Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Klausuren

Werner Schmidt; Dmitriy Stukalin

Werner Schmidt & Dmitriy Stukalin

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Klausuren

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I: Klausuren
First edition

ISBN 978-87-403-0377-3

Inhalt

Vorwort

Liebe Studentinnen und Studenten,

mit diesem ebook erfüllen wir einen häufig geäußerten Wunsch unserer Studierenden:

Hier sind Prüfungsklausuren der Jahre 2000 bis 2012 im Fach „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I“, die an der Universität Greifswald gestellt worden sind, gesammelt und mit ausführlichen Lösungen versehen.

Dies ist die Fortsetzung unseres Buches „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Grundlagen und Beispiele“ , das 2012 beim Bookboon-Verlag verlegt wurde.

Die Aufgaben orientieren sich an den Greifswalder Vorlesungen, die Inhalte der Vorlesungen anderer deutscher Universitäten sind jedoch ähnlich, daher dürfte das Buch für alle Studierende dieses Studienganges nützlich sein.

Die meisten Aufgaben gehören zur Analysis: Es werden Ungleichungen, Folgen, Funktionen, Ableitungen, Extremwertaufgaben, Integrale und Gewöhnliche Differentialgleichungen betrachtet. Eine andere Aufgabenklasse, die in den Lehrveranstaltungen behandelt wurden, sind lineare Gleichungen. Manchmal wurde auch die Matrizenrechnung im Wintersemester behandelt, dann kommen entsprechende Klausuraufgaben in den Prüfungen vor.

Wir haben uns auf die erste Klausur jeden Wintersemesters beschränkt (also keine Nachklausuren) und, falls die Klausur in zwei Versionen geschrieben wurde, jeweils die Version A ausgewählt.

Da die Vorlesungen von verschiedenen Wissenschaftlern gehalten wurden (Kugelmann, Schlosser, Schmidt, Oberdörfer), die auch die Klausuren stellten, haben wir uns bemüht, die Bezeichnungen zu vereinheitlichen.

Falls nicht anders angegeben, durften nichtprogrammierbare Taschenrechner benutzt werden, alle Klausuren sind aber ohne elektronische Werkzeuge lösbar! Die Klausuren waren in 120 Minuten zu lösen.

Für viele nützliche Hinweise danken wir Frau Heike Oberdörfer sehr herzlich. Sie ist auch Mitautorin des Lehrbuches „Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler“, das 2009 im Sardellus-Verlag Greifswald erschienen ist, ebenfalls mit durchgerechneten Lösungen zu Klausuren.

Unser Dank geht auch an Herrn Dr. Bauch, Frau Dipl.-Math. Boldt und Frau Dipl.-Math. Gerischer für die Hilfe bei der Erstellung der LATEX- Version des Manuskriptes.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg in Ihrem Studium und Freude bei der Prüfungsvorbereitung.

Werner H. Schmidt
Dmitriy J. Stukalin

Greifswald, Februar 2013

1 Klausur vom Februar 2000

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Lösungsmengen zu

a) $$-\frac{1}{2}|2x+1| \geq -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

b) $$\frac{2-x}{4+x} \geq \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie bzw. beweisen Sie die Nichtexistenz für

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n+n^2}{1+n-n^2},$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1},$$

c) $$\lim_{x\to 0} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } x < 0 \\ x-2 & \text{für } x > 0 \end{cases},$$

d) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{3x-3}.$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die 1. Ableitung von

a) $$f_1(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

b) $$f_2(x) = 3^{\sqrt{x}}$$

sowie (Punkt-) Elastizität und Wachstumsrate von

c) $$f_3(x) = \frac{x}{x-1}$$

d) In welchen Punkten hat f_3 die Elastizität 0 bzw. 1? Wie sind Elastizität und Wachstumsrate in x_0 allgemein definiert?

Aufgabe 4:

a) Wie sind die Begriffe globales (= absolutes) bzw. lokales (= relatives) Maximum definiert für eine Funktion f, definiert auf einem Intervall $[a, b]$? Wie berechnet man üblicherweise beides für eine auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion?

b) Man berechne mögliche Extremstellen von

$$g(x) = e^{x^3-3x}$$

auf $\mathbb{R}$ und entscheide auf Maximum bzw. Minimum. Welches ist das absolute Maximum bzw. Minimum von g auf $[-1, 3]$?

Aufgabe 5:

a) Unter welcher Voraussetzung an die Matrizen A, B ist ein Matrizenprodukt $A \cdot B$ definiert?

b) Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Welche der Matrizenprodukte $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$, $C \cdot A$, $B \cdot C$, $C \cdot B$, A^2, B^2, C^2, sind definiert (Begründung nach a)!)? Man berechne diese!

Aufgabe 6:

a) Man berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{1}{t}y + t^2 - t$$

für $t > 0$; man führe eine Probe durch!

b) Man löse das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + y - 2 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

Lösung zu Aufgabe 1 a:

(i) Wir betrachten zuerst den Fall $2x + 1 \geq 0$, also $x \geq -\frac{1}{2}$. Die Ungleichung geht über in eine ohne die Betragsfunktion:

$$-\frac{1}{2}(2x+1) \geq -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \quad \text{gdw.} \quad -x - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \quad \text{gdw.} \quad \frac{3}{4}x \leq 1.$$

Folglich muss $x \leq \frac{4}{3}$ gelten, also $\mathcal{L}_1 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$.

(ii) Für $x < -\frac{1}{2}$ gilt $|2x+1| = -(2x+1) = -2x - 1$ und die Ungleichung erhält die Form $-\frac{1}{2}(-2x-1) \geq -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$ gdw. $x + \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$ gdw. $\frac{5}{4}x \geq -2$.

Also muss $x \geq -\frac{8}{5}$ sein, demnach ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}_2 = \left[-\frac{8}{5}, -\frac{1}{2}\right)$.

Beide Fälle ergeben zusammen die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left[-\frac{8}{5}, \frac{4}{3}\right].$$

Lösung zu Aufgabe 1 b:

Die Brüche sind erklärt für $x \neq 1$ und $x \neq -4$.

Wir unterscheiden 3 Fälle: (i) $x < -4$, (ii) $-4 < x < 1$ und (iii) $x > 1$.

Im Fall (i) ist $x + 4 < 0$ und $1 - x > 0$, die Ungleichung ist gleichwertig zu
$(2-x)(1-x) \leq (1+x)(4+x)$, also zu $2 - x - 2x + x^2 \leq 4 + 5x + x^2$ gdw. $x \geq -\frac{1}{4}$.
Das ist wegen $x < -4$ unmöglich, es gilt $\mathcal{L}_1 = \emptyset$.

(ii) Es ist $x+4>0$ und $1-x>0$, daher muss $(2-x)(1-x) \geq (1+x)(4+x)$, also $x \leq -\frac{1}{4}$ gelten. Folglich ist $\mathcal{L}_2 = \left(-4, -\frac{1}{4}\right]$.

(iii) Für $x>1$ ist $1-x<0$ und $4+x>0$ und die Ungleichung ist wie im Fall (i) gleichbedeutend zu

$$x \geq -\frac{1}{4}.$$

Mithin ist die Lösungsmenge für den Fall (iii) $\mathcal{L}_3 = \left(1, \infty\right)$.

Wir fassen die Mengen $\mathcal{L}_2$ und $\mathcal{L}_3$ zusammen, es folgt

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 = \left(-4, -\frac{1}{4}\right] \cup \left(1, \infty\right).$$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Es ist

$$\frac{1+n+n^2}{1+n-n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{-1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weil $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ ist, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n+n^2}{1+n-n^2} = \frac{1}{-1} = -1.$$

b) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Folglich wird

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

c) Für $f(x)$ ist bei $x = 0$ der rechtsseitige Grenzwert -2, der linksseitige Grenzwert ist 2.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert hier folglich nicht.

d) Weil für alle $x \neq 1$ die Identität

$$\frac{x^2-1}{3x-1} = \frac{x-\frac{1}{x}}{3-\frac{1}{x}}$$

besteht und

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ ist,}$$

folgt für den gesuchten Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{3-\frac{1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} x - 0}{3-0} = \infty.$

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Für $f_1(x)$ ergibt sich mit Kettenregel und Produktregel

$$f_1'(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

b) Es ist $\ln f_2(x) = \sqrt{x} \ln 3$ und daher

$$\frac{d \ln f_2(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln 3.$$

Weil aber $\quad \frac{d \ln f_2}{dx} = \frac{df_2}{dx} \cdot f_2^{-1} \quad$ ist, folgt

$$f_2'(x) = f_2(x) \left[\frac{\ln 3}{2\sqrt{x}}\right] = \frac{\ln 3}{2\sqrt{x}} \cdot 3^{\sqrt{x}}.$$

c) Die Punktelastizität ist definiert als $\varepsilon_f(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$. In der Aufgabe ist $f_3(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Dann ist

$$f_3'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Die Punktelastizität ist folglich

$$\varepsilon_{f_3}(x) = -\frac{1}{x-1}.$$

Als Wachstumsrate $W(x)$ bezeichnet man die Größe $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. In unserer Aufgabe wird

$$W(x) = \frac{f_3'(x)}{f_3(x)} = -\frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x} = -\frac{1}{x(x-1)}.$$

d) $\varepsilon_{f_3}(x)$ hat für kein $x \in \mathbb{R}$ den Wert 0.

$$\varepsilon_{f_3}(x) = 1 \text{ gdw. } -\frac{1}{x-1} = 1 \text{ gdw. } x = 0.$$

Lösung zu Aufgabe 4:

Eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ hat in $\overline{x} \in [a,b]$ ein relatives Maximum genau dann, wenn eine Zahl $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(\overline{x}) \geq f(x) \text{ für alle } x \in [\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon] \cap [a,b] \text{ ist.}$$

f hat in $\overline{x} \in [a,b]$ ein absolutes (globales) Maximum, falls

$$f(\overline{x}) \geq f(x) \text{ für alle } x \in [a,b] \text{ ist.}$$

Bei einer differenzierbaren Funktion genügen relative Extrema $x \in (a,b)$ den notwendigen Bedingungen $f'(x) = 0$. Als globale Extrema sind alle $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$ und gegebenenfalls die Randwerte a und b durch Berechnen der Funktionswerte zu überprüfen.

b) Die Funktion $g(x) = e^{x^3 - 3x}$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert, stetig und stetig differenzierbar. Es ist nach der Kettenregel

$$g'(x) = (3x^2 - 3)e^{x^3-3x} = 3(x^2 - 1)e^{x^3-3x}.$$

Daher wird $g'(x) = 0$ genau dann, wenn $x^2 - 1 = 0$, also $x^2 = 1$ ist. Kritische Punkte sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Weil $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ ist, kann bei $x_1 = 1$ nur ein relatives Minimum und bei $x_2 = -1$ ein relatives Maximum vorliegen. Auf $[-1, 3]$ ist folglich das absolute Minimum bei $x_1 = 1$. Weil $g(3) = e^{27-9} = e^{18}$ und $g(1) = e^{-2}$ ist, wird das globale Maximum bei $x = 3$ angenommen.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) Das Produkt zweier Matrizen A und B ist definiert, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt, also z. B. A vom Typ $m \times n$ und B vom Typ $n \times p$ ist. Das Produkt $A \cdot B$ ist dann vom Typ $m \times p$.

b) Hier ist A vom Typ 2×2, B ist eine 2×3- und C eine 3×4-Matrix. Demzufolge können die Produkte $A \cdot B$, $B \cdot C$ und A^2 berechnet werden:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -14 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -7 & -9 & -5 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Die Matrix A nennt man auch selbstinvers, da $A = A^{-1}$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) Die Differentialgleichung liegt bereits in der allgemeinen Form vor, es ist

$$a(t) = \frac{1}{t} \qquad \text{und} \qquad b(t) = t^2 - t.$$

Folglich erhalten wir $A(t) = -\int t^{-1}dt = -\ln t$ und $B(t) = \int (t^2 - t)e^{\ln t}dt$. Wegen $e^{\ln t} = t$ ist also

$$B(t) = \int (t^3 - t^2)dt = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3,$$

woraus

$$y(t) = (\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3) \cdot e^{-\ln t} + C \cdot e^{-\ln t} = (\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3) \cdot t^{-1} + C \cdot t^{-1} = \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{3}t^2 + Ct^{-1}$$

mit $C \in \mathbb{R}$ beliebig folgt.

Probe: Es ist

$$y' = \frac{3}{4}t^2 - \frac{2}{3}t - Ct^{-2} \text{ und}$$
$$\frac{1}{t}y = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + Ct^{-2}.$$

Mithin ist

$$y' + \frac{1}{t}y = t^2 - t \qquad \text{bzw.} \qquad y' = -\frac{1}{t}y + t^2 - t.$$

b) Zu der linearen Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 0$$

gehört das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

d.h. $(\lambda + 1)^2 = 0$ mit der doppelten Nullstelle $\lambda_{1/2} = -1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist daher

$$y_H(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ beliebig. Ersichtlich ist $y_S(t) = -\frac{-2}{1} = 2$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Daher ist

$$y(t) = 2 + y_H(t) = 2 + C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Aus den Anfangsbedingungen ergibt sich

$$2 = y(0) = 2 + C_1, \text{ also } C_1 = 0$$

und

$$3 = y'(0) = -C_1e^0 + (C_2e^0 - C_20e^0) = -C_1 + C_2 - 0.$$

Weil $C_1 = 0$ ist, muss $C_2 = 3$ sein. Die gesuchte Funktion ist demnach

$$y(t) = 2 + 3te^{-t}.$$

In der Tat gilt für diese Funktion

$$y'(t) = 3e^{-t} - 3te^{-t}$$

und

$$y''(t) = -3e^{-t} - 3e^{-t} + 3te^{-t}.$$

Damit ergibt sich

$$y(t) + 2y'(t) + y''(t) = 2 + 0te^{-t} + 0e^{-t} = 2.$$

2 Klausur vom Februar 2001

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Für welche reellen Zahlen x gilt $|3x+3| \geq |\frac{1}{2}x-1|$?

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Welche der Folgen sind monoton? Welche Grenzwerte besitzen sie? Vom wievielten Folgeglied an unterscheiden sich Folgeglieder und Grenzwert um weniger als $\frac{1}{1000}$?

a) $a_n = \dfrac{4n-6}{3n-2}$ b) $b_n = \dfrac{7n+2}{4n-1}$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Man gebe den Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$ an, bestimme die Extremstellen von f und, falls solche existieren, die Art der Extrema!

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ differenzierbar?

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Was können Sie über Konvexität oder Konkavität der Funktion

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

aussagen (und beweisen)?

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Es soll eine quaderförmige, oben und unten abgeschlossene Kiste mit zu wählender Höhe h und vorgegebenem Volumen $V = 1$ konstruiert werden. Wie ist die quadratische Grundfläche und die Höhe h festzulegen, damit die Oberfläche der Kiste minimal wird?

Aufgabe 7: (4 Punkte)

Man berechne das unbestimmte Integral

$$\int (6\sin x + 3,5 - 3x^2 + \frac{1}{x})\, dx$$

und das bestimmte Integral

$$\int_0^1 (4x-7)^2\, dx.$$

Aufgabe 8: (4 Punkte)

Für welche Funktionen $y(x)$ gilt

a) $y'(x) = 1 + x^2$, b) $y'(x) - y(x) = 0$?

Lösung zu Aufgabe 1:

Wir unterscheiden 4 Fälle:

a) $3x + 3 \geq 0$ und $\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$,

d.h. $x \geq -1$ und $x \geq 2$; es ist also $x \geq 2$.

Die Ungleichung lautet dann

$$3x + 3 \geq \frac{1}{2}x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{5}{2}x \geq -4 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq -\frac{8}{5}.$$

Das ist für alle $x \geq 2$ erfüllt und daher ist $\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$.

b) $3x + 3 \geq 0$ und $\frac{1}{2}x - 1 < 0$ also $x \geq -1$ und $x < 2$.

Die Ungleichung wird umgeformt zu

$$3x + 3 \geq 1 - \frac{1}{2}x \iff \frac{7}{2}x \geq -2 \iff x \geq -\frac{4}{7}.$$

Somit ist $\mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{4}{7} \leq x < 2\}$.

c) $3x + 3 < 0$ und $\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$ d.h. $x < -1$ und $x \geq 2$.

Das ist ein Widerspruch, folglich ist $\mathcal{L}_3 = \varnothing$.

d) $3x + 3 < 0$ und $\frac{1}{2}x - 1 < 0$,
d.h. $x < -1$ <u>und</u> $x < 2$, also $x < -1$. Die Ungleichung hat die Form

$$-3x - 3 \geq 1 - \frac{1}{2}x \iff -\frac{5}{2}x \geq 4 \iff x \leq -\frac{8}{5}.$$

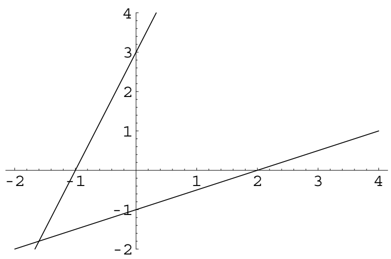
Folglich ist $\mathcal{L}_4 = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -\frac{8}{5}\}$.

Als Gesamtlösungsmenge erhalten wir

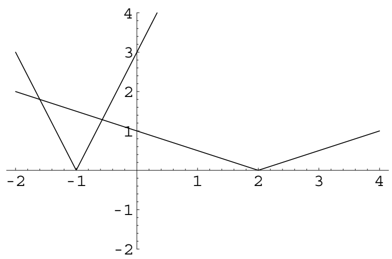
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 \cup \mathcal{L}_4 = \left(-\infty, -\frac{8}{5}\right] \cup \left[-\frac{4}{7}, \infty\right).$$

Grafisch finden wir die Lösung so:

Wir setzen $y_1(x) = 3x + 3$ und $y_2(x) = \frac{1}{2}x - 1$ sowie $z_i(x) = |y_i(x)|$, $i = 1, 2$, und zeichnen die Geraden dieser Funktionen.



$y_1(x)$ $y_2(x)$



$z_1(x)$ $z_2(x)$

Die Graphen für $z_1(x)$ und $z_2(x)$ haben zwei Schnittpunkte, diese liegen bei $-\frac{8}{5}$ und $-\frac{4}{7}$ (kann durch Gleichsetzung der beiden Geradengleichungen berechnet werden). Rechts und links davon verläuft die zu z_1 gehörende Linie oberhalb der zu z_2 gehörenden, d.h. es gilt $z_1(x) \geq z_2(x)$. Also ist die Ungleichung in diesen Bereichen erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 2 a:

Angenommen, es gäbe ein $n \geq 1$ mit $a_n > a_{n+1}$, dann ist

$$\frac{4n-6}{3n-2} > \frac{4(n+1)-6}{3(n+1)-2}, \quad \text{also} \quad (4n-6)(3n+1) > (4n-2)(3n-2),$$

$$\text{d.h.} \quad 12n^2 + 4n - 18n - 6 > 12n^2 - 8n - 6n + 4,$$

also $-6 > 4$. Das ist ein Widerspruch, folglich ist $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$, die Folge ist echt monoton wachsend.

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-\frac{6}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \dfrac{4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n}}{3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}} = \dfrac{4-0}{3-0} = \dfrac{4}{3}$.

Wann gilt nun $\dfrac{4}{3} - a_n < \dfrac{1}{1000}$?

Das bedeutet $\dfrac{4n-6}{3n-2} > \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{1000}$ und ist äquivalent zu

$$3n > 5998 - \frac{8000}{3}, \text{ also } n > \frac{9994}{9}$$

und das wiederum gilt für alle $n \geq 1111$.

Lösung zu Aufgabe 2 b:

Wir nehmen an, es gäbe ein $n \geq 1$ mit $b_n < b_{n+1}$, dann ist

$$\frac{7n+2}{4n-1} < \frac{7(n+1)+2}{4(n+1)-1}, \quad \text{also}$$

$$(7n+2)(4n+3) < (7n+9)(4n-1) \text{ und daher}$$
$$28n^2 + 29n + 6 < 28n^2 + 29n - 9, \quad \text{also} \quad 6 < -9.$$

Hier erhalten wir einen Widerspruch, d.h. die Folge $\{b_n\}$ ist monoton fallend.

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{7}{4}$, und wir haben noch zu zeigen, ab wann $b_n - \frac{7}{4} < \frac{1}{1000}$ gilt.

$$\frac{7n+2}{4n-1} - \frac{7}{4} < \frac{1}{1000}, \text{ gdw. } 4(7n+2) - 7(4n-1) < \frac{(4n-1)\cdot 4}{1000},$$
$$\text{gdw. } 16n - 4 > 15000, \text{ gdw. } n > 937,75.$$

Ab $n = 938$ unterscheidet sich also b_n um weniger als $\frac{1}{1000}$ vom Grenzwert der Folge.

