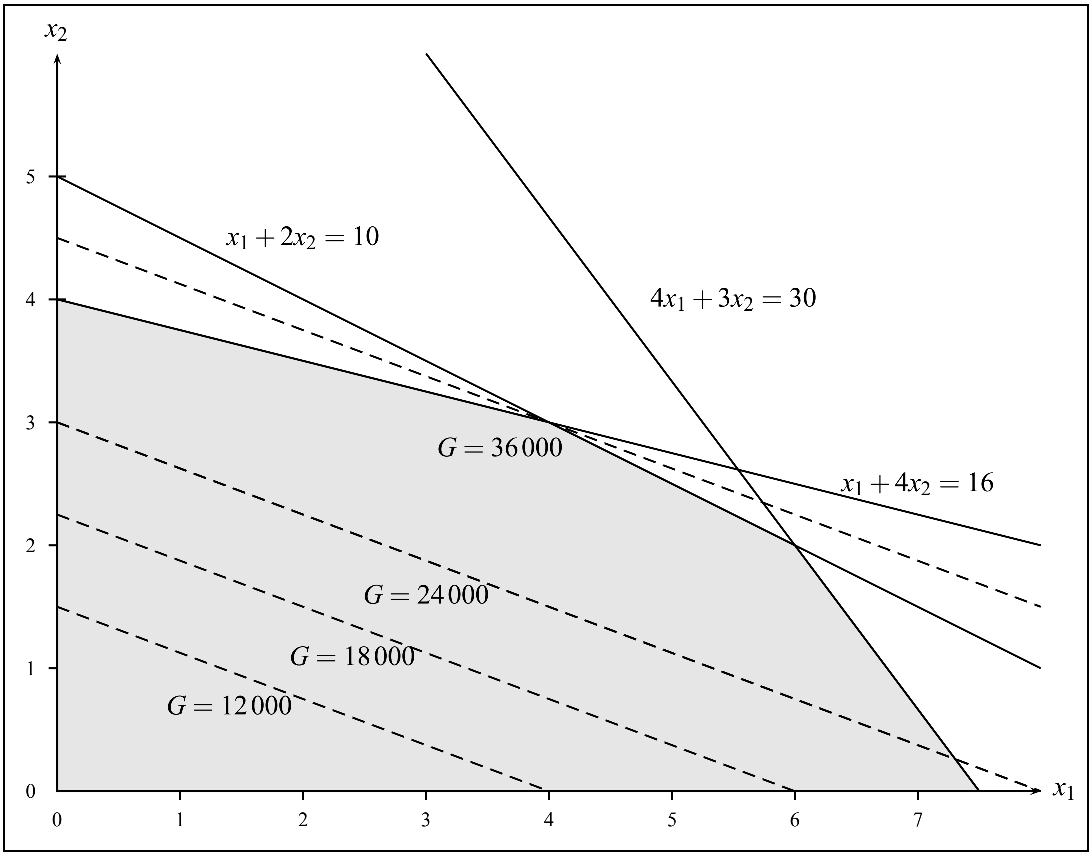
$$0 \leq x_1\,,\, 0 \leq x_2$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 16. \end{aligned}$$

Jede dieser Ungleichungen wird durch eine Halbebene dargestellt, deren Begrenzungsgerade durch die entsprechende Gleichung bestimmt ist.

Diese fünf Geraden begrenzen ein Fünfeck.

Die Linien, auf denen die Zielfunktion $G(x_1, x_2)$ jeweils konstant ist – die Isoquanten –, sind eine Schar paralleler Geraden, die *Zielgeraden*.



Eine Zielgerade ist zulässig, wenn sie mit dem Fünfeck – dem zulässigen Bereich – Punkte gemeinsam hat. Eine unter ihnen geht nur durch eine Ecke, den Schnittpunkt $(x_1, x_2) = (4, 3)$ der Geraden zu

$$x_1 + 2x_2 = 10 \quad \text{und} \quad x_1 + 4x_2 = 16.$$

Geraden zu

$$x_1 + 2x_2 = 10 \quad \text{und} \quad x_1 + 4x_2 = 16.$$

Es ist die Zielgerade zu dem größten Wert der Zielfunktion.