Lösung zu Aufgabe 3:

f ist definiert auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Notwendig für das Vorliegen von Extrema ist $f'(x) = 0$. f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wegen

$$f'(x) = x + (-1)x^{-2} = x - \frac{1}{x^2}$$

bedeutet $f'(x) = 0$ gerade $x = \frac{1}{x^2}$ und folglich $x^3 = 1$. Der einzige kritische Punkt ist $x = 1$.

Wegen $f''(x) = 1 + 2\frac{1}{x^3}$ ist $f''(1) > 0$, daher hat f bei $x = 1$ ein relatives Minimum.

In der Tat ist $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, daher muss es eine Minimumstelle in $(0,\infty)$ geben, Maxima existieren nicht.

Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ existieren in $(-\infty, 0)$ keine Extremwerte.

Lösung zu Aufgabe 4:

Die Funktion f ist ersichtlich für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und für $x \neq 0$ auch differenzierbar. Nur für $x = 0$ ist eine gesonderte Rechnung erforderlich.

Es ist

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0-h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

und

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\sqrt[3]{-h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

Bei $x = 0$ ist f also nicht differenzierbar.

Lösung zu Aufgabe 5:

Zum Nachweis von Konvexität oder Konkavität benutzen wir die 2. Ableitung.

Für $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ist $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ sowie $f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist daher $f''(x) > 0$ und f ist konvex.

(Zusatz: Weil entweder $x \geq 0$ oder $-x \geq 0$ gilt, ist $f''(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \geq \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$.)

Lösung zu Aufgabe 6:

Die Kiste habe die Höhe h, die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche sei x. Das Volumen V berechnet sich dann als $V = x^2h$, es soll den Wert 1 haben.

Die Oberfläche der Kiste ist $O = 2x^2 + 4xh$, sie soll minimal werden. Da die Kiste keine negativen Maße haben kann, muss $x > 0$ und $h > 0$ gelten.

Wir erhalten h aus der Volumenbedingung $h \cdot x^2 = 1$, also $h = x^{-2}$. Dann wird

$$O(x) = 2x^2 + 4xx^{-2} = 2x^2 + 4x^{-1}.$$

Für Extrema muss $O'(x) = 0$, also $\quad 4x - 4\dfrac{1}{x^2} = 0 \quad$ gelten.

Hieraus folgt $\quad 4x^3 - 4 = 0 \quad$ oder $\quad x = 1$.

Wenn $O(x)$ ein Extremum in $\{x|x > 0\}$ hat, dann nur bei $\bar{x} = 1$.

Dazu gehört die Höhe $h = \dfrac{1}{1 \cdot 1} = 1$.

Wir argumentieren so: Es ist $\lim\limits_{x\to 0} O(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} O(x) = +\infty$,

weil es nur einen kritischen Punkt zwischen 0 und ∞ gibt, muss dort ein Minimum liegen.

Natürlich kann man auch die 2. Ableitung heranziehen:

Es ist $O'(x) = 4(x - \dfrac{1}{x^2})$ und daher $O''(\bar{x}) = 4(1 + 2\dfrac{1}{\bar{x}^3}) > 0$, daher hat die Funktion O bei $\bar{x}$ ein relatives Minimum, was wegen der Randbetrachtung auch das absolutes Minimum ist.

Lösung zu Aufgabe 7:

a)
$$\int (6\sin x + 3,5 - 3x^2 + \frac{1}{x})dx = -6\cos x + 3,5x - x^3 + \ln x + C.$$

b)
$$\int_0^1 (4x-7)^2 dx = \int_0^1 (16x^2 - 56x + 49)dx = \left[\frac{16}{3}x^3 - 28x^2 + 49x\right]_0^1$$
$$= \frac{16}{3} - 28 + 49 = 21 + \frac{16}{3} = \frac{79}{3}.$$

Lösung zu Aufgabe 8:

a) Wenn $y'(x) = 1 + x^2$ ist, so gilt $y(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + C$.

b) Die Differentialgleichung lautet $y'(x) = y(x)$.

Lösungen sind die Funktionen $y(x) = Ae^x$ mit $A \in \mathbb{R}$ beliebig.

3 Klausur vom Februar 2002

Aufgabe 1:

a) Welche der folgenden Regeln sind für alle $a, b \in \mathbb{R}$ richtig?

1) $|a+b| = |a| + |b|$ 2) $|a+b| \leq |a| + |b|$ 3) $|a+b| < |a| + |b|$
4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ 5) $|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$ 6) $|a \cdot b| < |a| \cdot |b|$

b) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| \cdot |x+1| < \dfrac{1}{2}$.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie bzw. beweisen Sie die Nichtexistenz für

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 - 2n + 1}$,

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 6x + 3}{4x - 4}$.

Aufgabe 3:

a) Definieren Sie den Begriff "f besitzt in x_0 ein relatives Minimum" und geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass ein solches vorliegt.

b) Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktion $f(x) = e^{x^4 - 4x^2}$ und bestimmen Sie das absolute Maximum dieser Funktion für die Intervalle [0,1], [0,2] und [0,3].

Aufgabe 4:

a) Definieren Sie die Bogenelastizität mit Worten.

b) Wann heißt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 unelastisch?

c) Berechnen Sie die Elastizität von $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ für $x > 0$. In welchen Bereichen (für $x > 0$) wird die Elastizität von f negativ?

Aufgabe 5:

a) A sei eine Matrix vom Typ (m, n), B sei eine Matrix vom Typ (p, q).

Wann ist $A \cdot B$ erklärt: 1) $m = p$, 2) $n = p$, 3) $m = q$, 4) $n = q$?

b) Berechnen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrizenprodukte $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

Aufgabe 6:

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung von $y' = \dfrac{3}{t}(y - 1)$ für $t > 0$ und skizzieren Sie die Lösungsschar.

b) Führen sie eine Probe durch.

Aufgabe 7:

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - y' - 6y + 12 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 12.$$

Lösung zu Aufgabe 1 a:

1) Falsch. Die Gleichung ist z.B. nicht erfüllt für $a = 2$ und $b = -1$.

2) Richtig. Zum Beweis müssen wir vier Fälle unterscheiden:

   1.Fall: $a > 0$ und $b > 0$. Dann ist auch $a + b > 0$, und es gilt
   $|a + b| = a + b$, $|a| = a$ und $|b| = b$, d.h. es gilt das Gleichheitszeichen.

   2.Fall: $a < 0$ und $b > 0$. Dann ist $|a| = -a > 0$ und $|b| = b$, die rechte Seite ist also größer als b und auch größer als $|a|$. Wegen der unterschiedlichen Vorzeichen ist jedoch $a + b$ kleiner als b und größer als a, folglich ist

$$|a + b| < \begin{cases} |a| & \text{falls } a + b < 0, \\ |b| & \text{sonst.} \end{cases}$$

   3.Fall: $a > 0$ und $b < 0$. Analog zum 2. Fall.

   4.Fall: $a < 0$ und $b < 0$. Dann ist $|a + b| = -(a + b) = -a - b = |a| + |b|$.

3) Falsch, Gegenbeispiele liefern die Fälle 1 und 4 in 2).

4) Richtig, zur Begründung müssen die gleichen Fälle wie bei 2) unterschieden werden.

   1.Fall: $a > 0$ und $b > 0$. Dann ist auch $a \cdot b > 0$, und es gilt $|a \cdot b| = a \cdot b$, $|a| = a$ und $|b| = b$.

   2.Fall: $a < 0$ und $b > 0$. Dann ist $|a| = -a > 0$, $|b| = b$ und $|a \cdot b| = -a \cdot b$.

   3.Fall: $a > 0$ und $b < 0$. Analog zum 2. Fall.

   4.Fall: $a < 0$ und $b < 0$. Dann ist $a \cdot b > 0$ und folglich

$$|a \cdot b| = a \cdot b = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|.$$

5) Richtig, da 4) richtig ist.

6) Falsch, da 4) richtig ist.

Lösung zu Aufgabe 1 b:

Die Aufgabe ist äquivalent zu

$$|(x-1)(x+1)| < \frac{1}{2} \quad \text{, also} \quad |x^2 - 1| < \frac{1}{2}.$$

1. Fall: $x^2 \geq 1$. Die Ungleichung lautet $x^2 < \frac{3}{2}$.

Die Lösungsmenge ist in diesem Fall

$$\mathcal{L}_1 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

2.Fall: $x^2 < 1$. Lösungen müssen $1 - x^2 < \frac{1}{2}$ erfüllen, d.h. $x^2 > \frac{1}{2}$. Daher ist

$$\mathcal{L}_2 = \left(-1, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 1\right).$$

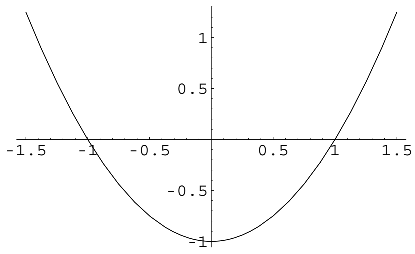
Zusammen ergibt sich wegen $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ und $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

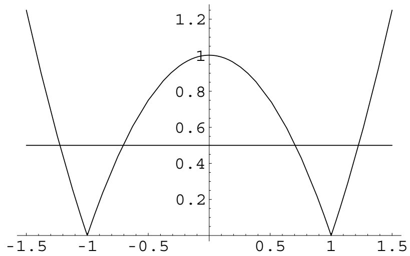
$$\mathcal{L} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

Grafisch kann man dies folgendermaßen bestätigen:

man setze $y(x) = x^2 - 1$ und suche alle x mit $|y(x)| < \frac{1}{2}$.

Dazu zeichne man die Funktion $y(x)$ und $z(x) := |y(x)|$





Es kann abgelesen werden, wo $z(x) < \frac{1}{2}$ ist.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Es ist $\frac{3n^2+2n-1}{2n^2-2n+1} = \frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ gilt für den

gesuchten Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{2n^2-2n+1} = \frac{3}{2}$.

b) Es ist $3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$ und $4x - 4 = 4(x-1)$. Daher wird

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-6x+3}{4x-4} = \lim_{x\to 1} \frac{3}{4}(x-1) = 0.$$

Lösung zu Aufgabe 3 a:

Wenn $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ ist, erhält man folgende Aussagen:

Es ist f auf $\mathbb{R}$ definiert. Wenn es ein Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ gibt mit $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, so hat f bei x_0 ein relatives Minimum.

Eine hinreichende Bedingung ist:

Wenn f bei x_0 zweimal stetig differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) \geq 0$ gilt, so hat f bei x_0 ein relatives Minimum.

Lösung zu Aufgabe 3 b:

Die Funktion ist überall differenzierbar, es gilt $f'(x) = (4x^3 - 8x)e^{x^4-4x^2}$. Für alle $z \in \mathbb{R}$ ist $e^z > 0$. Dann ist $f'(x) = 0$ genau dann wenn $4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 0$ ist. Kritische Punkte sind folglich $x_1 = 0$ und $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$.

In	$[\sqrt{2}, \infty)$	ist	$f'(x) \leq 0$,	also ist	f	monoton wachsend,
In	$[0, \sqrt{2}]$	ist	$f'(x) \geq 0$,	also ist	f	monoton fallend,
In	$[-\sqrt{2}, 0]$	ist	$f'(x) \leq 0$,	also ist	f	monoton wachsend,
In	$(-\infty, -\sqrt{2}]$	ist	$f'(x) \geq 0$,	also ist	f	monoton fallend.

Folglich hat f bei x_1 ein relatives Maximum und bei x_2 sowie auch bei x_3 relative Minima.

Das absolute Maximum von f auf $[0, 1]$ wird bei $x_1 = 0$ angenommen, weil f dort monoton fallend ist.

Für das Intervall $[0, 2]$ haben wir ein relatives Minimum bei $x_2 = \sqrt{2}$, rechts und links davon ist die Funktion monoton steigend. Folglich sind die Funktionswerte in den Randpunkten zu vergleichen:

$$f(0) = e^0 = 1,$$

$$f(2) = e^{16-4\cdot 4} = e^0 = 1.$$

Das absolute Maximum wird an den beiden Randpunkten $x_1 = 0$ und bei $x_4 = 2$ angenommen.

Für das Intervall $[0, 3]$ wird das absolute Maximum bei $x = 3$ angenommen, weil f rechts von $x_2 = \sqrt{2}$ und damit auch rechts von $x_4 = 2$ monoton wachsend ist. In der Tat ist $f(3) = e^{81-36} = e^{45} > 1$.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Die Bogenelastizität gibt näherungsweise an, um wieviel Einheiten sich $f(x)$ ändert, wenn x sich um eine Einheit ändert (Hier wird $\Delta x = 1$ gesetzt!)

$$\varepsilon_f(x) = \frac{\Delta f(x)}{f(x)} : \frac{\Delta x}{x}$$

Man kann die Bogenelastizität auch als Verhältnis der relativen Änderung von $y = f(x)$ zur relativen Änderung der Größe x ansehen.

b) f heist unelastisch, falls $|\varepsilon_f(x)| < 1$ ist.

c) Die (Punkt-)Elastizität ist als $\varepsilon_f(x) = \dfrac{f'(x)}{x}$ definiert. Für $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ und $x > 0$ ist $f'(x) = x^{-2} - x^{-2} \ln x = x^{-2}(1 - \ln x)$, also

$$\varepsilon_f(x) = x^{-3}(1 - \ln x).$$

Wegen $x > 0$ ist $x^{-3} > 0$, folglich wird $f'(x) < 0$ genau dann, wenn $\ln x > 1$, also genau für $x > e$.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) Richtig ist 2).

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ -5 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 6:

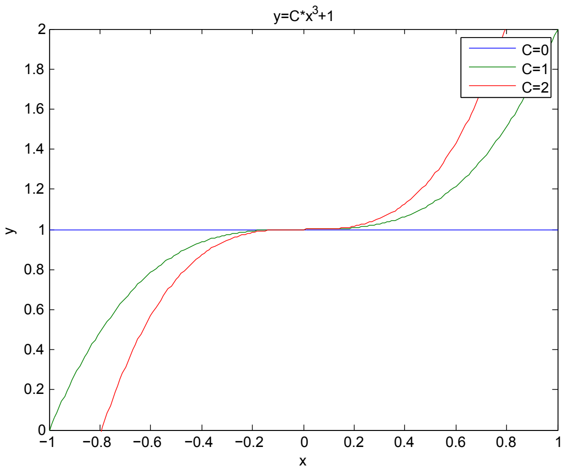
Nach Trennung der Variablen erhält man $\frac{1}{y-1} \cdot dy = \frac{3}{t} \cdot dt$. Integrieren ergibt

$$\ln(y-1) = 3 \cdot \ln t + \tilde{C} = \ln(t^3) + \tilde{C},$$

also ist $y - 1 = t^3 \cdot C$ und daher $y = 1 + t^3 \cdot C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Probe: Tatsächlich ist $y' = 3Ct^2$ und $\frac{3}{t}(y-1) = \frac{3}{t} \cdot Ct^3 = 3Ct^2$.

Skizze zu $C = 0, \quad C = 1, \quad C = 2$:



Lösung zu Aufgabe 7:

Die Lösung für die homogene Differentialgleichung gewinnen wir mit dem charakteristischen Polynom $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$. Dessen Nullstellen sind

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}, \quad \text{also} \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2.$$

Folglich ist $y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

Die Funktion $y_S(t) = -\frac{12}{-6} = 2$ ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung ist also

$$y(t) = 2 + C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}.$$

Die Parameter C_1 und C_2 erhalten wir aus den Anfangsbedingungen:

$$y(0) = 2 + C_1 e^0 + C_2 e^0 = 1, \quad \text{also} \quad C_1 + C_2 = -1,$$

$$y'(0) = 3C_1e^0 - 2C_2e^0 = 12, \quad \text{d.h.} \quad 3C_1 - 2C_2 = 12.$$

Wegen $\quad C_1 = -C_2 - 1 \quad$ folgt

$$\begin{aligned} -3C_2 - 3 - 2C_2 &= 12 \\ -5C_2 &= 15 \\ C_2 &= -3, \quad \text{also} \\ C_1 &= -(-3) - 1 = 2. \end{aligned}$$

Die Lösung ist damit $y(t) = 2 + 2e^{3t} - 3e^{-2t}$.

4 Klausur vom Januar 2003

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Für welche reellen Zahlen x gilt $\dfrac{x+4}{x+2} > \dfrac{x-5}{x+4}$?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = x + \sin x \quad \text{für } 0 \leq x \leq 2\pi$$

auf ihrem Definitionsbereich monoton wachsend ist. Geben Sie das absolute Minimum, das absolute Maximum und eventuell relative Extrema von f auf $[0, 2\pi]$ an.

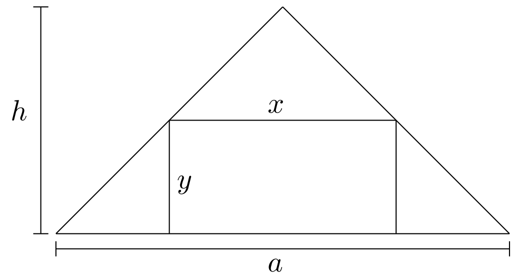
Aufgabe 3: (5 Punkte)

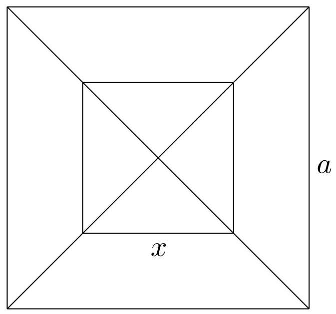
Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-n}}{n+1}.$$

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Aus einer Pyramide der Höhe h mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge a soll ein Quader mit quadratischer Grundfläche durch fünf Schnitte wie folgt herausgeschnitten werden:



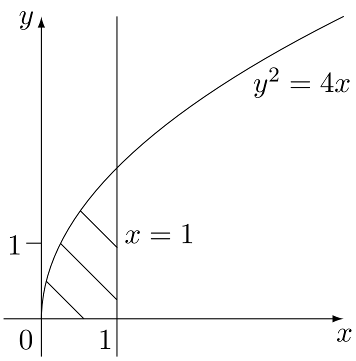


Ansicht Aufsicht

Der Quader habe die Seitenlänge x und die Höhe y. Wie sind x und y zu wählen, damit der Quader möglichst großes Volumen besitzt?

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Wie groß ist das Flächenstück, das sich ergibt, wenn man in die Parabel $y^2 = 4x$ eine Sehne durch $x = 1$ parallel zur y–Achse einzeichnet?



Aufgabe 6: (6 Punkte)

Die gewöhnliche inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 2 + 4x - 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

hat die spezielle Lösung $y(x) = x^2$. Geben Sie die allgemeine Lösung an und bestätigen Sie durch Differenzieren, dass Sie die Lösung gefunden haben.

Lösung zu Aufgabe 1:

Wir beseitigen die Brüche und unterscheiden dabei mehrere Fälle:

a) Für $x > -2$ sind $x + 2 > 0$ und $x + 4 > 0$, die Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{array}{rrcl} & (x+4)^2 & > & (x+2)(x-5) \\ \Leftrightarrow & x^2 + 8x + 16 & > & x^2 - 3x - 10 \\ \Leftrightarrow & 11x & > & -26 \\ \Leftrightarrow & x & > & -\dfrac{26}{11} \end{array}$$

Wegen $-\dfrac{26}{11} < -2$ ist $\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} | x > -2\}$.

b) Für $x < -4$ ist $x + 4 < 0$ und $x + 2 < 0$ Daher ist die Ungleichung erfüllt für $x > -\dfrac{26}{11}$, was aber $x < -4$ widerspricht, also ist $\mathcal{L}_2 = \varnothing$.

c) Für $x > -4$ und $x < -2$ erhalten wir die Ungleichung $11x < -26$, also $x < -\dfrac{26}{11}$.

Lösungsmenge ist $\mathcal{L}_3 = \{x \in \mathbb{R} | -4 < x < -\dfrac{26}{11}\}$.

Andere Fälle sind nicht möglich und wir erhalten $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_3$.

Lösung zu Aufgabe 2:

Eine Funktion ist genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle in Frage kommenden x ist. Es ist $f(x) = x + \sin x$ und $f'(x) = 1 + \cos x$.

Wegen $|\cos x| \leq 1$ folgt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also auch $f'(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq 2\pi$. Für $x \neq \pi$, $x \in [0, 2\pi]$ ist $f'(x) > 0$ und $f'(\pi) = 0$.

Weil f streng monoton wachsend in $[0, 2\pi] \backslash \{\pi\}$ ist, liegt bei $x = \pi$ kein relatives Extremum! Es gibt auch keine weiteren relativen Extrema in $(0, 2\pi)$.

Das absolute Minimum liegt bei $x = 0$ und das absolute Maximum bei $x = 2\pi$.

Lösung zu Aufgabe 3:

Es ist

$$\frac{\sqrt{n^2 - n}}{n + 1} = \frac{n\sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{n(1 + \frac{1}{n})} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 - n}}{n + 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})} = \frac{\sqrt{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1.$$

Lösung zu Aufgabe 4:

Der Quader habe die Seitenlänge x und die Höhe y. Nach dem Strahlensatz gilt

$$h : y = \frac{a}{2} : \frac{a-x}{2} \quad \text{, d.h. es ist } y = \frac{a-x}{a}h \quad , 0 \le x \le a.$$

Daher muss $0 \le y \le h$ sein!

Das Volumen des Quaders ist $V(x,y) = x^2 \cdot y$. Wir eliminieren y, es wird $V(x) = \frac{a-x}{a}x^2 h$.

Es ist $V'(x) = \frac{h}{a}(2ax - 3x^2)$. Die relativen Extrema in $\mathbb{R}$ erfüllen $V'(x) = 0$.

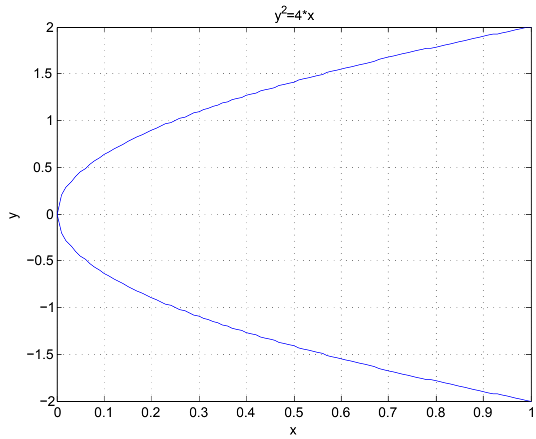
$V'(x) = 0$ gdw. $2ax - 3x^3 = 0$. Nullstellen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{3}a$. Man beachte $x_2 \in (0,a)$.

Wegen $V''(x) = \frac{h}{a}(2a - 6x)$ ist $V''\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{h}{a}(-2a) < 0$ und daher liegt bei $x_2 = \frac{2}{3}a$ ein relatives Maximum.

Weil $V(x_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 a^2 h > 0$, $V(0) = 0$, $V(a) = 0$ wird das (absolute) Maximum von V auf $[0,a]$ bei x_2 angenommen. Die zugehörige Höhe ist $y = \frac{1}{3}h$; das zugehörige Volumen ist $V(x_2) = \frac{4}{27}ha^2$.

Lösung zu Aufgabe 5:

Aus der Skizze



entnehmen wir $y_1(x) = \sqrt{4x} = +2\sqrt{x}$ und $y_2(x) = -2\sqrt{x}$ für die beiden Funktionsäste.

Die gesuchte Fläche ist wegen Symmetrie

$$A = 2 \cdot \int_0^1 y(x)dx = 4\int_0^1 \sqrt{x}dx = 4\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = 4 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{8}{3}.$$

Lösung zu Aufgabe 6:

Wir bestätigen zuerst, dass $y(x) = x^2$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist:

Es ist $y(x) = x^2, \quad y'(x) = 2x, \quad y''(x) = 2$. Daher wird

$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 2 + 4x - 3x^2$.

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung
$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$ erhalten wir über die charakteristische Gleichung
$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$.
Nullstellen sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -3$, also ist $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$ die gesuchte Lösung der homogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist

$$y(x) = x^2 + C_1 e^x + C_2 e^{-3x} \text{ mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5 Klausur vom Februar 2004

Aufgabe 1:

a) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c > 0$. Welche der folgenden Ungleichungen sind dann für jede Wahl von a, b, c auch richtig:

1) $bc < ac$ 2) $(a-b)c < 0$ 3) $a^2 - c^2 < b^2 - c^2$ 4) $|bc - ac| \leq (b-a)c$

b) Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x mit

1) $4|x| + 3 \leq 2$ 2) $|x| - x^2 \geq 0$

Aufgabe 2: Man untersuche die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x}$$

an den Stellen 1) $x_0 = 0$, 2) $x_1 = -1$, 3) $-\infty$ hinsichtlich ihres Verhaltens (Grenzwertberechnung).

Aufgabe 3:

a) Definieren Sie: "Die Funktion f besitzt in x_0 ein relatives Maximum".

Hinweis: f braucht nicht differenzierbar zu sein.

b) Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktion

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

und bestimmen Sie ferner das absolute Minimum bzw. Maximum dieser Funktion auf dem Intervall $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$.

Aufgabe 4:

a) Wie sind die Begriffe Punktelastizität bzw. Bogenelastizität definiert?

b) Berechnen Sie die Punktelastizität $\varepsilon_f(x)$ von f. f sei definiert durch

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

für $x > 0$. Für welche (positiven) $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\varepsilon_f(x) < 1$?

Aufgabe 5:

a) A, B seien Matrizen vom Typ $m \times n$ bzw. $p \times r$. Unter welcher Voraussetzung ist das Matrizenprodukt $A \cdot B$ definiert:

1) $m = r$ 2) $n = p$ 3) $m + n = p + r$ 4) $m = n = p = r$?

b) Berechnen Sie, sofern möglich, A^2, AB, BA, B^2 für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: Berechnen Sie die allgemeine Lösung von

$$y' = \frac{1}{t-1}y + t^2 - 1 \quad \text{für} \quad t > 1$$

und führen Sie eine Probe durch.

Aufgabe 7: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + y' - 12y + 12 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -7.$$

Lösung zu Aufgabe 1 a:

Bei Aufgaben dieser Art ist zu beachten, dass eine positive Antwort begründet (eigentlich bewiesen) werden muss, bei einer negativen Antwort reicht ein Gegenbeispiel.

1) richtig

Die Ungleichung $a < b$ bleibt durch Multiplikation mit einem positiven Faktor erhalten. (Rechenregeln für reelle Zahlen)

2) richtig

Aus $a < b$ folgt $a - b < 0$ und hieraus wegen $c > 0$: $(a - b)c < 0 \cdot c = 0$.

3) falsch

Für $a = -4$, $b = 1$, $c = 2$ gilt

$a < b$	$-4 < 1$	, aber
$a^2 > b^2$	$16 > 1$	und folglich auch
$a^2 - c^2 > b^2 - c^2$	$16 - 4 > 1 - 4.$	

4) richtig

Wegen $b > a$ ist $b - a > 0$, also auch $(b - a) \cdot c > 0$. Außerdem gilt das Distributivgesetz: $bc - ac = (b - a)c$. Folglich ist

$$|bc - ac| = |(b - a)c| = (b - a)c,$$

d.h. es gilt an dieser Stelle das Gleichheitszeichen, damit ist aber auch die „$\leq$“ -Beziehung erklärt.

Lösung zu Aufgabe 1 b:

1) $4|x| + 3 \leq 2 \iff 4|x| \leq -1$
Diese Ungleichung hat keine Lösung, da $|x|$ laut Definition immer größer oder gleich Null ist.

2) Es gilt

$$\begin{aligned} |x| - x^2 \geq 0 &\Longleftrightarrow |x| \geq x^2 \\ &\Longleftrightarrow |x| \geq |x| \cdot |x| \\ &\Longleftrightarrow 1 \geq |x| \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge dieser Ungleichung ist also das Intervall $[-1, 1]$ oder in Mengenschreibweise $\{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$.

Lösung zu Aufgabe 2:

An der Stelle $x_0 = 0$ wird das Nennerpolynom Null, das Zählerpolynom nimmt den Wert $-3 \neq 0$ an; es liegt also eine Polstelle vor.
Für $x > 0$ ist auch $x^2 + x > 0$, d.h. es gilt

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x} = -\infty.$$

Ist $-1 < x < 0$, so gilt $x^2 < |x|$, der Wert im Nenner ist also negativ. Demnach gilt

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x} = \infty.$$

An der Stelle $x_1 = -1$ erhalten wir:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x} = \lim_{x \to -1} \frac{(x - 3)(x + 1)}{x(x + 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x - 3}{x} = 4.$$

Für das Verhalten im Unendlichen gilt

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)} = 1.$$

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \cap \mathbb{D}_f$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$, wobei $\mathbb{D}_f$ den Definitionsbereich von f bezeichnet.

b) Hierfür bestimmen wir die ersten beiden Ableitungen der Funktion $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) \\ &= (1 - 2x^2)e^{-x^2}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-4x)e^{-x^2} + (1 - 2x^2)e^{-x^2} \cdot (-2x) \\ &= (-4x - 2x + 4x^3)e^{-x^2} \\ &= 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2}\,. \end{aligned}$$

Eine notwendige Bedingung für relative Extrema ist $f'(x) = 0$. Da e^{-x^2} für alle $x \in \mathbb{R}$ größer als 0 ist, kann dies nur für $1 - 2x^2 = 0$ gelten, also

$$2x^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad x^2 = \frac{1}{2}.$$

Extremwertverdächtige Stellen sind folglich

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Man beachte $x_1 \in \left[\frac{1}{4}; 2\right]$, $x_2 \notin \left[\frac{1}{4}; 2\right]$. Wegen

$$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 3\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}} < 0 \qquad \text{und}$$

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 3\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} > 0$$

ist $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$ und $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$,

d.h. $f(x)$ hat an der Stelle $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ ein Maximum und ein Minimum bei $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$.

Weiterhin gilt

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{16}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[16]{e}} \approx 0,235$$

$$f(2) = 2 \cdot e^{-4} = \frac{2}{e^4} \approx 0,0366$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}} \approx 0,429.$$

Folglich liegt das absolute Minimum der Funktion auf dem Intervall $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$ bei $x = 2$ und das absolute Maximum bei $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, die zugehörigen Funktionswerte sind $\frac{2}{e^4}$ und $\frac{1}{\sqrt{2e}}$.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Die Punktelastizität einer Funktion f an der Stelle x_0 berechnet sich nach der Formel

$$\varepsilon_f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0 \,,$$

die Bogenelastizität auf $[x_0, x_0 + \Delta x]$ nach

$$E_f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} \,.$$

b) Für $f(x) = x + \frac{1}{x}$ gilt $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, also ist

$$\varepsilon_f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x + \frac{1}{x}} \cdot x = \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{x^2-1}{x^2+1} \,.$$

Dieser Wert ist für alle (positiven) $x \in \mathbb{R}$ kleiner als 1 (da $x^2 - 1$ kleiner ist als $x^2 + 1$).

Es wurde nicht gefragt, aber sei der Vollständigkeit halber erwähnt: $\varepsilon_f(x)$ wird negativ für $0 < x < 1$ und $\varepsilon_f(x) = 0$ für $x = 1$.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $A \cdot B$ ist berechenbar für $n = p$ (d.h. 2) ist richtig).

b) A ist eine Matrix vom Typ 2x3, B ist vom Typ 2x2. Berechenbar sind also $B \cdot A$ und B^2.

Es gilt:

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 6+0 & -8+4 \\ -1-1 & -3+0 & 4+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

bzw.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 4+2 \\ -2-1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 6:

Es liegt eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung in der allgemeinen Form $y' = a(t)y + b(t)$ vor.

Sind $A(t)$ und $B(t)$ Stammfunktionen von $a(t)$ bzw. von $e^{-A(t)} \cdot b(t)$, so ergibt sich die allgemeine Lösung hiervon nach der Formel

$$y(t) = B(t) \cdot e^{A(t)} + C \cdot e^{A(t)}.$$

Hier ist $a(t) = \frac{1}{t-1}$ und $b(t) = t^2 - 1$, woraus sich

$$A(t) = \int \frac{1}{t-1} dt = \ln(t-1)$$

ergibt. (Beachte: wegen $t > 1$ kann auf die Betragsstriche verzichtet werden, da $t - 1 > 0$ ist.)

Also ist

$$\begin{aligned} B(t) &= \int e^{-\ln(t-1)} \cdot (t^2-1) dt = \int \frac{1}{t-1} \cdot (t^2-1) dt = \int \frac{(t+1)(t-1)}{t-1} dt \\ &= \int (t+1) dt = \frac{1}{2} t^2 + t. \end{aligned}$$

Es gilt daher:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{2}t^2 + t \cdot e^{\ln(t-1)} + C \cdot e^{\ln(t-1)} = \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right) \cdot (t-1) + C \cdot (t-1) \\
&= \frac{1}{2}t^3 + t^2 - \frac{1}{2}t^2 - t + C(t-1) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t + C(t-1).
\end{aligned}
$$

Probe: $y'(t) = \frac{3}{2}t^2 + t - 1 + C$.

Daher ist

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t-1}y + t^2 - 1 &= \frac{1}{t-1}\left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t\right) + C + t^2 - 1 \\
&= \frac{1}{t-1}\left(\left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)(t-1)\right) + C + t^2 - 1 \\
&= \frac{1}{2}t^2 + t + C + t^2 - 1 = \frac{3}{2}t^2 + t - 1 + C = y'(t).
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 7:

Zu lösen ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren allgemeine Form

$$y'' + ay' + by + c = 0 \quad (\text{mit } a, b, c \in \mathbb{R})$$

lautet. Diese hat die Lösung

$$y(t) = y_H(t) + y_S(t).$$

Dabei ist y_H die Lösung des zugehörigen homogenen Systems

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Nimmt man hierfür $y(t) = e^{\lambda t}$ als Lösungsansatz, dann ist $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ und $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$. Hieraus erhält man nach Einsetzen in die Aufgabenstellung

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a \cdot \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0 \qquad \text{bzw.}$$

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0\ .$$

Da $e^{\lambda t}$ nicht 0 wird, muss also $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ sein (charakteristisches Polynom). In unserem Fall ist $a = 1$ und $b = -12$, d.h. es muss gelten

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für λ mit den Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2},$$

wir erhalten also $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 3$ und folglich ist $y_H(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{3t}$.

Sei $y_S(t)$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems, z.B.

$$y_S(t) = -\frac{c}{b} = -\frac{12}{-12} = 1.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} y(t) &= y_H(t) + y_S(t) \\ &= C_1 e^{-4t} + C_2 e^{3t} + 1. \end{aligned}$$

Hierfür gilt $y'(t) = -4C_1 e^{-4t} + 3C_2 e^{3t}$ und $y''(t) = 16C_1 e^{-4t} + 9C_2 e^{3t}$. Die Bedingungen

$$y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 1 \quad \text{und} \quad y'(0) = -4C_1 + 3C_2 = -7$$

liefern nach Auflösen der 1. Gleichung $-C_1 = C_2$, dies eingesetzt in die 2. Gleichung ergibt

$$4C_2 + 3C_2 = -7,$$

also $C_2 = -1$ und folglich $C_1 = 1$. Es ist also

$$y(t) = e^{-4t} - e^{3t} + 1$$

die Lösung des AWP.

Probe:

$$\begin{aligned} &16e^{-4t} - 9e^{3t} + (-4e^{-4t} - 3e^{3t}) - 12(e^{-4t} - e^{3t} + 1) + 12 \\ = &(16 - 4 - 12)e^{-4t} + (-9 - 3 + 12)e^{3t} - 12 \cdot 1 + 12 = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung zu Aufgabe 6 und 7: Die Probe war in den Aufgaben nicht gefordert, dient hier also wirklich nur der Überprüfung des Ergebnisses.

6 Klausur vom Januar 2005

Aufgabe 1: (6 Punkte)
Man bestimme alle reellen Lösungen von

a) $\big|\,|x| - |-5|\,\big| < 1$;

b) $|2x - 3| > x^2$.

Aufgabe 2: (6 Punkte)
Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren)

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{-1000n^2 + 3n - 7}{n^3 + 3n - 7}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^3 - 13x - 7}{x^2 - 5x + 5}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x^3 - 2x^2 + x}}{3x^2 + 2x}$.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : [-5, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{(x-3)^2 e^x}{e^3} - e$$

a) Bestimmen Sie alle Maxima und Minima dieser Funktion. Unterscheiden Sie dabei zwischen relativen und absoluten Extremwerten.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

c) Erstellen Sie eine Skizze der Funktion.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale

a) $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{x}(x-2)\,dx$

b) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt{2+2x^3}}\,dx.$

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme

a) $y'(x) - 5xy(x) = 5x; \qquad y(0) = 1$

b) $y''(x) - 2y'(x) = 15y(x)$

c) $y'(x) = (y(x)+2)^2$

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

berechne man (wenn möglich):

a) $A \cdot v$ und $v \cdot A$

b) $2A - 3B^T$

c) $A \cdot B$ und $B \cdot A$

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Wegen $|-5| = 5$ ist die Ungleichung äquivalent zu $||x| - 5| < 1$.

Gelte im 1.Fall $|x| - 5 \geq 0$, also $|x| \geq 5$, d.h. $x \geq 5$ oder $x \leq -5$.

Die Ungleichung lautet dann $|x| - 5 < 1$, also muss $|x| < 6$ gelten.

Die Lösungsmenge besteht aus den Intervallen $(-6; -5]$ und $[5; 6)$.

Im 2. Fall, für $|x| - 5 < 0$, also $|x| < 5$, wird die Ungleichung äquivalent zu $-(|x| - 5) < 1$, also $-|x| + 5 < 1$ bzw. $4 < |x|$. Weitere Lösungsmengen sind demnach $(4; 5)$ und $(-5; -4)$.

Beide Fälle zusammen ergeben die Lösung $(-6; -4) \cup (4; 6)$ oder in Mengenschreibweise $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} | -6 < x < -4 \text{ oder } 4 < x < 6\}$.

b) Für $x \geq \frac{3}{2}$ ist $2x-3 \geq 0$ und somit die Ungleichung äquivalent zu

$$2x-3 > x^2 \quad \text{bzw.} \quad 0 > x^2-2x+3 = (x-1)^2+2$$

Die letzte Ungleichung ergibt einen Widerspruch, die Lösungsmenge ist für diesen Fall leer.

Ist $x < \frac{3}{2}$, so ist $2x-3 < 0$ und somit

$$|2x-3| = -2x+3.$$

Demnach muss $-2x+3 > x^2$ gelten, also

$$0 > x^2+2x-3.$$

Die Parabel $f(x) = x^2+2x-3$ hat die Nullstellen

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3},$$

es ist $x_1 = -1+2 = 1$, $x_2 = -1-2 = -3$, d.h. die Ungleichung ist erfüllt für $-3 < x < 1$, $x < \frac{3}{2}$ ist hierfür auch gewährleistet, also

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 1\} = (-3;1).$$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{-1000n^2+3n-7}{n^3+3n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(-\frac{1000}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{7}{n^3})}{n^3(1+\frac{3}{n^2}-\frac{7}{n^3})} = \frac{0}{1} = 0.$$

b) Für $x = 4$ ist $x^2-5x+5 = 16-20+5 = 1 \neq 0$, wegen der Stetigkeit von Zähler und Nenner ist also

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^3-13x-7}{x^2-5x+5} = \frac{4^3-13\cdot 4-7}{4^2-5\cdot 4+5} = \frac{5}{1} = 5.$$

c) Hier werden sowohl im Zähler als auch im Nenner die Grenzwerte 0, jedoch kann man den Bruch kürzen und folglich den Grenzwert berechnen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}x^3-2x^2+x}{3x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{2}x^2-2x+1)}{x(3x+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}x^2-2x+1}{3x+2} = \frac{1}{2}.$$

Lösung zu Aufgabe 3:

Es ist $f(x) = \dfrac{(x-3)^2e^x}{e^3} - e = (x-3)^2e^{x-3} - e.$

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-3)e^{x-3} + (x-3)^2e^{x-3} \\ &= (2x-6+x^2-6x+9)e^{x-3} \\ &= (x^2-4x+3)e^{x-3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x-4)e^{x-3} + (x^2-4x+3)e^{x-3} \\ &= (x^2-2x-1)e^{x-3}. \end{aligned}$$

Für lokale Extremwerte muss $f'(x) = 0$ gelten. Da e^{x-3} nicht Null werden kann, ist also

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{1} \end{aligned}$$

also $x_1 = 2 + 1 = 3$ und $x_2 = 2 - 1 = 1$.

Nun ist

$$f''(1) = (1^2 - 2 \cdot 1 - 1)e^{-2} = -\frac{2}{e^2} < 0,$$

wir erhalten also ein relatives Maximum bei 1 mit

$$f(1) = \frac{(1-3)^2 e^1}{e^3} - e = \frac{4}{e^2} - e \approx -2.$$

Wegen

$$f''(3) = (9 - 6 - 1)e^0 = 2 > 0$$

hat die Funktion bei 3 ein relatives Minimum und es ist

$$f(3) = 0 - e = -e.$$

Zur Bestimmung der absoluten Extremwerte ist nun noch die Betrachtung der Randwerte notwendig:

$$f(-5) = \frac{(-8)^2 \cdot e^{-5}}{e^3} - e = \frac{64}{e^8} - e \approx -e.$$

Wegen $\frac{64}{e^8} > 0$ ist aber $f(-5) > f(3) = -e$, d.h. auch das absolute Minimum im betrachteten Intervall liegt bei $x_{min} = 3$.