Das Maximum wird in der Ecke $(x_1, x_2) = (4, 3)$ angenommen und dort gilt

$$G(4,3) = 3\,000 \cdot 4 + 8\,000 \cdot 3 = 36\,000.$$

Es müssen 4 Tonnen von D1 und 3 Tonnen von D2 produziert werden, um den größtmöglichen Gewinn zu erzielen. Der beträgt 36 000 Euro.

Bemerkung: Das Minimum wird im Nullpunkt – also einer Ecke – angenommen.

Die Extremwerte eines linearen Programms werden in Ecken des zulässigen Bereichs angenommen.

7.2 Simplexverfahren

Die Tatsache, dass die Lösung eines linearen Programms in mindestens einer Ecke des zulässigen Bereichs angenommen wird, ist auch die Grundlage des Simplexverfahrens.

Ausgehend von einer bekannten Ecke – z.B. dem Nullpunkt – geht man entlang einer Kante zu einer benachbarten Ecke, in der die Zielfunktion eine größeren Wert annimmt.

Im nächsten Schritt geht man von dort zu einer Nachbarecke mit größerem Funktionswert.

Auf diese Weise fährt man fort, bis eine Ecke erreicht ist, die keinen Nachbarn mit größerem Funktionswert hat.

Damit ist die Maximalecke erreicht.
Wenn eine Nachbarecke zu demselben Funktionswert führt, ist jeder Punkt der Kante Maximalpunkt.

Begründung des Simplexverfahrens

Hier werden die *Rechnungen* hergeleitet, die dieses Iterationverfahren ermöglichen.

Das Lineare Programm soll gelöst werden.

$$\begin{aligned} 0 &\le x_1, x_2 \\ 2x_1 + x_2 &\le 12 \\ x_2 &\le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 16 \\ 6x_1 + 4x_2 & \quad \text{ist zu maximieren.} \end{aligned}$$

Zunächst werden die Ungleichungen durch die Addition je einer neuen Variablen s_j in Gleichungen überführt. Die Problemvariablen x_1, x_2 heißen primale Variablen und die hinzugefügten duale Variablen oder auch Schlupfvariablen. Das Lineare Programm erhält dann die Form.

$$
\begin{aligned}
0 \le x_i, \quad 0 \le s_j& \\
2x_1 + x_2 + s_1 &= 12 \\
x_2 + s_2 &= 4 \\
2x_1 + 3x_2 + s_3 &= 16 \\
6x_1 + 4x_2 &\quad \text{ist zu maximieren}
\end{aligned}
$$

Die Lösungsmenge dieser drei Gleichungen für fünf Variablen enthält zwei Parameter und die drei Gleichungen legen die übrigen Variablen fest. Die linke Schreibweise des Gleichungssystems unterscheidet zwischen Parametern und den restlichen Variablen. Das rechte System hat die für die Elimination übliche Form. Wir führen noch die Variable z für den Wert der Zielfunktion und eine Konstante c für ihren Anfangswert, der häufig Null ist, ein.

$$\begin{array}{rl}
\multicolumn{2}{c}{0 \le x_i, s_j} \\
\hline
s_1 = 12 - 2x_1 - x_2 & (1) \\
s_2 = 4 - x_2 & (2) \\
s_3 = 16 - 2x_1 - 3x_2 & (3) \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{z = c + 6x_1 + 4x_2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0 \le x_i, s_j \\
\hline
2x_1 + x_2 + s_1 = 12 \\
x_2 + s_2 = 4 \\
2x_1 + 3x_2 + s_3 = 16 \\
\hline
z - 6x_1 - 4x_2 = c
\end{array}$$

Die lineare Zielfunktion $Z(x_1,x_2) = c + 6x_1 + 4x_2$ nimmt ihre Extremwerte in den Ecken des zulässigen Bereichs an. Im folgenden Algorithmus werden für die Variablen solche Werte gewählt, dass die primalen Variablen die Koordinaten eines Eckpunktes sind.

Das Zahlenpaar $(x_1,x_2) = (0;0)$ stellt die Koordinaten des Koordinatenursprungs dar. Der ist Eckpunkt des zulässigen Bereichs. Damit gilt

$$(x_1,x_2,s_1,s_2,s_3,z) = (0;0;12;4;16;c).$$

Koeffizienten der Variablen x_1 und x_2 in der Zielfunktion sind positiv. Damit kann der Wert von z vergrößert werden, indem für x_1 oder x_2 statt 0 eine positive Zahl eingesetzt wird. Dabei müssen allerdings die Restriktionen beachtet werden.

Wir wählen x_1 und wollen ihm den größtmöglichen Wert zuweisen, während $x_2 = 0$ bleibt. Dazu lösen wir die Gleichungen nach x_1 auf und stellen fest, dass (1) den Wert 6 und (3) den Wert 8 zulässt. Wir müssen die stärkste Einschränkung beachten also die Gleichung (1) benutzen. Wir lösen sie nach x_1 auf und setzen das Ergebnis in die anderen Gleichungen ein.

$$\begin{array}{ll}
x_1 = 6 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}s_1 & (1) \\
s_2 = 4 - x_2 & (2) \\
s_3 = 4 - 2x_2 + s_1 & (3) \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{z = c + 36 + x_2 - 3s_1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}s_1 = 6 \\
x_2 + s_2 = 4 \\
2x_2 - s_1 + s_3 = 4 \\
\hline
z - x_2 + 3s_1 = c + 36
\end{array}$$

Die Werte aller Variablen sind

$$(x_1,x_2,s_1,s_2,s_3,z) = (6;0;0;4;4;c+36).$$

Um z weiter zu vergößern, muss x_2 einen positiven Wert annehmen. Die stärkste Restriktion ist durch (3) gegeben, danach ist der Wert 2 möglich. Wir lösen Gleichung (3) nach x_2 auf und setzen das Ergebnis in die anderen Gleichungen ein.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5 - \frac{3}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_3 && (1) \\
s_2 &= 2 - \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_3 && (2) \\
x_2 &= 2 + \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3 && (3)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_1 + \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_3 &= 5 \\
\frac{1}{2}s_1 + s_2 - \frac{1}{2}s_3 &= 2 \\
x_2 - \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_3 &= 2
\end{aligned}
$$

$$z = c + 38 - \frac{5}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3 \qquad z + \frac{5}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_3 = c + 38$$

Da die Koeffizienten der Variablen s_1, s_3 negativ sind, nimmt bei positiven Werten für s_1 oder s_3 der Wert von z ab. Wir haben daher das Maximum erreicht und es gilt

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, z) = (5; 2; 0; 2; 0; c + 38).$$

Im Simplextableau führen wir auf eine übersichtliche Art die Umformungen durch. Die Basisvariablen – ihr Wert ist ungleich Null– sind in der ersten Spalte notiert. Das Pivotelement ist gerahmt, Pivotspalte und -zeile sind durch Pfeile markiert. Hier wurde $c = 0$ gesetzt.

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	q	
s_1	$\boxed{2}$	1	1	0	0	12	6	$\Leftarrow$
s_2	0	1	0	1	0	4	–	
s_3	2	3	0	0	1	16	8	
z	-6	-4	0	0	0	0		
	$\Uparrow$							
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	6	12	
s_2	0	1	0	1	0	4	4	
s_3	0	$\boxed{2}$	-1	0	1	4	2	$\Leftarrow$
z	0	-1	3	0	0	36		
		$\Uparrow$						
x_1	1	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	5		
s_2	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2		
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2		
z	0	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	38		

Am Endtableau werden die Werte der Variablen abgelesen. Nichtbasisvariable haben den Wert Null.