Außerdem ist

$$f(4) = \frac{(4-3)^2 e^4}{e^3} - e = e - e = 0 > f(-1),$$

folglich liegt das absolute Maximum im Intervall $[-5; 4]$ bei 4.

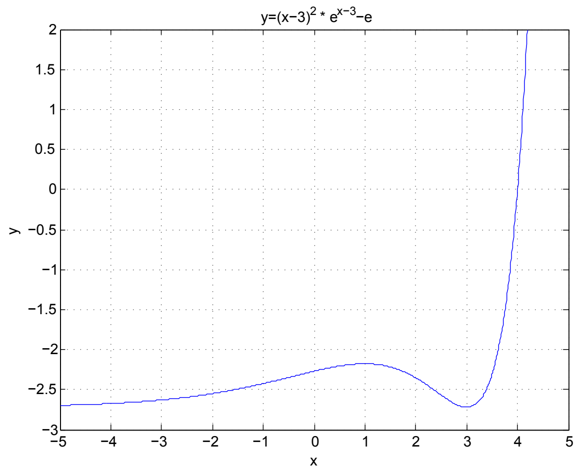
b) Eine Nullstelle liegt bei $x = 4$ (siehe Aufgabe a). Da $f'(x)$ zwischen 1 und 3 negativ ist, ist die Funktion $f(x)$ in diesem Bereich monoton fallend und für $x > 3$ bzw. $x < 1$ monoton wachsend. Folglich kann es für $x > 4$ keine Nullstellen geben.

Für $x > 3$ ist $f'(x) = (x^2 - 4x + 3)e^{x-3} > 0$, denn $x^2 - 4x + 3 = (1-x)^2 + 2(1-x) = (1-x)(3-x) > 0$. Daher ist f monoton wachsend für $x > 3$.

Genauso folgt $f'(x) > 0$ für $x < 1$, so dass f dort ebenfalls monoton wächst. Weil f bei $x_1 = 3$ ein Minimum und bei $x_2 = 1$ ein Maximum besitzt, ist $f(x) < f(1) < 0$ für $1 < x < 3$.

Es gibt nur eine Nullstelle: $x = 4$.

c) Skizze:



Lösung zu Aufgabe 4:

a)
$$\int_0^9 \sqrt{x}(x-2)dx = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}}x - 2x^{\frac{1}{2}}dx = \int_0^9 x^{\frac{3}{2}}dx - 2\int_0^9 x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^9 - 2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9$$
$$= \frac{2}{5}(9^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}) - \frac{4}{3}(9^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}})$$
$$= 61,2.$$

b) $\int x \cdot \ln x dx$ wird durch partielle Integration berechnet.

Es gilt
$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

Hier ist $u'(x) = x \implies u(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $v(x) = \ln x \implies v'(x) = \frac{1}{x}$.

Somit ist
$$\int x \cdot \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

c) Hier wird die Methode der Integration durch Substitution angewandt.

Mit $y = 2 + 2x^3$ ergibt sich $\frac{dy}{dx} = 6x^2$ und daher ist $dx = \frac{1}{6x^2}dy$.

Diese Substitution wird jetzt in das Ausgangsintegral eingesetzt, dann ergibt sich
$$\int \frac{3x^2}{\sqrt{2+2x^3}}dx = \int \frac{3x^2}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{6x^2}dy$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy$$
$$= \frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{2}}dy$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y} + C.$$

Hieraus erhält man das Integral als $\sqrt{2+2x^3} + C$.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) Es liegt eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung vom Typ $y' = a(x)y + s(x)$ mit $a(x) = 5x$ und $s(x) = 5x$ vor.

Wenn man die allgemeine Formel darauf anwendet, wird zuerst $A(x) = \int a(x)dx$ berechnet, d.h. $A(x) = \int 5xdx = \frac{5}{2}x^2$ und damit wird $h(x) := e^{A(x)} = e^{\frac{5}{2}x^2}$ gesetzt.

Als nächstes wird $B(x) = \int \frac{s(x)}{h(x)} dx = \int \frac{s(x)}{e^{A(x)}} dx = \int e^{-A(x)} \cdot s(x) dx$. Also ist das Integral $B(x) = \int 5x \cdot e^{-\frac{5}{2}x^2} dx$ zu bestimmen. Wir setzen $z = -\frac{5}{2}x^2$ und daraus folgt $dx = -\frac{1}{5x} dz$. Somit ist

$$\begin{aligned} \int 5xe^{-\frac{5}{2}x^2} dx &= \int 5xe^{z} \cdot (-\frac{1}{5x}) dz \\ &= -\int e^{z} dz = -e^{z}. \end{aligned}$$

Nach der Resubstitution erhält man $B(x) = -e^{-\frac{5}{2}x^2}$. Die Gesamtlösung ist dann

$y(x) = B(x) \cdot h(x) + C \cdot h(x) = -e^{-\frac{5}{2}x^2} \cdot e^{\frac{5}{2}x^2} + C \cdot e^{\frac{5}{2}x^2} = -1 + C \cdot e^{\frac{5}{2}x^2}$

Aus der Anfangswertbedingung $y(0) = 1$ folgt

$1 = -1 + C \cdot 1, \quad \text{also} \quad C = 2,$

und somit ist die Gesamtlösung $y(x) = -1 + 2e^{\frac{5}{2}x^2}$.

b) Die homogene DGL 2. Ordnung schreiben wir in der Form

$$y'' - 2y' - 15y = 0.$$

Um diese Gleichung zu lösen setzen wir $y = e^{\lambda x}$. Daraus folgt $y' = \lambda e^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ist. Dies setzen wir in unsere Gleichung ein und erhalten

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 15 e^{\lambda x} = 0 \text{ bzw.}$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda - 15)e^{\lambda x} = 0.$$

Daher muss

$$\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \text{ sein.}$$

Die Lösungen sind $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 5$.

Somit ergibt sich die Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = Ae^{-3x} + Be^{5x}.$$

c) Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen der Form $y'(x) = f(y) \cdot g(x)$. Hier sind $f(y) = (y+2)^2$ und $g(x) = 1$.

Somit ist

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \cdot g(x) \text{ oder } \frac{1}{f(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx.$$

daraus folgt $\displaystyle\int \frac{1}{(y+2)^2} dy = \int dx.$

Wir erhalten nun

$$-\frac{1}{y+2} = x + C, \text{ also } \quad -1 = (x+C)(y+2).$$

Es folgt

$$y + 2 = -\frac{1}{x+C}, \text{ und daher ist } y(x) = -2 - \frac{1}{x+C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

die Lösung der Differentialgleichung.

Lösung zu Aufgabe 6:

A und B sind $(3,3)$-Matrizen, v ist ein Spaltenvektor der Dimension 3, also eine $(3,1)$-Matrix

a)

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$v \cdot A$ ist nicht berechenbar.

b)

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -4 & -5 \\ -4 & 4 & 5 \\ -5 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Beachte: Beide Matrizen sind symmetrisch, d.h. es ist $A^T = A$ und $B^T = B$.

c)

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. A ist Inverse von B. Dann ist aber auch B Inverse von A, d.h. $B \cdot A = A \cdot B$.

7 Klausur vom Januar 2006

Aufgabe 1:

a) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c > 0$. Welche der folgenden Ungleichungen sind dann für jede Wahl von a, b, c auch richtig bzw. nicht richtig:

1) $bc < ac$ 2) $(a-b)c < 0$ 3) $a^3 - c^3 < b^3 - c^3$ 4) $|ac| < |bc|$.

b) Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x mit

1) $2|x| + 5 \leq 3$ 2) $\frac{4}{x} \leq 2$.

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - 2x}$$

an den Stellen

1) $x_0 = 0$, 2) $x_1 = 1$, 3) $+\infty$

hinsichtlich ihres Verhaltens (Grenzwertbetrachtung). Begründen Sie die Resultate.

Aufgabe 3: f sei auf $[a, b]$ definiert.

a) Definieren Sie:
"Die Funktion f besitzt in x_0 ein absolutes Maximum für $[a, b]$".

b) Bestimmen Sie alle relativen Extrema und alle Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 1}.$$

Skizzieren Sie den Graphen von f auf [–10,10].

c) Bestimmen Sie das absolute Minimum bzw. Maximum dieser Funktion auf dem Intervall $\left[\frac{1}{5}, 5\right]$.

Aufgabe 4:

a) Wie ist die Punktelastizität definiert?

b) Berechnen Sie die Punktelastizität $\varepsilon_f(x)$ von f, f sei definiert durch

$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x^2}}.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\varepsilon_f(x) > 0$?

Aufgabe 5:

a) A, B seien Matrizen vom Typ $m \times n$ bzw. $p \times r$. Unter welcher Voraussetzung ist das Matrizenprodukt $A \cdot B$ definiert:

1) $m = r$ 2) $n = p$ 3) $m - n = p - r$ 4) $m = n$ oder $p = r$?

b) Berechnen Sie, sofern möglich, A^2, AB, BA, B^2 für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6: Berechnen Sie die allgemeine Lösung von

$$y' = \cos(t) \cdot y + e^{\sin(t)}.$$

Aufgabe 7: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + 10y' + 10 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 9.$$

Lösung zu Aufgabe 1 a:

Bei dieser Aufgabenstellung ist zu beachten, dass die Richtigkeit der Aufgabe begründet werden muss, während für die Aussage „nicht Richtig" die Angabe eines Gegenbeispieles genügt.

1) nicht richtig

   Beispiel: $a = 2$, $b = 3$ und $c = 4$. Dann ist $3 \cdot 4 < 2 \cdot 4$ eine falsche Aussage.

2) richtig

   Wegen $a < b$ gilt $a - b < 0$, also auch $(a - b) \cdot c < 0$, da c positiv ist.

3) richtig

   Die Ungleichung gilt genau dann, wenn $a^3 < b^3$.

   Fallunterscheidung:

   (i) $0 \leq a < b$.

   Dann ist $a^3 \leq a^2 b \leq ab^2 < b^3$

   (ii) $a < 0 \leq b$.

   Dann ist $a^3 < 0$ und $b^3 \geq 0$, also $a^3 < b^3$.

   (iii) $a < b < 0$.

   Dann ist $|a| > |b|$, folglich $|a|^3 > |b|^3$ und die Ungleichung folgt wegen $a^3 = -|a|^3$ bzw. $b^3 = -|b|^3$.

4) nicht richtig

   Beispiel $a = -2$, $b = 1$ und $c = 3$. Dann ist $|-2 \cdot 3| < |1 \cdot 3|$ eine falsche Aussage.

Lösung zu Aufgabe 1 b:

1) Die Lösungsmenge ist leer, denn

$$2|x| + 5 \leq 3 \iff 2|x| \leq -2$$

   und die rechte Ungleichung kann wegen $|x| \geq 0$ nicht erfüllt sein.

2) $\dfrac{4}{x} \leq 2$ ist nur definiert für $x \neq 0$.

1. Fall: $x > 0$. Es ist

$$\frac{4}{x} \leq 2 \iff 4 \leq 2x \iff 2 \leq x,$$

d.h. $\mathcal{L}_1 = [2; \infty)$

2. Fall: $x < 0$. Dann wird

$$\frac{4}{x} \leq 2 \iff 4 \geq 2x \iff 2 \geq x$$

Die rechte Ungleichung ist für alle $x < 0$ erfüllt, folglich ist $\mathcal{L}_2 = (-\infty; 0)$.

Somit erhalten wir $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = (-\infty; 0) \cup [2; \infty)$,

oder in Mengenschreibweise:

$$\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}, \quad \mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\},$$
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} | x < 0 \vee x \geq 2\}.$$

Lösung zu Aufgabe 2:

Die Funktion ist für x_0 und x_1 nicht definiert. Bei $x_0 = 0$ nimmt das Zählerpolynom den Wert 2 an, das Nennerpolynom wird 0, es liegt also eine Polstelle vor.

Für $0 < x < 1$ ist $x^3 < x$, also $2x^3 - 2x < 0$. Hieraus folgt

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - 2x} = -\infty$$

und analog

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-3x+2}{2x^3-2x} = \infty.$$

Für $x_1 = 1$ nehmen Zähler und Nenner den Wert 0 an. Die Werte der Ableitungen an dieser Stelle sind jedoch verschieden von 0, deshalb kann die Regel von de l'Hospital angewendet werden. Es ist

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{2x^3-2x} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{6x-2} = 0.$$

Ohne diese Regel anzuwenden bekommen wir auch

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{2x^3-2x} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-2x+1)(x+2)}{2x(x^2-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-1)(x+2)}{2x(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{2x(x+1)} = 0.\end{aligned}$$

Für das Verhalten im Unendlichen gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+2}{2x^3-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Die Funktion f besitzt in x_0 ein absolutes Maximum auf $[a;b]$, wenn für alle $x \in [a;b]$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$.

b) Hierfür werden die ersten drei Ableitungen der Funktion $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1}$ benötigt. Diese sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5(x^2+1) - 5x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{5x^2+5-10x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-5x^2+5}{(x^2+1)^2} = -\frac{5(x^2-1)}{(x^2+1)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-10x \cdot (x^2+1)^2 + 5(x^2-1) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-10x \cdot (x^2+1) + 20x(x^2-1)}{(x^2+1)^3} = \frac{-10x^3 - 10x + 20x^3 - 20x}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{10x^3 - 30x}{(x^2+1)^3} = \frac{10x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{(30x^2-30)(x^2+1)^3 - (10x^3-30x) \cdot 3(x^2+1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^6} \\ &= \frac{(30x^2-30)(x^2+1) - (10x^3-30x) \cdot 6x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{30x^4 - 30x^2 + 30x^2 - 30 - 60x^4 + 180x^2}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-30x^4 + 180x^2 - 30}{(x^2+1)^4} = \frac{-30(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2+1)^4}. \end{aligned}$$

Wegen $x^2 + 1 > 0$ ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Für lokale Extremwerte muss gelten $f'(x) = 0$, hier also $5(x^2 - 1) = 0$. Das ist erfüllt für $x^2 = 1$, folglich sind mögliche Extremwerte $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

Wegen

$$f''(1) = \frac{10(1-3)}{(1+1)^3} = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2} < 0 \qquad \text{bzw.}$$

$$f''(-1) = \frac{-10(1-3)}{(1+1)^3} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} > 0$$

sind auch die hinreichenden Bedingungen für Extremwerte erfüllt; die Funktion hat ein lokales Maximum bei $\left(1; \frac{5}{2}\right)$ und ein lokales Minimum bei $\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$.

Für wendepunktverdächtige Stellen muss $f''(x) = 0$ gelten, hier also

$$10x(x^2 - 3) = 0.$$

Dies ist der Fall für $x = 0$ oder $x^2 = 3$. Kritische Punkte liegen also bei $x_3 = 0$, $x_4 = \sqrt{3}$ und $x_5 = -\sqrt{3}$.

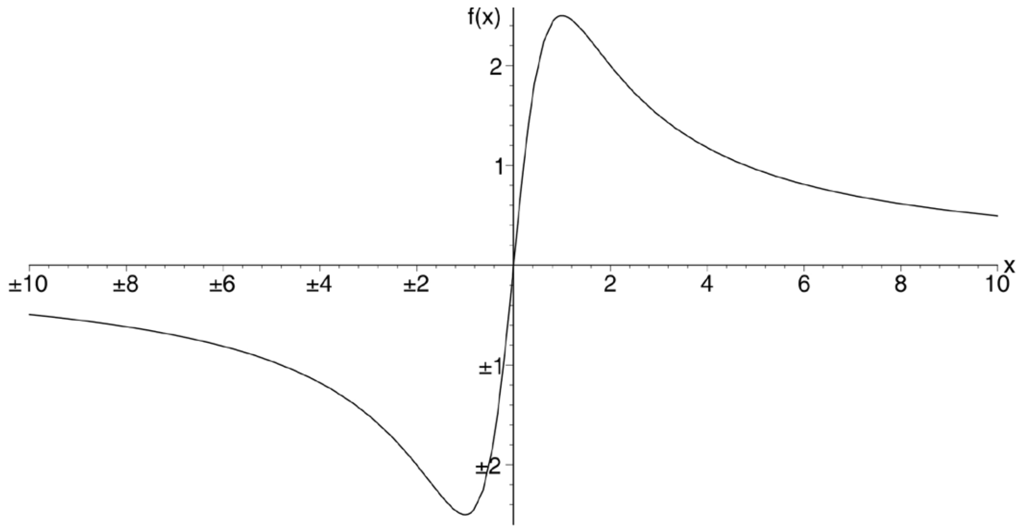
Es ist

$$f'''(0) = -\frac{30}{14} = -30 \neq 0 \qquad \text{und}$$

$$f'''(\sqrt{3}) = f'''(-\sqrt{3}) = \frac{-30(9-18+1)}{(3+1)^4} = \frac{240}{256} = \frac{15}{16} \neq 0.$$

Folglich sind alle kritischen Punkte wirklich Wendepunkte.

Skizze:



c) Es ist $f(5) = \frac{25}{26}$ und $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{\frac{1}{25}+1} = \frac{1}{26/25} = \frac{25}{26}$, d.h. $f(5) = f\left(\frac{1}{5}\right)$. Da die Funktion stetig ist und in diesem Bereich genau ein relatives Maximum bei $\left(1; \frac{5}{2}\right)$ hat, ist dies auch das absolute Maximum und die beiden Randpunkte sind absolute Minima.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Die Elastizität ε_f einer Funktion f berechnet sich im Punkt x_0 nach der Formel

$$\varepsilon_f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0\ .$$

b) Für $f(x) = x \cdot e^{1/x^2}$ ist

$$f'(x) = e^{1/x^2} + x \cdot e^{1/x^2} \cdot (-2) \cdot x^{-3} = \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) e^{1/x^2}.$$

Folglich gilt

$$\varepsilon_f(x) = \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) e^{1/x^2} \cdot \frac{1}{e^{1/x^2}} \cdot x = \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \cdot x;$$

und dies ist für alle $x \neq 0$ berechenbar.

Dieser Wert ist größer als Null, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide negativ sind.

1.Fall: $x > 0$. Dann ist

$$1 - \frac{2}{x^2} > 0$$
$$\iff x^2 - 2 > 0 \iff x^2 > 2 \iff x > \sqrt{2}.$$

2.Fall: $x < 0$. Es ist

$$1 - \frac{2}{x^2} < 0$$
$$\iff x^2 - 2 < 0 \iff x^2 < 2 \iff x > -\sqrt{2}.$$

Demzufolge ist $\varepsilon_f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in (-\sqrt{2}; 0)$ oder $x \in (\sqrt{2}; \infty)$.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $A \cdot B$ ist definiert für $n = p$ (also Fall 2).

b) A ist eine Matrix vom Typ 2x2, B ist vom Typ 3x2. Berechenbar sind also A^2 und $B \cdot A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -1-3 \\ 0+0 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & -2+3 \\ 0+0 & 0+9 \\ -4+0 & 4+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 9 \\ -4 & 22 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 6:

Es liegt eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung in der allgemeinen Form $y' = a(t)y + b(t)$ vor.

Sind $A(t)$ und $B(t)$ Stammfunktionen von $a(t)$ bzw.von $e^{-A(t)} \cdot b(t)$, so ergibt sich die allgemeine Lösung hiervon nach der Formel

$$y(t) = B(t) \cdot e^{A(t)} + C \cdot e^{A(t)}.$$

Es ist $a(t) = \cos t$, also $A(t) = \int \cos t dt = \sin t$ und

$$B(t) = \int e^{-\sin t} \cdot e^{\sin t} dt = \int 1 dt = t, \quad \text{woraus}$$

$$y(t) = t \cdot e^{\sin t} + C \cdot e^{\sin t} = (t + C)e^{\sin t}$$

folgt.

Probe:

$$y'(t) = e^{\sin t} + (t + C)e^{\sin t} \cdot \cos t = e^{\sin t} + y(t) \cos t.$$

Bemerkung: Durch Vorgabe eines Anfangswertes ließe sich C bestimmen; das ist hier aber nicht vorgesehen.

Lösung zu Aufgabe 7:

Zu lösen ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren allgemeine Form

$$y'' + ay' + by + c = 0 \quad (\text{mit } a, b, c \in \mathbb{R})$$

lautet. Diese hat die Lösung $y(t) = y_H(t) + y_S(t)$, dabei ist y_H die Lösung des zugehörigen homogenen Systems $y'' + ay' + by = 0$ und y_S ist irgendeine spezielle Lösung des inhomogenen Systems.

Nimmt man hierfür $y(t) = e^{\lambda t}$ als Lösungsansatz, dann ist $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ und $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$.

Hieraus erhält man nach Einsetzen in die Aufgabenstellung
$\lambda^2 e^{\lambda t} + a \cdot \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0$ bzw. $(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0$.

Da $e^{\lambda t}$ nicht 0 wird, muss also $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ sein (charakteristisches Polynom). In unserem Fall ist $a = 10$ und $b = 0$, d.h. es muss gelten

$$\lambda^2 + 10\lambda = 0 \quad \text{, also}$$

$$\lambda(\lambda + 10) = 0.$$

Hierfür erhält man die Lösungen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -10$, d.h. es ist

$$y_H(t) = C_1 e^{0 \cdot t} + C_2 e^{-10t} = C_1 + C_2 e^{-10t}.$$

y_S sei eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems, wegen $b = 0$ kann in unserem Falle

$$y_S(t) = -\frac{c}{a}t = -\frac{10}{-10}t = -t$$

gewählt werden. Wir erhalten

$$y(t) = y_H(t) + y_S(t) = C_1 + C_2 e^{-10t} - t.$$

Hierfür gilt $y'(t) = -10C_2 e^{-10t} - 1$ und $y''(t) = 100C_2 e^{-10t}$.
Nun ist $y(0) = 1$, d.h.

$$C_1 + C_2 \cdot e^0 - 0 = C_1 + C_2 = 1,$$

und $y'(0) = 9$, mithin

$$-10C_2 e^0 - 1 = -10C_2 - 1 = 9.$$

Die zweite Gleichung liefert $C_2 = -1$, woraus sofort $C_1 = 2$ folgt. Damit lautet die Lösung des AWP

$$y(t) = 2 - e^{-10t} - t.$$

Probe:
$y''(t)+10y'(t)+10 = 100\cdot(-1)e^{-10t}+10((-10)(-1)e^{-10t}-1)+10 = -100e^{-10t}+100e^{-10t} = 0.$

8 Klausur vom Februar 2007

Aufgabe 1 (4 Punkte): Besitzt die Menge $M = \{x | (x-1)(x-2) < x^2 - 1\}$ ein Minimum, Maximum, Infimum, Supremum?

Aufgabe 2 (4 Punkte): Von einer Zahlenfolge $\{S_n\}$ sei bekannt:

$$S_1 = \frac{1}{10}, \quad S_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100}, \quad \ldots, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} 10^{-i} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie, falls das möglich ist, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Aufgabe 3 (3 Punkte): Berechnen Sie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x+x^2}{3x^2+2} \text{ und } \lim_{x\to\infty} \frac{1+x+x^2}{3x^2+2}.$$

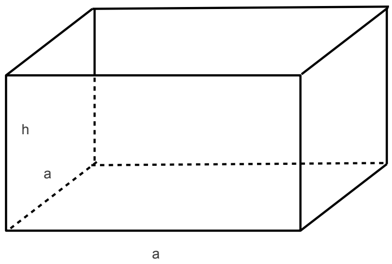
Aufgabe 4 (6 Punkte): Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimme man die Teilmengen von $\mathbb{R}$, auf denen die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

a) monoton wachsend, b) konvex ist.

Aufgabe 5 (8 Punkte):

Geben Sie die Maße eines oben offenen Bassins mit quadratischer Bodenfläche und senkrecht darauf stehenden Wänden (das Bassin ist ein oben offener Quader) an, welches bei vorgegebenem Volumen V eine möglichst kleine Fläche für Wände und Boden (Oberfläche) besitzt. Welchen Zahlenwert erhält man für $V = 4\mathrm{m}^3$?



Aufgabe 6 (4 Punkte): Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \left(\frac{3}{x} - 8e^{-4x} \right) dx.$$

Aufgabe 7 (5 Punkte):

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Kurve der Funktion $f(x) = x + x^2$, dem Intervall $I = [0, 5]$ auf der x–Achse und den Loten in den Randpunkten $(0, f(0))$, $(5, f(5))$ begrenzt wird.

b) Welchen Wert erhalten Sie, wenn I durch das Intervall $[-2, 2]$ ersetzt wird?

Aufgabe 8 (6 Punkte): Welche Funktionen P sind Lösungen der Differentialgleichung

$$P'(x) = -aP(x)b,$$

wobei $a > 0$, $b > 0$ gegebene reelle Zahlen sind? Welche Funktion $P(x)$ erfüllt die Anfangsbedingung $P(0) = 1$?

Lösung zu Aufgabe 1:

Wir versuchen, M anders zu beschreiben: Es ist $x \in M$ genau dann, wenn $(x - 1)(x - 2) < x^2 - 1$. Das ist äquivalent zu $x^2 - 3x + 2 < x^2 - 1$, also zu $-3x < -3$ bzw. $x > 1$. Also gilt $M = \{x | x > 1\}$.

Folglich besitzt M kein Minimum und kein Maximum. Es ist $\inf M = 1$. M hat kein Supremum, häufig schreibt man aber $\sup M = +\infty$.

Lösung zu Aufgabe 2:

Offenbar ist $S_n = 0,\underbrace{1\ldots1}_{n-mal}$ und daher $S_n < 0,2$ für alle n.

Die Folge $\{S_n\}$ ist beschränkt und monoton wachsend, folglich existiert $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Wir setzen $b_n := 10^{-n}$, dann ist $b_n = b_{n-1} \cdot 10^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Es ist $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ (S_n ist die n-te Partialsumme der geometrischen Folge $\{b_n\}$, und es ist $q = 10^{-1}$). Daher wird

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_i = \frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{10}{9} = \frac{1}{9}.$$

In der Tat ist $0,1\overline{1} = \dfrac{1}{9}$ (weil $1:9 = 0,1\overline{1}$ ist).

Hier wurde benutzt, dass die n-te Partialsumme einer geometrischen Folge mit dem Quotienten q und dem Anfangswert a_0 gerade $S_n = a_0 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$ ist.

Lösung zu Aufgabe 3:

Für $x \neq 0$ ist $\quad \dfrac{x^2+x+1}{3x^2+2} = \dfrac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}.$

Deshalb ist

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{3x^2+2} = \frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{3+2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

wegen $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$.

Dagegen ist

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+1}{3x^2+2} = \frac{1}{2}.$$

Lösung zu Aufgabe 4:

Wir erkennen, f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = x^2 - 2x$ sowie $f''(x) = 2x - 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Auf einem Bereich (Intervall) Ω ist f monoton wachsend genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ ist, das bedeutet hier

$$x(x-2) \geq 0 \qquad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Wir wollen Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ finden, für welche dies richtig ist. Zur Auflösung der Ungleichung unterscheiden wir die Fälle $x \geq 0$ und $x \leq 0$:

a) Im Fall $x \geq 0$ gilt $x(x-2) \geq 0$ dann und nur dann, wenn auch $x - 2 \geq 0$ ist. Daher ist $\Omega_1 = \{x|x \geq 2\}$.

b) Im Fall $x \leq 0$ gilt die Ungleichung genau dann, wenn $x - 2 \leq 0$, also $x \leq 2$ ist. Das bedeutet $\Omega_2 = \{x|x \leq 0\}$.

Wir erhalten: f ist auf $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ monoton wachsend.

Aus der Analysis ist bekannt, dass eine 2-mal differenzierbare Funktion f auf einer Menge M konvex genau dann ist, wenn $f''(x) \geq 0$ gilt.

In unserer Aufgabe bedeutet dies $2x - 2 \geq 0$ für alle $x \in M$. Nun ist $2x - 2 \geq 0$ gleichbedeutend zu $x \geq 1$. Daher ist f auf $M = \{x|x \geq 1\}$ konvex.

Lösung zu Aufgabe 5:

Für Volumen V und Oberfläche O gelten

$$V = h \cdot a^2 \quad \text{und} \quad O = a^2 + 4ah.$$

Dann ist $h = \dfrac{V}{a^2}$ (wegen $a > 0$ ist Division erlaubt) und damit $O = a^2 + 4\dfrac{V}{a}$.

Beachte: O ist eine Funktion von a.

Wir suchen a, welche O minimieren unter der natürlichen Einschränkung $a > 0$. Notwendig für ein Extremum ist

$$O' = \frac{dO}{da} = 2a - 4Va^{-2} = 0.$$

Wegen $a > 0$ ist die Bedingung gleichwertig zu $2 = 4Va^{-3}$ d.h. $a = \sqrt[3]{2V}$. Das zugehörige h ist

$$h = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \frac{V\sqrt[3]{2V}}{2V} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V} = \frac{1}{2}a.$$

Weil die zweite Ableitung $O''(a) = 2 + 8Va^{-3}$ ist, folgt $O''\left(\sqrt[3]{V}\right) > 0$ und bei der extremwertverdächtigen Stelle $a = \sqrt[3]{2V}$ liegt ein relatives Minimum vor. Da es nur eine extremwertverdächtige Stelle gibt, ist diese die Lösung.

Für $V = 4m^3$ ergibt sich $a = 2\ (m)$ und $h = 1\ (m)$.

Lösung zu Aufgabe 6:

Es ist

$$\int \left[\frac{3}{x} - 8e^{-4x}\right] dx = 3\int \frac{1}{x}dx - 8\int e^{-4x}dx = 3\ln|x| + 2e^{-4x} + C.$$

Lösung zu Aufgabe 7:

a) Wegen $x + x^2 > 0$ für $x > 0$ ist der Flächeninhalt

$$\int_0^5 (x + x^2)dx = \frac{25}{2} + \frac{125}{3} = \frac{325}{6} \approx 54,4\ldots$$

b) Es ist $x + x^2 < 0$ für $-1 < x < 0$.

Die gesuchte Fläche berechnet sich als

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{-1}[x + x^2]dx - \int_{-1}^{0}[x + x^2]dx + \int_{0}^{2}[x + x^2]dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{8}{3} + 2 \\
&= \frac{17}{3} \approx 5,6\ldots
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8:

Das charakteristische Polynom lautet $\lambda + ab = 0$, daher ist $P(x) = e^{-abx}$ und natürlich ist $P(0) = e^0 = 1$.

9 Klausur vom Januar 2008

Aufgabe 1: (7 Punkte)
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen von

a) $\frac{6x-2}{2x-1} - \frac{3x-4}{x-2} \leq 0$ b) $|x+1| - |x| + |x-1| \leq 5$ c) $|x^2 - 4x - 5| < 7$

Aufgabe 2: (6 Punkte)
a) Treffen Sie Aussagen zur Monotonie der Zahlenfolge $(a_n) = (n^2 - 4n - 9)$.
b) Berechnen Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen mit

$$a_n = \frac{6n^2+5n+4}{3n^2-5n-4} + \frac{4n}{3n^2-5n+4} \qquad \text{und} \qquad b_n = e^{\sin \frac{4\pi n^2 - \pi n + 3}{2n^2-7}}.$$

Aufgabe 3: (8 Punkte)
Betrachtet werde die Funktion f mit $f(x) = -2(x-1)^3 - 9(x-1)^2 - 12(x-1) - 4$ auf dem Intervall $[-2; 2]$.
a) Bestimmen Sie alle Maxima und Minima der Funktion; unterscheiden Sie hierbei zwischen relativen und absoluten Extremwerten.
b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.
c) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion im angegebenen Intervall.

Aufgabe 4: (7 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{\sin x} dx$ b) $\int e^x \cdot (x-4) dx$ c) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Aufgabe 5: (9 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:

a) $y'(x) + \frac{y(x)}{x+1} = e^{-1}$; $y(0) = 1$

b) $y'' + 4y' = 21y$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 10$

c) $y'' - 8y' + 16y = 48$

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ und den Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

berechne man, wenn möglich
a) Av und vA.
b)$2A - B^T$.
c) AB
d) Für welche reellen Zahlen α ist die Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & 8 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$ singulär?

Lösung zu Aufgabe 1:

a)
$$\frac{6x-2}{2x-1} - \frac{3x-4}{x-2} \leq 0$$

Es muss $x \neq \frac{1}{2}$ und $x \neq 2$ gelten, da die Nenner nicht negativ werden dürfen. Folglich sind drei Fälle zu unterscheiden:

(i)	$x > 2;$	d.h.	$x-2>0$	und	$2x-1>0;$
(ii)	$\frac{1}{2} < x < 2;$	d.h.	$x-2<0$	und	$2x-1>0;$
(iii)	$x < \frac{1}{2};$	d.h.	$x-2<0$	und	$2x-1<0.$

Um die Ungleichung zu lösen, muss die gesamte Ungleichung mit beiden Nenner-Termen multipliziert werden. Im Falle (i) wird mit 2 positiven Werten multipliziert, dass Relationszeichen ändert sich nicht:

$$\frac{6x-2}{2x-1} - \frac{3x-4}{x-2} \leq 0 \text{ gdw.}$$

$$\begin{aligned}
(6x-2)(x-2)-(3x-4)(2x-1) &\leq 0\\
6x^2-2x-12x+4-(6x^2-8x-3x+4) &\leq 0\\
-14x+4+11x-4 &\leq 0\\
-3x &\leq 0\\
x &\geq 0.
\end{aligned}$$

Das ist für alle x dieses Bereiches gewährleistet wegen $x > 2$, es ist also $\mathcal{L}_1 = (2; \infty)$.

Im Fall (ii) multiplizieren wir mit einem positiven und einem negativen Wert, das Relationszeichen kehrt sich um und die Ungleichung ist demnach äquivalent zu $x \leq 0$. Das ist ein Wiederspruch zu $\frac{1}{2} < x < 2$, folglich gilt $\mathcal{L}_2 = \emptyset$.

Im Fall (iii) multiplizieren wir mit zwei negativen Werten, dass Relationszeichen bleibt erhalten und die Ungleichung ist wie bei (i) äquvalent zu $x \geq 0$.

Wegen $x < \frac{1}{2}$ gilt also $\mathcal{L}_2 = \left[0; \frac{1}{2}\right)$, folglich ergibt sich die Gesamtlösungsmenge

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_3 = \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(2; \infty\right)$ bzw.

$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < \frac{1}{2}$ oder $x < 2\}$.

b)

$$|x+1| - |x| + |x-1| \leq 5$$

Bei Aufgaben dieser Art ist es wichtig, die Definition des absoluten Betrages exakt anzuwenden:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0 \end{cases} .$$

Zu unterscheiden sind hier vier Fälle:

(i) $x \geq 1$ (alle Werte in den Beträgen sind nichtnegativ)

Die Ungleichung ist äquivalent zu $x + 1 - x + x - 1 \leq 5$, also $x \leq 5$ folglich ist $\mathcal{L}_1 = [1; 5]$

(ii) $0 \leq x < 1$

Auflösen der Beträge führt zu $x + 1 - x + (-(x-1)) \leq 5$, also $-x + 2 \leq 5$, was für alle x des Bereiches erfüllt ist, es folgt $\mathcal{L}_2 = [0; 1)$

(iii) Für $-1 \leq x < 0$ erhalten wir $x + 1 - (-x) + (-(x-1)) \leq 5$ bzw. $x + 2 \leq 5$, d.h. $\mathcal{L}_3 = [-1; 0)$

(iv) Bleibt $x < -1$ zu betrachten; dies führt zu

$-(x+1) - (-x) + (-(x-1)) \leq 5$ bzw. $-x \leq 5$, was äquivalent ist zu $x \geq -5$. Es ist also $\mathcal{L}_4 = [-5; -1)$,

Die Zusammenfassung der Teillösungen liefert $\mathcal{L} = [-5; 5]$.

c) Es ist $|x^2 - 4x - 5| < 7$ gdw.

$$-7 < x^2 - 4x - 5 < 7, \quad \text{bzw.}$$
$$-2 < x^2 - 4x < 12.$$

Setze $y(x) = x^2 - 4x - 12$. $y(x)$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit $y(x_1) = y(x_2) = 0$ und

$$x_1 = 2 - \sqrt{4 + 12} = 2 - 4 = -2,$$
$$x_2 = 2 + \sqrt{4 + 12} = 2 + 4 = 6.$$

Folglich ist $y(x) < 0$ für $x \in \mathcal{L}_1 = (-2; 6)$.

Zur Lösung der Ungleichung $-2 < x^2 - 4x$ setze $z(x) = x^2 - 4x + 2$. z hat die Nullstellen $x_3 = 2 - \sqrt{2}$ und $x_4 = 2 + \sqrt{2}$.

Die Ungleichung ist äquivalent zu $z(x) > 0$, was für alle $x \in \mathcal{L}_2 = \mathbb{R} \setminus [2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}]$ der Fall ist.

Nun ist

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (-2; 6) \backslash [2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}] = (-2; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; 6).$$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Betrachtet man die Differenz der Folgeglieder a_{n+1} und a_n, so erhält man

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)^2 - 4(n+1) - 9 - (n^2 - 4n - 9) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 - 9 - n^2 + 4n + 9 \\ &= 2n - 3. \end{aligned}$$

Dieser Wert ist für $n = 1$ negativ und für $n \geq 2$ größer als Null. Folglich ist diese Zahlenfolge ab $n = 2$ streng monoton wachsend.

b)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 + 5n + 4}{3n^2 - 5n - 4} + \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3n^2 - 5n + 4} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(6 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2})}{n^2(3 - \frac{5}{n} - \frac{4}{n^2})} + \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \frac{4}{n}}{n^2(3 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2})} \\ &= \frac{6 + 0 + 0}{3 - 0 - 0} + \frac{0}{3 - 0 + 0} = 2. \end{aligned}$$

Für die Zahlenfolge b_n ist es wegen der Stetigkeit der e-Funktion ausreichend, den Grenzwert des Exponenten zu bestimmen.

$$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{4\pi n^2 - \pi n + 3}{2n^2 - 7} = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{n^2(4\pi - \frac{\pi}{n} + \frac{3}{n^2})}{n^2(2 - \frac{7}{n^2})} = \sin \frac{4\pi}{2} = \sin 2\pi = 0.$$

Hierbei wird ausgenutzt, dass auch die Sinusfunktion stetig ist. Folglich ist

$$\lim_{n\to\infty} b_n = e^0 = 1$$

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Zur Bestimmung relativer Extremwerte ist die Berechnung der ersten beiden Ableitungen der Funktion günstig, es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6(x-1)^2 - 18(x-1) - 12 \\ &= -6x^2 + 12x - 6 - 18x + 18 - 12 \\ &= -6x^2 - 6x = -6x(x+1), \end{aligned}$$

$$f''(x) = -12x - 6.$$

Notwendige Bedingung für einen relativen Extremwert ist $f'(x) = 0$, dies ist für

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -1$$

der Fall. Wegen $f''(0) = -6$ liegt bei $P_1(0;1)$ ein lokales Maximum vor. Bei $P_2 = (-1;0)$ hat die Funktion wegen $f''(-1) = 6$ ein lokales Minimum. Für die Randwertpunkte erhalten wir $f(2) = -27$ und $f(-2) = 5$. Folglich liegt bei $P_3(2;-27)$ das absolute Minimum der Funktion im betrachteten Intervall und bei $(-2;5)$ das absolute Maximum.

b) in a) haben wir bereits eine Nullstelle der Funktion erhalten. Setzt man jetzt $y = x - 1$, so erhält die Funktion die Gestalt

$$f(y) = -2y^3 - 9y^2 - 12y - 4$$

und die bekannte Nullstelle liegt bei $y = -2$.

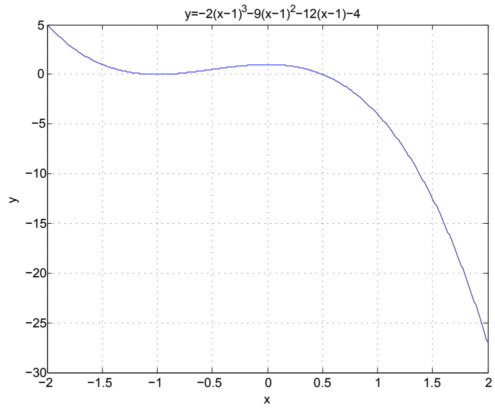
Die Polynomdivision ergibt $\quad (-2y^3 - 9y^2 - 12y - 4) : (y + 2) = -2y^2 - 5y - 2.$

Weitere Nullstellen können also als Lösungen der Gleichung $-2y^2 - 5y - 2 = 0$, welche äquivalent zu $y^2 + \frac{5}{2}y + 1 = 0$ ist, bestimmt werden. Wir erhalten

$$y_{1/2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4},$$

also $y_1 = -2$ und $y_2 = -\frac{1}{2}$. Mit $x = y + 1$ ergibt sich jetzt $x_1 = -1$ (bereits bekannt, doppelte Nullstelle) und $x_2 = \frac{1}{2}$, d.h. $P_5\left(\frac{1}{2};0\right)$ ist eine weitere Nullstelle.

c) Skizze:



Lösung zu Aufgabe 4:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{\sin x} dx = \left[e^{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e^1 - e^0 = e - 1.$

b) Die Lösung erfolgt durch partielle Integration mit dem Ansatz $v'(x) = e^x$ und $u(x) = x - 4$. Nach

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot (x-4)de &= (x-4)e^x - \int e^x dx \\ &= (x-4)e^x - e^x + C = (x-5)e^x + C.\end{aligned}$$

c) Mit $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = \ln x$ ergibt sich bei partieller Integration

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Umstellen ergibt

$$2 \cdot \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2$$

also

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

Lösung zu Aufgabe 5:

a) Überführung der Differentialgleichung in die Normalform liefert

$$y'(x) = -\frac{1}{x+1}y(x) + \frac{1}{e},$$

d.h. es ist $a(x) = -\frac{1}{x+1}$ und $b(x) = \frac{1}{e}$.