Index

Ä
Änderungsrate, 64, 84
in Richtung, 88
mittlere, 89
relative, 73
Äquivalenzumformung, 22

A
Ableitung, 51
Grundfunktionen, 55
in Richtung, 88
partielle, 84
Regeln, 53
Abnahme
exponentielle, 70
Absolutbetrag, 19
Approximation
lineare, 59, 76, 89
Nullstellen, 76
Asymptote, 41

B
Binomialkoeffizient, 16
Binomische Formeln, 15
Bruch, 12

D
Differential, 61
totales, 89
Diskriminante, 93

E
e-Funktion, 48
Elastizität, 74
Eulersche Zahl, 48
Exponentialfunktion, 45
Extremum, 62, 91
absolutes, 64
relatives, 63
Restriktionen, 97

F
Fakultät, 16
Funktion, 31
Betrags-, 53
differenzierbare, 51
ganze, 38
Grad, 38
Nullstellen, 39
gebrochene, 40
Graph, 31, 80
lineare, 34, 59, 89
n Variable, 80
Nutzen-, 98
periodische, 50
quadratische, 35
ungerade, 70

G
Gaußsches Verfahren, 107
Tableau, 109
Geradengleichung, 33
Grenzwert, 51, 84

H
Höhenlinie, 83
Halbwertzeit, 73

I
Isoquante, 83, 103, 105

K
Käuferfluktuation, 119
Koeffizient, 38, 106
Koordinate, 8
Koordinaten
-achsen, 19
-system, 19
-ursprung, 19
Abszisse, 19
Ordinate, 19
Krümmungsrichtung, 65

L
Lagrangesche Funktion, 101, 105
Lagrangescher Multiplikator, 101
Lineare Optimierung
lineares Programm, 129
Pivotelement, 132
Schlupfvariable, 130
Lineare Optimierung, 126
Problemvariable, 130
Restriktionen, 128
Simplextableau, 132
Zielfunktion, 131

Lineares Gleichungssystem, 106
  Äquivalenzumformung, 108
  Abhängigkeit der Gleichungen, 112
  Diagonalform, 111
  Koeffizienten, 106, 109
  Lösungsmenge, 106
  Lösungsverfahren, 107
  Leere Lösungsmenge, 113
  Matrix, 115
  Stufenform, 110
  Tableau, 109
Lineares Programm, 126
  zulässige Menge, 126
Logarithmus
  dekadischer, 47
  natürlicher, 48
Logarithmusfunktion, 47

M
Matrix, 115
  Einheits-, 121, 122
  Inverse, 123
  Lineares Gleichungssystem, 115
  Null-, 118
  quadratische, 117, 122
  Rechenregeln, 118
Matrizenprodukt, 115, 116
Maximum, 62
  lokales, 66, 93
Minimum, 62
  lokales, 66, 93
Monotonie, 65

N
Newtons
  Iterationsverfahren, 76
Nichtnegativitätsbedingung, 126
Nullstellen
  Funktion, 76
Nutzenfunktion, 98, 103

P
Parabel, 27, 35
  Scheitelpunkt, 35
  Koordinaten, 37
Pascalsches Dreieck, 18
Periode
  Dezimalzahl, 10
Pol, 41
Polynom, 38
  -division, 39
  Linearfaktor, 40
  Nullstellen, 39
Potenz
  Basis, 13
  Exponent, 13
Potenzfunktion, 42
Punktsymmetrie, 69
Pythagoras
  Satz, 20

R
Restriktion, 96, 126

S
Sattelpunkt, 96
stationäre Stelle, 65, 91
  Art, 67, 92
stationäre Verteilung, 119
Steigung, 450
  Gerade, 34
  Strahlensatz, 32

T
Tangente
  an Funktionsfläche, 87
  an Funktionsgraph, 58
  Gleichung, 58
Tangentialebene, 88, 89
  Gleichung, 89
  Umkehrfunktion, 47, 48
  Potenzfunktion, 43
  Tangens, 50

V
Vektor, 115

W
Wachstum
  exponentielles, 45, 70
Wendepunkt, 68
Winkelfunktionen, 49
  Bogenmaß, 74
Wurzel, 14
Wurzelfunktion, 42

Z
Zahlen
  Dezimaldarstellung, 9
  ganze, 7
  irrationale, 9
  natürliche, 7
  rationale, 7
  reelle, 9

Zahlengerade, 8
Zahlenpaar, 18
Zerfallskonstante, 71
Zielfunktion, 126