Hieraus ergibt sich durch Integration

$$A(x) = -\int \frac{1}{x+1}dx = -\ln(x+1),$$

$$B(x) = \int e^{\ln(x+1)} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e}\int (x+1)dx = \frac{1}{e}(\frac{1}{2}x^2 + x),$$

also

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{e}\Big(\frac{1}{2}x^2 + x\Big) \cdot e^{-\ln(x+1)} + C \cdot e^{-\ln(x+1)} \\ &= \frac{x^2+2x}{2e(x+1)} + C \cdot \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

Probe: (war in der Aufgabenstellung nicht gefragt)

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2e} \cdot \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x)}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2(x+1)^2 - x^2 + 2x}{2e(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x^2+2x}{2e(e+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2(x+1)^2}{2e(x+1)^2} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

b) $y'' + 4y' - 21y = 0$

Mit $a = 4$, $b = -21$, $c = 0$ und $y_s = 0$ ist das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0, \text{ es hat die Nullstellen}$$
$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{4+21} = 3,$$
$$\lambda_2 = -2 - \sqrt{4+21} = -7.$$

Daher wird

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{3x} + Be^{-7x} \quad \text{und} \\ y'(x) &= 3Ae^{3x} - 7Be^{-7x}. \end{aligned}$$

Die Lösung der Anfangswertprobleme liefert:

$A + B = 0$ und $3A - 7B = 10$ und daher $A = 1$ $B = -1$, d.h.

$$y(x) = e^{3x} - e^{-7x}.$$

c) $y'' - 8y' + 16y - 48 = 0$

Mit $a = -8$, $b = 16$, $c = -48$ und $y_s = -\frac{-48}{16} = 3$ bekommt man

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \quad \text{mit den Nullstellen}$$
$$\lambda_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16-16},$$

d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Daher ist $y(x) = Ae^{4x} + Bxe^{4x} + 3$.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) Eine $(3;3)$-Matrix A kann von rechts mit einem Spaltenvektor der Dimension 3 multipliziert werden, von links mit einem Zeilenvektor. Berechenbar ist also nur Av und wir erhalten

$$Av = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

b) Es folgt

$$2A - B^T = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

c) Es ist

$$AB = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 5 \\ 0 & 9 & 0 \\ 16 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

d) Eine Matrix ist singulär, wenn ihre Determinante null ist, d.h.

$$\alpha^2 - 16 = 0 \text{ , also } \alpha^2 = 16$$

Das ist der Fall für $\alpha = \pm 4$.

10 Klausur vom Februar 2009

Aufgabe 1 (7 Punkte):

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist

$$a)\ \frac{|x^2 - 4x + 4|}{|x-2| \cdot |x+3|} \leq 1 \qquad \text{bzw.} \qquad b)\ \frac{2-x}{4+x} \leq \frac{3-x}{1+x}?$$

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Berechnen Sie den Grenzwert (falls dieser existiert)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte):

$A \subseteq \mathbb{R}$ sei der Definitionsbereich von

$$f(x) = \frac{\ln(x+4)}{\sqrt{25 - x^2} - 4}.$$

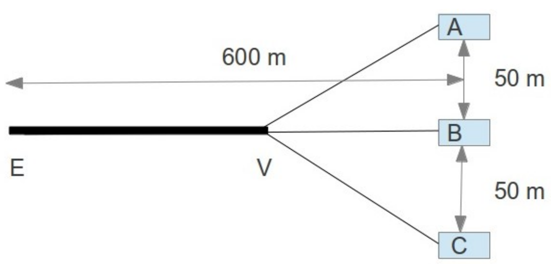
Geben Sie A an sowie, falls vorhanden, das Infimum, Maximum, Minimum und Supremum dieser Menge. Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x)$.

Aufgabe 4 (8 Punkte):

Die Funktion $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$ werde auf $0 \leq x \leq 2$ betrachtet. Wo liegen relative (lokale) und globale (absolute) Extrema? Wo ist f auf [0,2] konvex bzw. konkav?

Aufgabe 5 (5 Punkte):

Eine Wasserleitung soll zu drei Häusern A, B, C, die je 50 m voneinander entfernt sind, verlegt werden (siehe Skizze). An welcher Stelle hat die Abzweigung zu erfolgen, damit die Kosten möglichst gering sind, wenn jede der drei Einzelleitungen pro Meter nur $\frac{2}{5}$ der Hauptleitung kostet?



Aufgabe 6 (8 Punkte):

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:

$a)\ y'(x) = e^{x-y(x)} \qquad b)\ y'' - 4y' + 3 = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -\frac{29}{4}.$

Aufgabe 7 (7 Punkte):

Berechnen Sie:

$$a) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx \qquad b) \int_0^{\ln 5} e^x\, dx \qquad c) \int_0^{\infty} e^{-5x}\, dx$$

$$d) \int (2x^2 - 7) \ln x\, dx.$$

Aufgabe 8 (2 Punkte):

Jemand möchte nach 10 Jahren 80.000 Euro zur Verfügung haben. Welchen Betrag muss er einzahlen, wenn das Guthaben mit 4,5 % p.a. verzinst wird, die Zinsgutschrift jeweils am Jahresende erfolgt und die Zinsen auf dem Konto verbleiben?

Lösung zu Aufgabe 1 a:

Die linke Seite der Ungleichung ist nicht erklärt für $x = 2$ und $x = -3$.

Es ist $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = |(x-2)^2| = |x-2| \cdot |x-2|$. Folglich ist die Aufgabe äquivalent zu

$$\frac{|x-2||x-2|}{|x-2||x+3|} \leq 1 \ \ ; x \neq 2\, , x \neq -3$$

und mithin zu

$$|x-2| \leq |x+3|.$$

1) Untersuche den Fall $x > 2$, dann ist auch $x + 3 > 5 > 0$ und $|x-2| \leq |x+3|$ ist gleichwertig zu $x - 2 \leq x + 3$, also $-2 \leq 3$.

   Das ist für alle $x > 2$ (unser Teilfall) erfüllt.

   $$\Longrightarrow \mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}.$$

2) Für $-3 < x < 2$ ist $x + 3 > 0$ und $x - 2 < 0$. Die Ungleichung bedeutet

   $$2 - x \leq x + 3 \ \Leftrightarrow\ 2x \geq -1 \ \Leftrightarrow\ x \geq -\frac{1}{2}.$$

   Daher wird

   $$\mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{2} \leq x < 2\}.$$

3) Für $x < -3$ ist $x + 3 < 0$ und $x - 2 < 0$. Folglich ist $2 - x \leq -3 - x$ zu lösen, was unmöglich ist (wäre gleichbedeutend zu $2 \leq -3$. Daher ist $\mathcal{L}_3 = \varnothing$.

$$\Longrightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = [-\frac{1}{2}, \infty) \setminus \{2\}.$$

Lösung zu Aufgabe 1 b:

Wir lösen die Ungleichung durch Betrachtung aller möglichen Fälle. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass $x \neq -4$ und $x \neq -1$ gelten muss.

1. Fall: $4 + x > 0$, d.h. $x > -4$. Dann ist die Ungleichung äquivalent zu

$$2 - x \leq \frac{3-x}{1+x} \cdot (4+x).$$

Fall 1.1: $1 + x > 0$, d.h. $x > -1$

$$\begin{aligned}
(2-x)(1+x) &\leq (3-x)(4+x)\\
2 - x + 2x - x^2 &\leq 12 - 4x + 3x - x^2\\
2 + x &\leq 12 - x\\
2x &\leq 10\\
x &\leq 5 \qquad\qquad \mathcal{L}_1 = (-1; 5]
\end{aligned}$$

Fall 1.2: $1 + x < 0$, d.h. $x < -1$

$$\begin{aligned}
(2-x)(1+x) &\geq (3-x)(4+x)\\
2 + x &\geq 12 - x\\
x &\geq 5 \qquad\qquad \text{Widerspruch!}
\end{aligned}$$

2. Fall: $4 + x < 0$, d.h. $x < -4$. Dann gilt auch $x < -1$ und die Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} (2-x)(1+x) &\leq (3-x)(4+x) \\ 2 + 2x - x - x^2 &\leq 12 + 3x - 4x - x^2 \\ -x^2 + x + 2 &\leq -x^2 - x + 12 \\ x &\leq 5 \qquad\qquad \mathcal{L}_2 = (-\infty; -4) \end{aligned}$$

Die Zusammenfassung beider Lösungsmengen ergibt $\mathcal{L} = (-\infty; -4) \cup (-1; 5]$.

Lösung zu Aufgabe 2:

Für alle $x \neq 1$ ist $\qquad \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \dfrac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Wir betrachten nun zwei Folgen, die von links bzw. rechts gegen 1 konvergieren. Für $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n+1}{x_n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (2n+1) = +\infty.$$

Für $\widetilde{x}_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{x}_n+1}{\widetilde{x}_n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -\lim_{n\to\infty} (2n-1) = -\infty.$$

Der Grenzwert existiert also nicht. (Um dies zu zeigen reicht ein Gegenbeispiel.)

Es existieren jedoch die beiden einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty.$$

Lösung zu Aufgabe 3:

Da die Logarithmusfunktion nur für positive Argumente definiert ist, ergibt sich aus dem Zähler sofort $x > -4$.

Aus dem Nenner erhält man $25 - x^2 \geq 0$ (Definition der Wurzel nur für nichtnegative Argumente), also $|x| \leq 5$ bzw. $x \in [-5; 5]$.

Außerdem darf der Nenner nicht 0 werden, es muss also gelten $\sqrt{25 - x^2} \neq 4$. Das ist der Fall für $25 - x^2 \neq 16$, folglich ist $x^2 \neq 9$, also $x \neq \pm 3$.

Damit ergibt sich $D(f) = (-4; 5] \setminus \{-3; 3\} = A$.

Diese Menge hat kein Minimum, aber es ist $\inf(A) = -4$.

Außerdem gilt $\max(A) = \sup(A) = 5$.

Eine Nullstelle kann nur vorliegen, wenn der Zähler 0 wird, also $\ln(x + 4) = 0$, d.h. $x + 4 = 1$. Dies ist der Fall für $x = -3$, dort ist f aber gar nicht definiert. Demnach hat die Funktion keine Nullstelle.

Lösung zu Aufgabe 4:

Die Funktion ist auf dem gesamten Definitionsbereich differenzierbar. Wir berechnen $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)e^{-x} - (x-1)^2 e^{-x} && \text{(Produktregel)} \\ &= (x-1)e^{-x}(2-x+1) \\ &= (x-1)e^{-x}(3-x) \\ &= e^{-x}(4x-x^2-3) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema ist $f'(x) = 0$. Das führt auf

$$(x-1)(3-x)e^{-x} = 0.$$

Wegen $e^{-x} \neq 0$ für alle x muss hierfür gelten

$$(x-1)(3-x) = 0.$$

Kritische Punkte sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. Weil $x_2 \notin [0,2]$ ist, ist nur $x_1 = 1$ ein Kandidat für ein Extremum.

Um zu entscheiden, ob wirklich ein Extremum vorliegt und ob es ein Minimum oder ein Maximum ist, kann die 2. Ableitung von f untersucht werden. Möglich ist auch die folgende Überlegung: Es ist

$$f(0) = 1\ ,\ f(1) = 0\ ,\ f(2) = e^{-2} < 1 \text{ aber } f(2) > 0.$$

Folglich muss f bei $x_1 = 1$ ein Minimum besitzen, dieses ist auch das globale Minimum auf $[0,2]$. Ein lokales Maximum existiert in $(0;2)$ nicht, das globale Maximum wird am Rand angenommen, und zwar bei $\overline{x} = 0$.

Um Konvexität nachzuweisen, kann die 2. Ableitung herangezogen werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} f''(x) &= [-e^{-x}(x^2-4x+3)]' \\ &= -e^{-x}(2x-4) + e^{-x}(x^2-4x+3) && \text{Produktregel} \\ &= e^{-x}(x^2-6x+7). \end{aligned}$$

Dies wird 0 für $x^2 - 6x + 7 = 0$, also $x = 3 \pm \sqrt{9-7} = 3 \pm \sqrt{2}$.

In $[0,2]$ liegt die Nullstelle $x = 3 - \sqrt{2}$. Es ist $f''(0) > 0$ und $f''(+2) < 0$.

Folglich ist f in $[0\ ;\ 3-\sqrt{2}]$konvex und in $[3-\sqrt{2}\ ;\ 2]$ konkav.

Lösung zu Aufgabe 5:

Setzt man die Kosten für 1 m Hauptleitung mit 1 [GE] an, so erhält man die Kostenfunktion

$$\begin{aligned} k(x) &= (600-x) + (2\sqrt{2500+x^2} + x)\frac{2}{5} \\ &= 600 - \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{2500+x^2}. \end{aligned}$$

Man beachte $x \geq 0$.

Notwendige Bedingung für ein Minimum ist $k'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} k'(x) &= -\frac{3}{5} + \frac{4}{10} \cdot 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{2500+x^2}} \\ &= -\frac{3}{5} + \frac{4x}{5 \cdot \sqrt{2500+x^2}} \end{aligned}$$

$$k'(x) = 0 \quad \text{bedeutet} \quad \begin{aligned} 4x &= 3\sqrt{2500 + x^2} \\ 16x^2 &= 9(2500 + x^2) \\ 7x^2 &= 22500 \\ x^2 &= 3214,28\ldots \\ x &= 56,69. \end{aligned}$$

An den “Rändern“ (dies entspricht den Situationen, dass die Hauptleitung gar nicht gebaut wird, also drei Einzelleitungen zu den Häusern gehen, oder die Hauptleitung 600m lang wird, also bis zu Haus 2 verläuft, und dann rechtwinklig zwei Einzelleitungen angeschlossen werden) ergeben sich die Werte

$$k(0) = 600 + \frac{2}{5} \cdot 100 = 640 \quad \text{und}$$

$$k(600) = \frac{2}{5}(600 + 2\sqrt{2500 + 360000}) = 721,66.$$

Beide Werte sind größer als $k(56,69) = 626,46$, die Hauptleitung muss also $56,69$m vor Haus 2 enden, d.h. sie ist $543,31$ m lang.

Lösung zu Aufgabe 6:

a) Die Gleichung $y' = e^{x-y}$ kann man auch schreiben als $y' = \frac{e^x}{e^y}$, d.h. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$. Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned} e^y dy &= e^x dx, \quad \int e^y dy = \int e^x dx, \quad \text{also} \\ e^y &= e^x + C. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $y(x) = \ln(e^x + C)$, was für $e^x + C > 0$ definiert ist, also $C \geq 0$ für alle x.

b) $y'' - 4y' + 3 = 0$ ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und dem charakteristischen Polynom $\lambda^2 - 4\lambda = 0$. Hierzu gehören die Werte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 4$.

Also ist $y_H(x) = A + Be^{4x}$ und $y_s(x) = \frac{3}{4}x$, somit $y(x) = A + Be^{4x} + \frac{3}{4}x$.

Wir haben ein Anfangswertproblem, können also die Konstanten A und B bestimmen:

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B = 1 \\ y'(0) &= 4B + \frac{3}{4} = -\frac{29}{4}, \quad \text{also} \quad 4B = -\frac{32}{4} = -8, \quad \text{d.h.} \\ B &= -2 \quad \text{und} \quad A = 3. \end{aligned}$$

Die Lösung lautet $y(x) = 3 - 2e^{4x} + \frac{3}{4}x$.

Lösung zu Aufgabe 7:

a)

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{3} + 1} \cdot x^{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C.$$

b) Es gilt:

$$\int_0^{\ln 5} e^x dx = e^{\ln 5} - e^0 = 5 - 1 = 4.$$

c) Zu berechnen ist ein uneigentliches Integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-5x} dx = \left[-\frac{1}{5} e^{-5x} \right]_0^{\infty} = \lim_{a \to \infty} \left(-\frac{1}{5} \right) \cdot e^{-5a} - \left(-\frac{1}{5} e^0 \right) = 0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

d) Wir berechnen das Integral mit dem Verfahren der partiellen Integration. Hierzu setzen wir

$$\ln x = f(x) \quad \text{und} \quad (2x^2 - 7) = g'(x) \quad \text{, dann ist}$$

$$\frac{1}{x} = f'(x) \quad \text{und} \quad \left(\frac{2}{3} x^3 - 7x \right) = g(x).$$

$$
\begin{aligned}
\int (4x^3 - 7)\ln x \, dx &= \ln x \left(\frac{2}{3}x^3 - 7x\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}x^3 - 7x\right) dx \\
&= \ln x \left(\frac{2}{3}x^3 - 7x\right) - \frac{2}{3}\int x^2 + \int 7dx \\
&= \ln x \left(\frac{2}{3}x^3 - 7x\right) - \frac{2}{9}x^3 + 7x + C.
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 8:

Die Formel $K_n = K_0 \cdot (1+p)^n$ liefert mit $K_n = 80.000$, $n = 10$ und $p = 0,045$ nach Umstellen nach K_0

$$K_n = K_0 \cdot 1,045^n \text{ , also}$$

$$K_0 = \frac{80.000}{1,045^{10}} = 51.514,21.$$

Es müssen zu Anfang 51.514,21 Euro eingezahlt werden.

11 Klausur vom Februar 2010

Aufgabe 1 (6 Punkte): Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$ und geben Sie die Lösungsmenge an.

$$a)\ |3x+4| > |x+1| \qquad b)\ |6x-9| = x^2.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte): Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{7n-2} \cdot \frac{11-14n}{10n+8} \qquad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{2^{x+1}+4^x}{4^{x+1}} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{2x^2-\sqrt{2}x+1}{5x+2}.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte): Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{2x-2}{2+x^2-2x} - 1$$

a) Bestimmen Sie alle Maxima und Minima dieser Funktion. Unterscheiden Sie dabei zwischen relativen und absoluten Extremwerten.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

c) Erstellen Sie eine Skizze der Funktion.

Aufgabe 4 (6 Punkte): Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$a)\ \int_1^0 5x^4 - 3\sqrt[3]{x}\,dx \qquad b)\ \int_1^e \ln x\,dx \qquad c)\ \int (3x^2+7)\cdot\sqrt{x^3+7x-2}\,dx.$$

Aufgabe 5 (8 Punkte): Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme

$$a)\ y' + (3-4x)y - e^{2x^2} = 0 \qquad b)\ y'' - 3y' = 7;\ y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{2}{3} \qquad c)\ y''(x) = \sin x$$

Aufgabe 6 (6 Punkte): Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, sofern möglich, A^2, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und $A^T A$.

Lösung zu Aufgabe 1 a:

Zur Lösung der Ungleichung ist die Auflösung der Beträge $|3x + 4|$ und $|x + 1|$ erforderlich.

1. Fall: $x \geq -1$

Damit ist $3x + 4 > 0$ und $x + 1 \geq 0$, die Ungleichung erhält die Form

$$3x + 4 > x + 1$$

und ist erfüllt für $2x > -3$ bzw. $x > -\frac{3}{2}$. Wir erhalten $\mathcal{L}_1 = [-1; \infty)$.

2. Fall: $-\frac{4}{3} \leq x < -1$

Hierfür ist $3x + 4 \geq 0$ und $x + 1 < 0$, mithin muss gelten

$$\begin{aligned} 3x + 4 &> -(x + 1) = -x - 1 \text{ , also} \\ 4x &> -5 \quad \text{bzw.} \\ x &> -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Somit ist $\mathcal{L}_2 = \left(-\frac{5}{4}; -1\right)$.

3. Fall: $x < -\frac{4}{3}$

In beiden Beträgen ergeben sich negative Werte, es muss also gelten $-3x - 4 > -x - 1$.

Das ist äquivalent zu $-3 > 2x$ bzw. $-\frac{3}{2} > x$, also ist $\mathcal{L}_3 = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$.

Die Zusammenfassung der Lösungsmengen ergibt

$$\mathcal{L} = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{4}; \infty\right) = \left\{x \in \mathbb{R} | x < -\frac{3}{2} \vee x > -\frac{5}{4}\right\}.$$

Lösung zu Aufgabe 1 b:

1. Fall: $x \geq \frac{3}{2}$. Es ist:

$$\begin{aligned} 6x - 9 = x^2, \quad 0 = x^2 - 6x + 9. \quad &\text{Das geht genau dann, wenn} \\ x_1 = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3. \end{aligned}$$

2. Fall: $x < \frac{3}{2}$. Es folgt:

$$-6x + 9 = x^2, \quad 0 = x^2 + 6x - 9. \text{ Es ist}$$
$$x_{2/3} = -3 \pm \sqrt{18}, \text{ d.h.}$$
$$x_2 = -3 - \sqrt{18}, \ \ x_3 = -3 + \sqrt{18}.$$

Offensichtlich ist $-3 - \sqrt{18} < \frac{3}{2}$. Zu überprüfen ist aber, ob $-3 + \sqrt{18} < \frac{3}{2}$ gilt, also

$\sqrt{18} < \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$.

Nun ist $18 = \frac{72}{4} < \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$, also wegen der Monotonie der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$

auch $\sqrt{18} < \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$.

Beide Werte sind die Lösungen der Gleichung, mithin ergibt sich

$$\mathcal{L} = \left\{-3 - \sqrt{18}; -3 + \sqrt{18}; 3\right\}.$$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{7n-2} \cdot \frac{11-14n}{10n+8} = \frac{5}{7} \cdot \left(-\frac{14}{10}\right) = -1.$$

b) Man erhält

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x+1} + 4^x}{4^{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2^{x+1}}{4^{x+1}} + \frac{4^x}{4^{x+1}}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

c) Da Zähler und Nenner stetige Funktionen sind, ergibt sich:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - \sqrt{2}x + 1}{5x + 2} = \frac{1}{2}.$$

Lösung zu Aufgabe 3:

Der Ausdruck $x^2 - 2x + 2$ wird für kein $x \in \mathbb{R}$ Null, die Funktion f hat also keine Polstellen (weder im zu betrachtenden Bereich $[-1; 3]$, noch sonst).
Demzufolge ist sie auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar.

a) Zur Bestimmung der Extremwerte bilden wir die erste Ableitung:

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 2x + 2) - (2x-2)(2x-2)}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 4 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$
$$= \frac{-2x^2 + 4x}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \frac{2x(-x+2)}{(x^2 - 2x + 2)^2}.$$

Folglich ist $f'(x) = 0$ für $x = 0$ oder $x = 2$, hier liegen also mögliche relative Extremstellen. Wir erhalten

$$f(0) = -2 \quad \text{und } f(2) = 0.$$

An den Rändern gilt $f(-1) = -\frac{9}{5} > -2$ und $f(3) = -\frac{1}{5} < 0$. Wegen der Stetigkeit von f muss also bei $(0; -2)$ ein relatives Minimum und bei $(2; 0)$ ein relatives Maximum liegen. Diese relativen Extremwerte sind auch die absoluten Extremwerte im betrachteten Intervall.
Weil $\mathbb{D}(f) = [-1; 3]$ ist, liegt bei $x = -1$ ein weiteres relatives Maximum und bei $x = 3$ ein weiteres relatives Minimum.

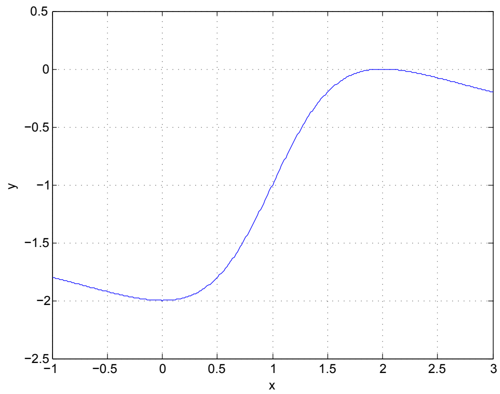
Anmerkung: Man kann die Art der Extrema natürlich auch über das Kriterium der 2. Ableitung bestimmen,diese ist

$$f''(x) = \frac{(-4x+4)(-x^2+2x+2)}{(x^2-2x+2)^3},$$

$$\begin{array}{lllllll} \text{also} & f''(0) & = & \frac{4 \cdot 2}{2^3} & = & 1 & > & 0 \quad \text{und} \\ & f''(2) & = & \frac{-4 \cdot 2}{2^3} & = & -1 & < & 0, \end{array}$$

b) Bei a) haben wir bereits $f(2) = 0$ erhalten. Die Funktion ist stetig und hat an dieser Stelle ein absolutes Maximum im Intervall $[-1; 3]$. Weitere Nullstellen können nicht existieren.

c)



Lösung zu Aufabe 4:

a) Es gilt:

$$\int_1^0 \left(5x^4 - 3\sqrt[3]{x}\right) dx = -\int_0^1 \left(5x^4 - 3x^{\frac{1}{3}}\right) dx = -\left[x^5 - \frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = -\left(1 - \frac{9}{4} - 0\right) = \frac{5}{4}.$$

b) Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x + C, \quad C = \text{const.}$$

Also ist

$$\int_1^e \ln x\, dx = \Big[x \cdot \ln x - x\Big]_1^e = e \cdot \ln e - e - (1 \cdot \ln 1 - 1) = e - e - (0 - 1) = 1.$$

c) Wir substituieren $u = x^3 + 7x - 2$. Dann ist

$$u' = \frac{du}{dx} = 3x^2 + 7\,;\text{ also} \quad du = (3x^2 + 7)\, dx.$$

Wir erhalten

$$\int (3x^2 + 7) \cdot \sqrt{x^3 + 7x - 2}\, dx = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^3 + 7x - 2)^{\frac{3}{2}}.$$

Lösung zu Aufgabe 5 a:

Hier handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit der Normalform

$$y' = (4x - 3)y + e^{2x^2};$$

also ist $a(x) = 4x - 3$ und $b(x) = e^{2x^2}$. Folglich gilt

$$A(x) = \int a(x)dx = \int (4x-3)dx = 2x^2 - 3x;$$

$$B(x) = \int e^{-A(x)} \cdot b(x)dx = \int e^{-2x^2+3x} \cdot e^{2x^2} dx = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$

und somit

$$\begin{aligned} y(x) &= B(x) \cdot e^{A(x)} + C \cdot e^{A(x)} = \frac{1}{3}e^{3x} \cdot e^{2x^2-3x} + C \cdot e^{2x^2-3x} \\ &= \frac{1}{3}e^{2x^2} + C \cdot e^{2x^2-3x}. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5 b: Hier liegt ein Anfangswertproblem für eine Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vor. Die zugehörige homogene Differentialgleichung ist

$$y'' - 3y' = 0,$$

d.h., das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

und hat die Lösungen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 3$. Folglich ist

$$y_H(x) = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{3x} = C_1 + C_2 e^{3x}$$

die allgemeine Lösung des homogenen Systems.
$y_S(x) = -\frac{7}{3}x$ ist eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems, woraus

$$y(x) = y_H(x) + y_S(x) = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{7}{3}x \quad \text{folgt.}$$

Für unsere Anfangswerte muss also gelten

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 0; \\ y'(0) &= 3C_2 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Wir erhalten $3C_2 = \frac{9}{3} = 3$, also $C_2 = 1$; dann muss aber $C_1 = -1$ sein. Das Anfangswertproblem hat also die Lösung

$$y(x) = -1 + e^{3x} - \frac{7}{3}x.$$

Probe:

$$y'(x) = 3e^{3x} - \frac{7}{3}, \quad y''(x) = 9e^{3x}$$
$$y''(x) - 3y'(x) = 9e^{3x} - 3\left(3e^{3x} - \frac{7}{3}\right) = 9e^{3x} - 9e^{3x} + 3 \cdot \frac{7}{3} = 7.$$

Lösung zu Aufgabe 5 c: $y''(x) = \sin\, x$ ist keine „echte“ Differentialgleichung, wir können beide Seiten getrennt integrieren und erhalten

$$y'(x) = -\cos\, x + C_1 \quad \text{bzw.} \quad y(x) = -\sin\, x + C_1 x + C_2.$$

Lösung zu Aufgabe 6:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 13 \\ -7 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$
$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} \qquad BA \quad \text{ist nicht definiert.}$$

12 Klausur vom Januar 2011

Aufgabe 1 (6 Punkte):

a) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c > 0$. Welche der folgenden Ungleichungen sind dann für jede Wahl von a, b, c auch richtig:

(i) $bc < ac$ (ii) $(a-b)c < 0$ (iii) $a^3 + c^3 < b^3 + c^3$ (iv) $|a+b| > |a| < |b|$?
Begründen Sie Ihre Antwort oder geben Sie Gegenbeipiele an.

b) Definieren Sie: "Die Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.".

Aufgabe 2 (14 Punkte):

a) $A \subseteq \mathbb{R}$ sei die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{x-2}{x+4} \leq \dfrac{x+1}{-3+x}$. Geben Sie A an sowie, falls vorhanden, das Infimum, Maximum, Minimum und Supremum dieser Menge.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $|x^2 + 3x - 7| = 3$?

Aufgabe 3 (6 Punkte): Berechnen Sie die Punktelastizität für die Funktion $f(x) = (x+2)^2 e^{-x}$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist diese kleiner als 0?

Aufgabe 4 (16 Punkte): Die Funktion $f(x) = \dfrac{(4-x)^2 e^x}{e^3}$ werde auf $-3 \leq x \leq 5$ betrachtet.

a) Bestimmen Sie alle relativen (lokalen) und globalen (absoluten) Extremwerte der Funktion.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x)$.

c) Skizzieren Sie den Funktionsverlauf im angegebenen Intervall.

Aufgabe 5 (7 Punkte):

a) Treffen Sie Aussagen zur Monotonie der Zahlenfolge $a_n = \dfrac{n-8}{4^n}$.

b) Berechnen Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen

$$b_n = \sqrt{\frac{6n^2 + 7n + 3}{2n^2 - 4n + 5}} \cdot \frac{\sqrt{27}\; n^2}{3n^2 - 2n + 1} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{(2 \cdot 3^n + 3)^3}{27^n} \; .$$

Aufgabe 6 (14 Punkte): Lösen sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:

a) $y'(x) + 2y(x) + x = 1$ b) $3y'' + 18y' = 6 - 27y$; $y(0) = \dfrac{20}{9}$; $y'(0) = -5$.

Führen Sie eine Probe für Aufgabe a) durch!

Aufgabe 7 (3 Punkte): Bestimmen Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$, für die gilt

$$\int_a^2 (3x^2 + 2x)dx = 12 \; .$$

Aufgabe 8 (3 Punkte): Gesucht ist eine Geldanlage, die das eingesetzte Kapital innerhalb von 12 Jahren verdoppelt. Welchen Zinssatz muss eine Bank mindestens bieten, um dieses Ziel zu erreichen? (Die Zinsgutschrift erfolgt jeweils am Jahresende und die Zinsen verbleiben auf dem Konto.)

Lösung zu Aufgabe 1 a:

i) ist nicht richtig für alle $a < b$ und alle $c > 0$. Ein Gegenbeispiel ist $a = 0, b = 1$ und $c = 2$, denn $bc = 2 > 0 = ac$.

ii) ist richtig. Wegen $a - b < 0$ und $c > 0$ folgt $(a - b)c < 0$.

iii) ist richtig. Weil $f(x) = x^3$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, gilt $a^3 < b^3$ wegen $a < b$. Dann ist auch $a^3 + c^3 < b^3 + c^3$.

iv) ist nicht richtig. Ein Gegenbeispiel ist $a = -2$ und $b = 1$. Dann wird $|a + b| = |1 - 2| = |-1| = 1 \not> 2 = |a|$.

Lösung zu Aufgabe 1 b:

„ Die Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a“ bedeutet, dass in jedem Intervall $[a - \varepsilon; a + \varepsilon]$ fast alle Folgeglieder a_n liegen. Mit anderen Worten: Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $n(\varepsilon)$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 2 a:

Wir formen zuerst die Ungleichung in eine gleichwertige ohne Brüche um, dazu multiplizieren wir die Ungleichung mit $(x + 4)(x - 3)$. Zu beachten ist, ob der Multiplikator positiv oder negativ ist. Bei negativem Multiplikator wird aus „ $\leq$ “ gerade „ $\geq$ “.
Sicher ist $3 \notin A$ und $-4 \notin A$

- 1.Fall: $x \geq 3$.
  Dann ist $(x + 4)(x - 3) > 0$. Nach Multiplikation erhält man die Ungleichung $(x - 2)(x - 3) \leq (x + 1)(x + 4)$, also $x^2 - 5x + 6 \leq x^2 + 5x + 4$ bzw. $10x \geq 2$. Lösungen mit $x > 3$ müssen die Ungleichung $x \geq \frac{1}{5}$ erfüllen, was keine Einschränkung darstellt.
  Daher ist $\mathcal{L}_1 = (3; +\infty)$.
- 2.Fall: $x \leq -4$.
  Dann sind $(x - 3)$ und $(x + 4)$ beide negativ, ihr Produkt ist positiv und die Ungleichung ist wieder äquivalent zu $x \geq \frac{1}{5}$. Das widerspricht aber der Fallvoraussetzung $x \leq -4$.

  Demnach wird die zweite Teillösungsmenge $\mathcal{L}_2 = \emptyset$.
- 3.Fall: $-4 < x < 3$.
  Die Ungleichung kann nun umgeformt werden zu $x \leq \frac{1}{5}$. Zusammen mit der Fallvoraussetzung ergibt sich $\mathcal{L}_3 = \left(-4; \frac{1}{5}\right]$.

Daher wird $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_3 = \left(-4; \frac{1}{5}\right] \cup (3; +\infty)$.

Man erkennt leicht:
$\min A$ existiert nicht, $\inf A = -4$; $\max A$ existiert nicht, $\sup A = \infty$.

Lösung zu Aufgabe 2 b:

Die Gleichung ist äquivalent zu $x^2 + 3x - 7 = 3$ und $x^2 + 3x - 7 = -3$.

Zu lösen sind zwei quadratische Gleichungen $x^2 + 3x - 10 = 0$ und $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Die Lösungen sind

$$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9+40}}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 2,$$
$$x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -5$$

bzw.

$$x_3 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9+16}}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1,$$
$$x_4 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -4.$$

Die Probe bestätigt, dass x_1, x_2, x_3, x_4 Lösungen sind:

$$|25 - 15 - 7| = 3 \;\text{ und }\; |4 + 6 - 7| = 3,$$
$$|16 - 12 - 7| = 3 \;\text{ und }\; |1 + 3 - 7| = 3.$$

Lösung zu Aufgabe 3:

Die Punktelastizität einer Funktion $f(x)$ ist definiert als $\varepsilon_f(x) = \dfrac{x}{f(x)} f'(x)$.

Für $f(x) = (x+2)^2 e^{-x}$ ist $f'(x) = 2(x+2)e^{-x} - (x+2)^2 e^{-x}$. Daher wird

$$\varepsilon_f(x) = \frac{x \cdot (x+2)(2-x-2)e^{-x}}{(x+2)^2 e^{-x}} = \frac{x \cdot (-x)}{x+2} = \frac{-x^2}{x+2}.$$

Wir bekommen $\varepsilon_f(x) < 0$ gdw. $\dfrac{-x^2}{x+2} < 0$ gdw. $\dfrac{1}{x+2} > 0, x \neq 0$ gdw. $x+2 > 0, x \neq 0$ gdw. $x > -2, x \neq 0$.
Für alle $x \in (-2;0) \cup (0,+\infty)$ ist die Punktelastizität $\varepsilon_f(x) < 0$.

Lösung zu Aufgabe 4 a:

Die Funktion $f(x) = e^{-3}(4-x)^2 e^x$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und hat die Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-3}(4-x)^2 e^x + 2e^{-3}(-1)(4-x)e^x = e^{-3}e^x(4-x)(2-x) \\ &= e^{-3}e^x(x^2-6x+8), \end{aligned}$$

sowie

$$f''(x) = e^{-3}e^x(x^2-6x+8) + e^{-3}e^x(2x-6) = e^{-3}e^x(x^2-4x+2).$$

Relative Extremwerte im offenen Intervall $(-3;5)$ erfüllen die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$.
Weil $e^{-3} > 0$ und stets $e^x > 0$ ist, erfüllen derartige Extrema die Gleichung
$x^2 - 6x + 8 = (4-x)(2-x) = 0$. Die Lösungen sind $x_1 = 4$ sowie $x_2 = 2$.

Man beachte $x_1, x_2 \in (-3;5)$, also sind x_1, x_2 Kandidaten für lokale Extrema.

Wegen $x_1^2 - 4x_1 + 2 = 16 - 16 + 2 > 0$ ist $f''(x_1) > 0$, bei $x_1 = 4$ hat f ein relatives Minimum.
Wegen $x_2^2 - 4x_2 + 2 = 4 - 8 + 2 < 0$ ist $f''(x_2) < 0$ und f hat bei $x_2 = 2$ ein relatives Maximum.

Nun wird f aber nur auf dem Definitionsintervall $[-3;5]$ betrachtet, daher können relative Extrema auch in den Randpunkten dieses Intervalles auftreten.

Für die Ableitung $f'(x)$ gilt: $f'(x) > 0$ für $x \in [-3;2) \cup (4;5]$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (2;4)$, denn $(4-x)(2-x)$ zeigt dieses Verhalten. Das bedeutet, f ist monoton wachsend in $[-3;2) \cup (4;5]$ und monoton fallend in $x \in (2;4)$. Folglich besitzt f ein weiteres lokales Minimum bei $x_3 = -3$ und ein lokales Maximim bei $x_4 = 5$.

Die absoluten Extrema finden wir unter den lokalen durch Vergleich der Funktionswerte. Weil

$$\begin{aligned} f(x_3) &= f(-3) = e^{-6}(4+3)^2 = 49e^{-6} \approx 0.122 \\ f(x_2) &= f(2) = e^{-1}(4-2)^2 = 4e^{-1} \approx 1.472 \\ f(x_1) &= f(4) = e(4-4)^2 = 0 \\ f(x_4) &= f(5) = e^2 \cdot 1 \approx 7.389 \end{aligned}$$

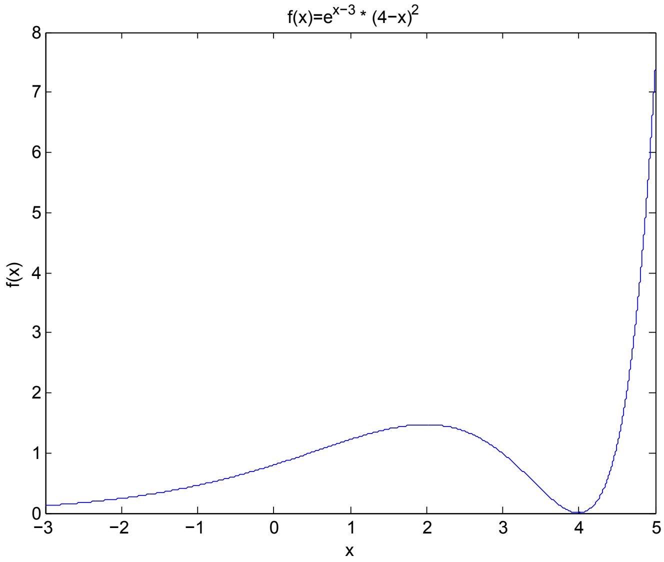
ist, liegt das absolute Minimum bei $x_1 = 4$ und das absolute Maximum bei $x_4 = 5$.

Lösung zu Aufgabe 4 b:

$f(x) = e^{-3}e^x(4-x)^2 = 0$ gdw. $(4-x)^2 = 0$ ist, weil $e^{-3}e^x > 0$ gilt. Folglich hat f nur die eine Nullstelle $x_1 = 4$.

Das wird durch den Kurvenverlauf in $[-3;5]$ bestätigt.

Lösung zu Aufgabe 4 c:



Lösung zu Aufgabe 5 a:

Man berechne einige Folgenglieder: $a_0 = -8, a_1 = -\dfrac{4}{7}, a_2 = -\dfrac{3}{8}, \ldots, a_8 = 0, a_9 = \dfrac{1}{4^9}, \ldots$. Die Vermutung ist, dass die Folge bis a_9 monoton wächst und dann monoton fällt (gegen 0).

Den Beweis führen wir indirekt. Angenommen, es gebe einen Index $n \geq 9$, so dass $a_{n+1} > a_n$ ist, also $\dfrac{(n+1)-8}{4^{n+1}} > \dfrac{n-8}{4^n}$.

Multiplikation mit 4^{n+1} liefert $n+1-8 > 4n-32$, also $n < \dfrac{25}{3}$. Weil $n \geq 9$ sein soll, ergibt sich ein Widerspruch. Bis $n \leq 8$ ist die abgeleitete Ungleichung erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 5 b:

Die Folge $\dfrac{6n^2+7n+3}{2n^2-4n+5} = \dfrac{6+\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}{2-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}$ hat für $n \to \infty$ den Grenzwert 3.

Folglich ist $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{6n^2+7n+3}{2n^2-4n+5}} = \sqrt{3}$.

Die Folge $\dfrac{\sqrt{27}n^2}{3n^2-2n+1} = \dfrac{\sqrt{27}}{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$ für $n \to \infty$ hat den Grenzwert $\dfrac{\sqrt{27}}{3}$.

Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{9\cdot 3}}{3} = 3$.

Für die Folge c_n gilt: $c_n = \dfrac{(2\cdot 3^n+3)^3}{27^n} = \dfrac{(2\cdot 3^n+3)^3}{(3^n)^3} = \left(\dfrac{2\cdot 3^n+3}{3^n}\right)^3 = \left(2+\dfrac{3}{3^n}\right)^3$. Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 8$.

Lösung zu Aufgabe 6 a:

Die homogene Gleichung hat die allgemeine Lösung $y(x) = Ae^{-2x},\ A \in \mathbb{R}$. Das folgt aus dem Ansatz $y(x) = Ae^{Bx}$ für eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Eine Lösung der inhomogenen Gleichung gewinnen wir aus dem Ansatz $y_S(x) = C_1(x)e^{-2x}$.

Daraus folgt $y_S'(x) + 2y_S(x) + x = C_1'(x)e^{-2x} - 2C_1(x)e^{-2x} + 2C_1(x)e^{-2x} + x = 1$ gdw.

$$C_1'(x) = (1-x)e^{2x} \text{ gdw. } C_1(x) = e^{2x}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x\right).$$

Daher erhalten wir $y_S(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x$.

In der Tat ist $y_S'(x) + 2y_S(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - x = 1 - x$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$y(x) = Ae^{-2x} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x \text{ mit } A \in \mathbb{R}.$$

Probe: $y'(x) + 2y(x) = -2Ae^{-2x} - \frac{1}{2} + 2Ae^{-2x} + \frac{3}{2} - x = 1 - x$.

Lösung zu Aufgabe 6 b:

Die lineare inhomogene Differentialgleichung $y'' + 6y' + 9y = 0$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, d.h. $(\lambda + 3)^2 = 0$. Nullstellen sind $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.

Die Lösung der homogenen Gleichung ist daher

$$y_H(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}, \ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Die inhomogene Differentialgleichung hat eine spezielle Lösung $y_S = a \in \mathbb{R}$, also ist $6 = 27a$, d.h. $a = \dfrac{2}{9}$.

Man erhält $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + \dfrac{2}{9}$.

Wegen $y(0) = C_1 + \dfrac{2}{9} = \dfrac{20}{9}$ folgt $C_1 = 2$ und $y'(0) = -3C_1 + C_2 e^0 = -5$, d.h. $-3 \cdot 2 + C_2 = -5$, bzw. $C_2 = 1$.

Die allgemeine Lösung ist daher $y(x) = 2e^{-3x} + xe^{-3x} + \dfrac{2}{9}$.

Lösung zu Aufgabe 7:

Es ist $\displaystyle\int_a^2 (3x^2 + 2x)dx = 12$. Eine Stammfunktion ist $x^3 + x^2$, also $x^3 + x^2\big|_a^2 = 12$, d.h. $8 + 4 - a^3 - a^2 = 12$ oder $a^2(a+1) = 0$. Mithin sind $a_1 = 0$ und $a_2 = -1$ die gesuchten Zahlen a.

Lösung zu Aufgabe 8:

Aus einem Kapital K wird mit der Zinsrate r unter der vorgegebenen Annahmen nach 12 Jahren das Kapital $K_{12} = K(1 + r)^{12}$.

Wegen $K_{12} = 2K$ ist r so zu bestimmen, dass $(1 + r)^{12} = 2$ ist.

Dann ist $1 + r = \sqrt[12]{2}$ bzw. $r = \sqrt[12]{2} - 1 \approx 0,05946$.
Die Bank muss einen Zinssatz von $5,95\%$ bieten.

13 Klausur vom Januar 2012

Aufgabe 1 (8 Punkte) : Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt und begründen Sie Ihre Entscheidung bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an:

1. Jede monoton steigende Zahlenfolge ist nach unten beschränkt.
2. Eine alternierende Zahlenfolge ist immer beschränkt.
3. Eine konvergente Zahlenfolge ist entweder monoton wachsend oder monoton fallend.
4. Das Produkt einer stetigen und einer unstetigen Funktion kann nicht stetig sein.

Aufgabe 2 (6 Punkte) : Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $|3x - 6| \leq |x + 1|$?

Aufgabe 3 (6 Punkte) : Berechnen Sie die Punktelastizität für die Funktion $f(x) = (x - 2)^2 e^x$.

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist diese negativ?

Aufgabe 4 (8 Punkte) : Betrachtet werde die Funktion $\quad f(x) = 1 - \dfrac{2x-2}{2+x^2-2x} \quad$ auf dem Intervall $[-1, 3]$.

Bestimmen Sie alle Maxima und Minima dieser Funktion. Unterscheiden Sie dabei zwischen relativen und absoluten Extremwerten.

Aufgabe 5 (8 Punkte) : $A \subseteq \mathbb{R}$ sei der Definitionsbereich von

$$f(x) = \frac{\ln(x+4)}{4 - \sqrt{24 - x^2 + 2x}} \ .$$

Geben Sie A an sowie, falls vorhanden, das Infimum, Maximum, Minimum und Supremum dieser Menge.

Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x)$.

Aufgabe 6 (14 Punkte) : Lösen sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:

1. $y' + \dfrac{5}{x} y = 3x^3 \qquad (x > 0) \qquad y(1) = \dfrac{7}{3}$
2. $3y'' + 18y' = 6 - 27y$.

Führen Sie eine Probe für Aufgabe a) durch!

Aufgabe 7 (4 Punkte) :

Bestimmen Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$, für die gilt $\quad \displaystyle\int\limits_a^3 (x^2 + 2x)dx = 18$.

Aufgabe 8 (9 Punkte) : Berechnen Sie

$$(a) \int \frac{1}{3\sqrt[7]{x}}\, dx \qquad\qquad (b) \int \cos x e^x \, dx \qquad\qquad (c) \int\limits_{-\infty}^{0} e^{3x}\, dx.$$

Aufgabe 9 (4 Punkte) : Bestimmen Sie die Summe der geometrischen Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ mit $a_i = (-1)^i \cdot 2 \cdot 10^{-i}$; $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Lösung zu Aufgabe 1:

1. ist richtig, denn es gilt für eine monoton steigende Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stets $a_n \geq a_1,\ n \in \mathbb{N}$.
2. ist falsch, als Gegenbeispiel dient $a_n = (-1)^n \cdot n,\ n \in \mathbb{N}$.
3. ist falsch, ein Gegenbeispiel ist $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$ mit dem Grenzwert 0.
4. ist falsch. Gegenbeispiel ist $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ für $x \neq 0,\ f(0) = 0$ und $g(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$. Dann ist $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 0$ für alle x eine stetige Funktion.

Lösung zu Aufgabe 2:

Wir formen die Ungleichung $|3x - 6| \leq |x + 1|$ in eine äquivalente ohne Beträge um. Dies kann z.B. durch Quadrieren der Ungleichung geleistet werden, da beide Seiten nicht negativ sind. So können wir den üblichen Weg (Fallunterscheidung) umgehen.

Wir erhalten hier $9x^2 - 36x + 36 \leq x^2 + 2x + 1$ gdw. $8x^2 - 38x + 35 \leq 0$ gdw. $x^2 - \dfrac{19}{4}x + \dfrac{35}{8} \leq 0$.

Das quadratische Polynom $x^2 - \frac{19}{4}x + \frac{35}{8}$ hat die Nullstellen
$x_{1,2} = \frac{19}{8} \pm \sqrt{\frac{361-280}{64}} = \frac{19}{8} \pm \frac{9}{8}$, d.h. $x_1 = \frac{28}{8} = 3,5$ und $x_2 = \frac{10}{8} = 1,25.$

Wie man leicht sieht, strebt das Polynom $x^2 - \frac{19}{4}x + \frac{35}{8}$ gegen ∞, wenn $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$. In diesen beiden Fällen wird dieser Ausdruck positiv.

Da die ausgerechneten Nullstellen einfach sind, ändert sich beim Passieren einer Nullstelle das Vorzeichen des Polynoms. Dies führt uns zur Erkenntnis, dass $x^2 - \frac{19}{4}x + \frac{35}{8} \leq 0$ auf dem Intervall $[1,25; 3,5]$ gilt.

Daher wird $\mathcal{L} = [1,25; 3,5]$.

Lösung zu Aufgabe 3: Die Punktelastizität einer Funktion $f(x)$ ist definiert als

$\varepsilon_f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x).$

Für $f(x) = (x-2)^2 e^x$ gilt $f'(x) = 2(x-2)e^x + (x-2)^2 e^x$. Daher wird

$$\varepsilon_f(x) = \frac{x \cdot (x-2)(2+x-2)e^x}{(x-2)^2 e^x} = \frac{x \cdot x}{x-2} = \frac{x^2}{x-2}.$$

Wir erhalten $\varepsilon_f(x) < 0$ gdw. $\frac{x^2}{x-2} < 0$ gdw. $\frac{1}{x-2} < 0, x \neq 0$ gdw. $x-2 < 0, x \neq 0$ gdw. $x < 2, x \neq 0$.
Für alle $x \in (-\infty; 0) \cup (0,2)$ ist die Punktelastizität $\varepsilon_f(x) < 0$.

Lösung zu Aufgabe 4:

Es gilt offensichtlich $2 + x^2 - 2x = (x-1)^2 + 1 > 0$. Somit ist der Definitionsbereich der gegebenen Funktion ganz $\mathbb{R}$. $f(x)$ ist auch auf $\mathbb{R}$ (speziell auf $[-1;3]$) differenzierbar.

Die Funktion $f(x) = 1 - \frac{2x-2}{2+x^2-2x}$ kann zu $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{2+x^2-2x} = \frac{(x-2)^2}{2+x^2-2x}$ umgeformt werden. Hier erkennen wir, dass

1) $f(x)$ die doppelte Nullstelle $x = 2$ hat;
2) die Ungleichung $f(x) \geq 0$ auf dem ganzen Definitionsbereich gilt.
3) Da die Nullstelle doppelt ist, erfüllt sie auch die Gleichung $f'(x) = 0$, also ist $x = 2$ gleichzeitig eine extremwertverdächtige Stelle.

Nun berechnen wir die erste Ableitung der Funktion:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-2)(x^2-2x+2) - (x-2)^2(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{2(x-2)(x^2-2x+2-(x-2)(x-1))}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{2(x-2)x}{(x^2-2x+2)^2}. \end{aligned}$$

Relative Extremwerte im offenen Intervall $(-1;3)$ erfüllen die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$.
Die Gleichung $\frac{2(x-2)x}{(x^2-2x+2)^2} = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 0$ sowie $x_2 = 2$.

Wir beachten $x_1, x_2 \in (-1;3)$, also sind x_1, x_2 extremwertverdächtig.

Es gilt $f'(x) = \dfrac{2(x-2)x}{(x^2-2x+2)^2} < 0$ für $x \in (0;2)$ und $f'(x) = \dfrac{2(x-2)x}{(x^2-2x+2)^2} > 0$ für $x \in (-1;0) \cup (2;3)$.

Somit ist f monoton wachsend in $x \in (-1;0) \cup (2;3)$ und monoton fallend in $x \in (0;2)$. Deswegen hat f bei $x_1 = 0$ ein relatives Maximum und bei $x_2 = 2$ ein relatives Minimum. Eine andere Möglichkeit wäre, die zweite Ableitung zu berechnen und sie an den Stellen x_1 und x_2 auszuwerten.

Nun wird f aber nur auf dem Definitionsintervall $[-1;3]$ betrachtet, daher können relative Extrema auch in den Randpunkten dieses Intervalles auftreten.

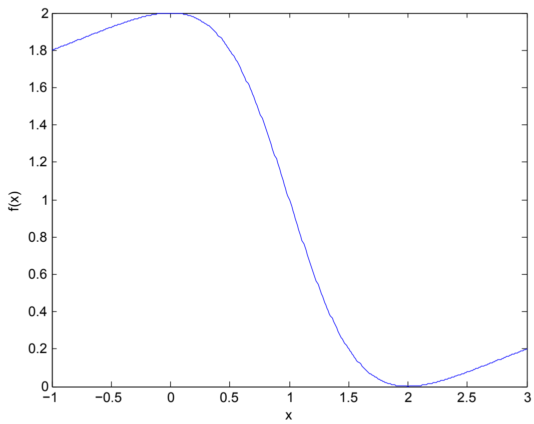
Aus dem Monotonieverhalten der Funktion $f(x)$ folgt, dass f ein weiteres lokales Minimum bei $x_3 = -1$ sowie ein weiteres lokales Maximim bei $x_4 = 3$ besitzt.

Die absoluten Extrema finden wir unter den lokalen durch Vergleich der Funktionswerte. Weil

$$
\begin{aligned}
f(x_3) &= f(-1) = \frac{9}{5} = 1,8 \\
f(x_1) &= f(0) = \frac{4}{2} = 2 \\
f(x_2) &= f(2) = 0 \\
f(x_4) &= f(3) = \frac{1}{5} = 0,2
\end{aligned}
$$

ist, liegt das absolute Minimum bei $x_2 = 0$ und das absolute Maximum bei $x_1 = 2$.

Der Verlauf der Funktion kann auf der folgenden Abbildung verfolgt werden. Das war bei der Aufgabenstellung nicht verlangt und dient lediglich dem besseren Verständnis der Aufgabe.



Lösung zu Aufgabe 5:

Um den Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \dfrac{\ln(x+4)}{4-\sqrt{24-x^2+2x}}$ zu bestimmen, müssen wir das System

$$
\begin{cases}
x+4 > 0 \\
24-x^2+2x \geq 0 \\
4-\sqrt{24-x^2+2x} \neq 0
\end{cases}
$$

lösen.

Die erste Bedingung sichert, dass der Logarithmus bestimmt werden kann. Die zweite Bedingung bestimmt das Argument der Wurzelfunktion, das nicht negativ sein darf. Die dritte schließt die Nullstellen des Nenners aus.

Aus der 3.Bedingung folgt sofort $24 - x^2 + 2x \neq 16$ bzw. $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2) \neq 0$.

Das System kann umgeschrieben werden zu: $\begin{cases} x > -4 \\ (6-x)(x+4) \geq 0 \\ (x-4)(x+2) \neq 0 \end{cases}$

und die Menge A ist $(-4;-2) \cup (-2;4) \cup (4;6]$.

Man erkennt leicht:
$\min A$ existiert nicht, $\inf A = -4$; $\max A = \sup A = 6$.

Die Nullstellen von $f(x)$ erhalten wir aus der Gleichung $\ln(x+4) = 0$. Das heißt, $x + 4 = 1$ gdw. $x = -3$.

Lösung zu Aufgabe 6 a: Die homogene Gleichung hat die allgemeine Lösung

$y(x) = Ae^{-5\cdot\ln(x)} = Ax^{-5},\ A \in \mathbb{R},\ x > 0$. Das folgt aus dem Ansatz $y(x) = Ae^{-B(x)}$ für eine homogene Differentialgleichung erster Ordnung $y' + b(x)y = 0$. Dabei ist $B(x)$ Stammfunktion von $b(x)$.

Eine Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir aus dem Ansatz $y_S(x) = C_1(x)x^{-5}$ und daher aus

$$C_1'(x) = 3x^8 \quad \text{zu} \quad C_1(x) = \frac{1}{3}x^9.$$

Daraus folgt $y_S(x) = \dfrac{1}{3}x^4$.

In der Tat ist $y_S'(x) + \dfrac{5}{x}y_S(x) = \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{5}{3}x^3 = 3x^3$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist daher

$$y(x) = Ax^{-5} + \frac{1}{3}x^4 \ \text{ mit } \ A \in \mathbb{R}.$$

Die Bedingung $y(1) = \dfrac{7}{3} = A \cdot 1^{-5} + \dfrac{1}{3} \cdot 1^4$ liefert uns $A = 2$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit $y(x) = 2x^{-5} + \dfrac{1}{3}x^4$.

Probe: $y'(x) + \dfrac{5}{x}y(x) = -10x^{-6} + \dfrac{4}{3}x^3 + 10x^{-6} + \dfrac{5}{3}x^3 = 3x^3$.

Lösung zu Aufgabe 6 b:

Die lineare homogene Differentialgleichung $3y'' + 18y' + 27y = 0$ bzw. $y'' + 6y' + 9y = 0$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, d.h. $(\lambda + 3)^2 = 0$. Die Nullstellen sind $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.

Lösung der homogenen Gleichung ist daher

$$y_H(x) = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}, \ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Die inhomogene Differentialgleichung hat eine spezielle Lösung $y_S = a \in \mathbb{R}$, also ist $6 = 27a$, d.h. $a = \dfrac{2}{9}$.

Die allgemeine Lösung erhält man in der Form $y(x) = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \dfrac{2}{9}$.

Lösung zu Aufgabe 7:

Es ist $\displaystyle\int_a^3 (x^2 + 2x)dx = 18$. Eine Stammfunktion ist $\dfrac{1}{3}x^3 + x^2$, also $\left.\dfrac{1}{3}x^3 + x^2\right|_a^3 = 18$, d.h. $9 + 9 - \dfrac{1}{3}a^3 - a^2 = 18$ oder $\dfrac{1}{3}a^2(a + 3) = 0$. Mithin sind $a_1 = 0$ und $a_2 = -3$ die gesuchten Zahlen a.

Lösung zu Aufgabe 8 a:

Die Funktion $\dfrac{1}{3\sqrt[7]{x}} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{7}}$ hat eine Stammfunktion $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{7}{6}x^{\frac{6}{7}} = \dfrac{7}{18}x^{\frac{6}{7}}$.

Daher ist $\int \frac{1}{3\sqrt[7]{x}}\,dx = \frac{7}{18}x^{\frac{6}{7}} + C$, wobei $C = \text{const.}$

Lösung zu Aufgabe 8 b:

Wir berechnen das Integral mit Hilfe einer partiellen Integration, die wir zweimal aufführen. Es folgt:

$$\int \cos x e^x dx = \sin x e^x - \int \sin x e^x dx = \sin x e^x - \left(-\cos x e^x - \int (-\cos x) e^x dx\right)$$
$$= \sin x e^x + \cos x e^x - \int \cos x e^x dx.$$

Wir betrachten also die Gleichung $\int \cos x e^x dx = \sin x e^x + \cos x e^x - \int \cos x e^x dx$ und addieren auf beiden Seiten den Wert $\int \cos x e^x dx$.

Daraus folgt $\quad 2 \cdot \int \cos x e^x dx = (\sin x + \cos x)e^x \quad$ und das gesuchte Integral ist
$\int \cos x e^x dx = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + C$, wobei $C = \text{const.}$

Lösung zu Aufgabe 8 c:

Das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{3x} dx$ wird laut Definition als $\lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} e^{3x} dx$ berechnet.

Nun erhalten wir

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{3x} dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{3a}\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty} e^{3a} = \frac{1}{3}.$$

Lösung zu Aufgabe 9:

Für eine unendliche geometrische Reihe mit $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (-1;1)$ gilt:
$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1-q}$.
In unserem Beispiel ist $q = \frac{(-1)^{i+1}\cdot 2\cdot 10^{-(i+1)}}{(-1)^i\cdot 2\cdot 10^{-i}} = -10^{-1} = -0,1 \in (-1;1)$ und
$a_1 = (-1)^1 \cdot 2 \cdot 10^{-1} = -0,2$.
Daher ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{-0,2}{1+0,1} = -\frac{2}{11}$.

Literaturverzeichnis

Hier sind einige Bücher, die wir zum Studium der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler empfehlen:

[1] Böker, F. *Formelsammlung für Wirtschaftswissenschaftler.* Pearson Studium. München, 2009 (3.Auflage).

[2] Matthäus, H., Matthäus, W.-G. *Mathematik für BWL - Bachelor*. Vieweg+Teubner-Verlag, 2010.

[3] Meyer-Nieberg, P. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler.* Skript, Universität Osnabrück, 1990.

[4] Pfuff, F. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler kompakt.* Vieweg+Teubner-Verlag, 2009.

[5] Senger, J. *Mathematik. Grundlagen für Ökonomen.* Oldenbourg-Verlag. München, 2007 (2. Auflage).

[6] Schmidt, W., Bauch, M. *Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler.* Preprint 3/2006, Universität Greifswald.

[7] Schmidt, W., Oberdörfer, H. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II.* Sardellus-Verlag Greifswald, 2009.

[8] Sydsaeter, K., Hammond, P. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Basiswissen mit Praxisbezug.* Pearson Studium. München, 2009 (3.Auflage).

[9] Thomas, G.B., Weir, M.D., Hass, J. *Basisbuch Analysis.* Pearson Higher Education. München et. al., 2013.